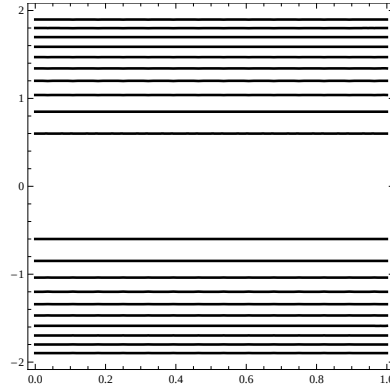


Mécanique analytique — corrigé 12

*Assistants : hugo.chkroun@epfl.ch, brenno.delucca@epfl.ch, garance.durr-legoupil-nicoud@epfl.ch
fanny.eustachon@epfl.ch, solange.flatt@epfl.ch, shiling.liang@epfl.ch
adelaide.mohr@epfl.ch, alexandra.shelest@epfl.ch, adrian.woyke@epfl.ch*

Exercice 1 : Billard plan rectangulaire

- a) Entre deux collisions, les impulsions p_x et p_y sont conservées. Le portrait de phase est donc trivial ; selon chaque dimension on a :



- b) Le hamiltonien entre deux collisions est le hamiltonien pour une particule libre en deux dimensions :

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) \quad (1)$$

En effectuant la séparation $f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$, on obtient l'équation de Hamilton-Jacobi suivante :

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} \right)^2 \right] = \alpha_1 \quad (2)$$

Par séparation de variables cela conduit à :

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right)^2 = 2m\alpha_2 \Rightarrow f_1(x) = \pm \sqrt{2m\alpha_2} x \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial y} \right)^2 = 2m(\alpha_1 - \alpha_2) \Rightarrow f_2(y) = \pm \sqrt{2m(\alpha_1 - \alpha_2)} y \quad (4)$$

Au final on a donc quatre solutions différentes :

$$f_{\pm\pm}(x, y) = \pm \sqrt{2m\alpha_2} x \pm \sqrt{2m(\alpha_1 - \alpha_2)} y \quad (5)$$

Les signes correspondent au signe de p_x, p_y c'est-à-dire au sens de déplacement de la particule : positif dans le sens croissant et négatif dans le sens décroissant.

- c) Pour trouver les variables action, il faut définir les orbites que l'on veut parcourir et comment elles sont définies dans notre cas. Un exemple d'orbite est donné par la figure 1. Pour revenir à son point de départ, la particule fait plusieurs rebonds sur les bords du billard. Commençons par le mouvement selon x : la bille touche le bord $x = 0$ et va jusqu'au bord $x = a$ (éventuellement avec plusieurs rebonds entre). L'important est que après retour au point de départ, la

particule a parcouru au moins toute la largeur de $x = 0$ à $x = a$ ainsi que le sens inverse de $x = a$ à $x = 0$. Le tracé $0 \rightarrow a$ est décrit par $f_{+\pm}$ (le mouvement selon y est indépendant) et celui du retour, $a \rightarrow 0$, par $f_{-\pm}$. Ce qui conduit à :

$$I_x = \frac{1}{2\pi} \int_0^a [\sqrt{2m\alpha_2}] dx + \frac{1}{2\pi} \int_a^0 [-\sqrt{2m\alpha_2}] dx = \frac{\sqrt{2m\alpha_2}}{\pi} a \quad (6)$$

Pour le mouvement selon y on a le même comportement et donc :

$$I_y = \frac{1}{2\pi} \int_0^b [\sqrt{2m(\alpha_1 - \alpha_2)}] dy + \frac{1}{2\pi} \int_b^0 [-\sqrt{2m(\alpha_1 - \alpha_2)}] dy = \frac{\sqrt{2m(\alpha_1 - \alpha_2)}}{\pi} b \quad (7)$$

A noter que les I_i sont donnés par les conditions initiales.

