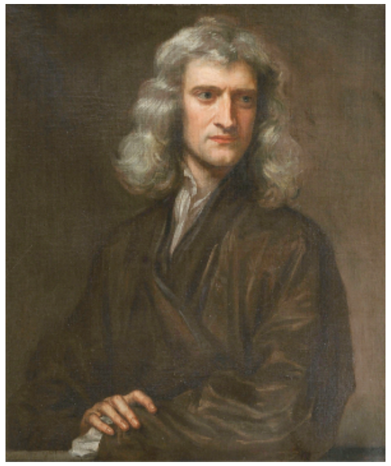
Mise en perspective historique



Isaac Newton (1643-1727)
Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica

1687

Leonhard Euler (1707-1783)

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

William Hamilton (1805-1865)

Emmy Noether (1882-1935)
Théorème de Noether

1915

Systèmes dynamiques
Kolmogorov, Arnold, Moser, Lorenz etc.

230 années

La mécanique Hamiltonienne

Mécanique analytique = construction de formalismes mathématiques permettant la résolution de problèmes plus complexes, au-delà de F=ma

1re étape : la mécanique Lagrangienne

-> identification de coordonnées généralisées (aka cylindriques, sphériques…)

-> inclusion systématique de contraintes (multiplicateurs de Lagrange)

-> identification de symétries vs. intégrales du mouvement (Thm de Noether)

2e étape : la mécanique Hamiltonienne

-> symétrisation formelle du problème en coordonnées canoniques (p,q)

De Lagrange à Hamilton

Transformée de Legendre partielle, dq/dt -> p $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

$$H(q_1, \ldots, q_N; p_1, \ldots, p_N; t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_1, \ldots, q_N; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N; t)$$

(p,q) = coordonnées conjuguées canoniques

Equations de Lagrange

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0}$$

Equations canoniques / d'Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Symétrie mathématique formelle q <-> p

Crochet de Poisson

Dérivée totale par rapport au temps de f(q,p;t)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial t}\end{aligned}$$

Def: Crochet de Poisson de f(q,p;t) et g(q,p;t)

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}}$$

Crochet de Poisson et intégrales premières

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}}$$

1. $f(q, p, t)$ est une intégrale première si et seulement si

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0. \tag{3.13}$$

2. En particulier, une fonction $f(q, p)$ qui ne dépend pas explicitement du temps est une intégrale première si et seulement si

$$\{f, H\} = 0.$$

3. **Théorème de Poisson** : *Si f et g sont des intégrales premières, alors $\{f, g\}$ est aussi une intégrale première.*