- d) De l'expression de I_y on peut trouver $\alpha_1 = \alpha_1(I_y, \alpha_2)$, puis de l'expression de I_x $\alpha_2 = \alpha_2(I_x)$. On obtient ainsi :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\pi I_x}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi I_y}{b} \right)^2 \right] \quad (8)$$

- e) Les dérivées partielles du résultat ci-dessus nous donnent les fréquences du mouvement :

$$\begin{cases} \omega_x &= \frac{\pi^2}{ma^2} I_x \\ \omega_y &= \frac{\pi^2}{mb^2} I_y \end{cases} \quad (9)$$

Le mouvement est globalement périodique si le rapport entre ces deux fréquences est rationnel.

Dans le cas du billard carré, on a $a = b$. Choisissons par exemple $\omega_x/\omega_y = 1$. Dans ce cas $I_x = I_y$ et donc $p_x = \pm p_y$: il faut donc lancer la bille avec un angle $\arctan \frac{p_y}{p_x} = \frac{\pi}{4}$ par rapport à l'horizontale (figure 1 à gauche). Si on préfère $\omega_x/\omega_y = 2$ alors $I_x = 2I_y$ et donc $p_x = \pm 2p_y$: il faut lancer la bille avec un angle $\arctan \frac{p_y}{p_x} = \arctan 1/2 \approx 0.39$ (figure 1 à droite). Dans ce cas, la bille fait deux aller-retour selon x avant de revenir à son point de départ.

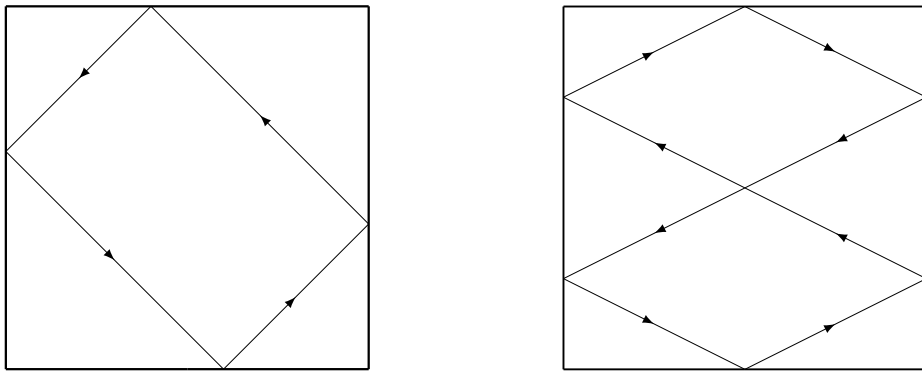
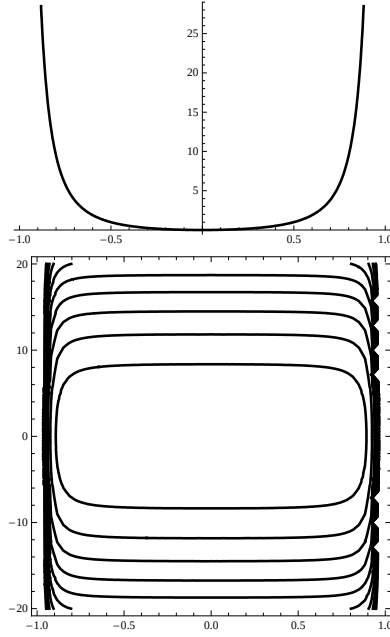


FIGURE 1 – Deux exemples de trajectoires périodiques pour un billard carré. A gauche, $\omega_x = \omega_y$ tandis que $2\omega_y = \omega_x$ à droite.

Exercice 2 : Particule oscillante

- a) Voici le potentiel ainsi que le portrait de phase ($a = V_0 = 1$) :



- b) Le minimum se trouve en $x = 0$. Pour trouver les petites oscillations on peut simplement utiliser les développements bien connus des fonctions trigonométriques ($\cos(x) \approx 1$, $\sin(x) \approx x$) :

$$V(x)|_{x \approx 0} = \frac{V_0 \pi^2}{4a^2} x^2 \quad (10)$$

et donc la fréquence d'oscillation est donnée par :

$$\omega^2 = \frac{V_0 \pi^2}{2ma^2} \quad (11)$$

- c) L'équation de Hamilton-Jacobi dans le cas indépendant du temps est ici donnée par :

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + V_0 \tan^2 \left(\frac{\pi x}{2a} \right) = E \quad (12)$$

d'où l'on tire la solution générale :

$$W_{\pm}(x, E) = \pm \int_0^x d\tilde{x} \sqrt{2m \left[E - V_0 \tan^2 \left(\frac{\pi \tilde{x}}{2a} \right) \right]} \quad (13)$$

- d) Afin de définir l'orbite, il faut trouver les points de rebroussement. Ils sont donnés par $H(p = 0, \pm \bar{x}) = E$:

$$\bar{x} = \frac{2a}{\pi} \arctan \left(\sqrt{\frac{E}{V_0}} \right) \quad (14)$$

Pour l'action on trouve alors :

$$I = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\bar{x}}^{+\bar{x}} d\tilde{x} \sqrt{2m \left[E - V_0 \tan^2 \left(\frac{\pi \tilde{x}}{2a} \right) \right]} - \int_{+\bar{x}}^{-\bar{x}} d\tilde{x} \sqrt{2m \left[E - V_0 \tan^2 \left(\frac{\pi \tilde{x}}{2a} \right) \right]} \right\} \quad (15)$$

Avec le changement de variable $\tan \left(\frac{\pi \tilde{x}}{2a} \right) = \sqrt{\frac{E}{V_0}} z$ on tombe sur la forme canonique donnée dans la série :

$$\sim \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-z^2}}{1+\alpha z^2} dz = \frac{\pi}{\alpha} (\sqrt{\alpha+1} - 1) \quad (16)$$

avec $\alpha = E/V_0$. Et donc, au final :

$$I = \frac{2a}{\pi} \sqrt{2m} \left(\sqrt{E + V_0} - \sqrt{V_0} \right) \quad (17)$$

e) En inversant la relation ci-dessus on trouve $E = E(I)$:

$$E = \sqrt{\frac{V_0 \pi^2}{2ma^2}} I + \frac{\pi^2}{8ma^2} I^2 \quad (18)$$

La fréquence du mouvement est donc donnée par :

$$\omega = \sqrt{\frac{V_0 \pi^2}{2ma^2}} + \frac{\pi^2}{4ma^2} I \quad (19)$$

f) Les petites oscillations correspondent au cas $E \ll V_0$. En effet, dans cette limite $I \approx 0$ et donc :

$$\omega = \sqrt{\frac{V_0 \pi^2}{2ma^2}} \quad (20)$$

qui est bien le même résultat que celui trouvé plus haut.

g) Dans la limite inverse : $E \gg V_0$ on s'attend à ne pas "voir" les détail du bas du potentiel. C'est en effet le cas :

$$I \approx \frac{2a}{\pi} \sqrt{2mE} \quad (21)$$

et donc :

$$\omega = 2\pi \frac{\sqrt{\frac{2E}{m}}}{4a} = 2\pi \frac{\text{vitesse}}{\text{distance}} \quad (22)$$

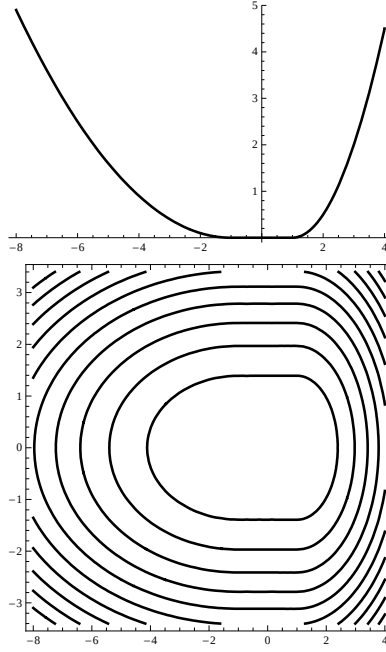
ce qui correspond à une particule libre qui rebondit sur des murs distants de $2a$, comme le billard.

Exercice 3 : Variable action

Le potentiel est donné par :

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} k_- \left(x + \frac{a}{2} \right)^2 & x < -a/2 \\ 0 & -a/2 \leq x \leq a/2 \\ \frac{1}{2} k_+ \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 & a/2 < x \end{cases} \quad (23)$$

a) Potentiel et portrait de phase pour $a = 2$, $k_- = 0.1$, $k_+ = 0.5$:



b) L'équation de Hamilton-Jacobi est donnée par :

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + V(x) = E \quad (24)$$

qui devient :

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \begin{cases} \sqrt{2m \left[E - \frac{1}{2}k_- \left(x + \frac{a}{2} \right)^2 \right]} & x < -a/2 \\ \sqrt{2mE} & -a/2 \leq x \leq a/2 \\ \sqrt{2m \left[E - \frac{1}{2}k_+ \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \right]} & a/2 < x \end{cases} \quad (25)$$

Pour définir les orbites il faut trouver les points de rebroussement, qui sont donnés par $H(p=0, x_{\pm}) = E$:

$$x_{\pm} = \pm \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{2E}{k_{\pm}}} \quad (26)$$

La variable action devient donc :

$$\begin{aligned} I(E) &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{x_-}^{-a/2} \sqrt{2m \left[E - \frac{1}{2}k_- \left(x + \frac{a}{2} \right)^2 \right]} dx + \int_{-a/2}^{+a/2} \sqrt{2mE} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{+a/2}^{x_+} \sqrt{2m \left[E - \frac{1}{2}k_+ \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \right]} dx \right\} \\ &= \frac{\sqrt{2mE}}{\pi} \left[\sqrt{\frac{2E}{k_-}} \int_{-1}^0 \sqrt{1-z^2} dz + a + \sqrt{\frac{2E}{k_+}} \int_0^1 \sqrt{1-z^2} dz \right] \\ &= \frac{\sqrt{m}}{2} \frac{E}{E} \left[\frac{1}{\sqrt{k_-}} + \sqrt{\frac{2}{E}} \frac{2a}{\pi} + \frac{1}{\sqrt{k_+}} \right] \end{aligned} \quad (27)$$

c) Pour $a = 0$ l'expression pour $I(E)$ se simplifie :

$$\frac{\sqrt{m} E}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{k_-}} + \frac{1}{\sqrt{k_+}} \right] \quad (28)$$

On peut à présent l'inverser :

$$E(I) = \frac{2I}{\sqrt{m}} \frac{\sqrt{k_- k_+}}{\sqrt{k_-} + \sqrt{k_+}} \quad (29)$$

et donc trouver la fréquence du mouvement $\omega = \frac{\partial E}{\partial I}$:

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{m}} \frac{\sqrt{k_- k_+}}{\sqrt{k_-} + \sqrt{k_+}} \quad (30)$$

qui est bien égale à la moyenne harmonique des fréquences "élémentaires" :

$$\omega_{\pm} = \sqrt{\frac{k_{\pm}}{m}} \quad (31)$$

d) Si $k_- = 0$ le potentiel est plat pour $x < 0$. La particule va donc juste s'échapper à vitesse constante et il n'y aura pas d'oscillations (des oscillations avec une période infinie et donc une fréquence nulle) et en effet :

$$\lim_{k_- \rightarrow 0} \omega = 0 \quad (32)$$

Dans le cas $k_- \rightarrow \infty$ le potentiel devient une demi-oscillateur harmonique de constante k_+ avec un mur au milieu. On s'attend donc à trouver $\omega = 2\omega_+$ et en effet :

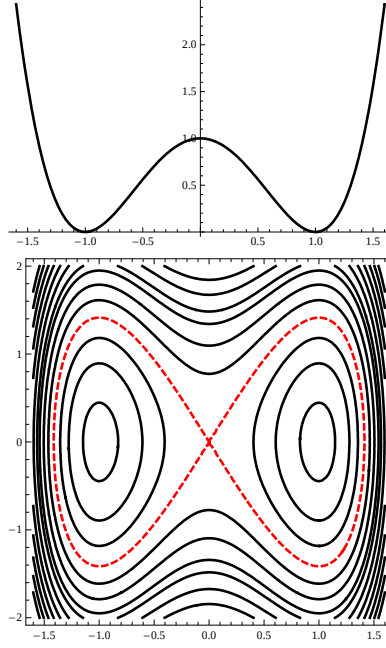
$$\lim_{k_- \rightarrow \infty} \omega = 2\omega_+ \quad (33)$$

Exercice 4 : Double puit de potentiel

- a) Voir point c) ci-dessous.
- b) Le potentiel possède deux minima en $x = \pm a$. Les fréquences d'oscillation seront les mêmes dans les deux vu qu'il y a une symétrie de réflexion autour de $x = 0$; elles sont données par les deuxièmes dérivées du potentiel en ces points :

$$\omega^2 = \frac{V''(\pm a)}{m} = 8 \frac{V_0}{ma^2} \quad (34)$$

- c) Le potentiel et le portrait de phase pour $V_0 = a = 1$. En rouge/traitillé l'orbite pour $E = V_0$.



d) L'équation de Hamilton-Jacobi est donnée par :

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + V_0 \left[\left(\frac{x}{a} \right)^2 - 1 \right]^2 = E \quad (35)$$

dont la solution est :

$$W_{\pm}(x, E) = \pm \int_0^x \sqrt{2m \left\{ E - V_0 \left[\left(\frac{\tilde{x}}{a} \right)^2 - 1 \right]^2 \right\}} d\tilde{x} \quad (36)$$

e) Pour $E < V_0$ on a quatre points de rebroussement :

$$x_{\pm\pm} = \pm a \sqrt{1 \pm \sqrt{\frac{E}{V_0}}} \quad (37)$$

et le mouvement est borné à une moitié du plan, autour de $x = -a$ ou $x = +a$. Alors que pour $E > V_0$ le mouvement peut dépasser la barrière au milieu et il ne reste que les points de rebroussement "extérieurs" :

$$x_{\pm} = x_{\pm+} = \pm a \sqrt{1 + \sqrt{\frac{E}{V_0}}} \quad (38)$$

f) On commence par le cas $E < V_0$ et on se place sur une orbite qui passe autour de $x = +a$:

$$I_{<} = \frac{\sqrt{2mE}}{\pi} \int_{x_{+-}}^{x_{++}} \sqrt{1 - \frac{V_0}{E} \left[\left(\frac{x}{a} \right)^2 - 1 \right]^2} dx \quad (39)$$

Pour $E > V_0$ on trouve :

$$I_{>} = \frac{\sqrt{2mE}}{\pi} \int_{x_{-}}^{x_{+}} \sqrt{1 - \frac{V_0}{E} \left[\left(\frac{x}{a} \right)^2 - 1 \right]^2} dx \quad (40)$$

g) Prendre la limite $E \ll V_0$ n'est pas transparent dans ces coordonnées vu que les bornes d'intégration dépendent également de E . C'est pourquoi on commence par un changement de variables :

$$z = \sqrt{\frac{V_0}{E}} \left[\left(\frac{x}{a} \right)^2 - 1 \right] \quad , \quad dx = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{E}{V_0}} \frac{dz}{\sqrt{1 + z \sqrt{\frac{E}{V_0}}}} \quad (41)$$

Les bornes d'intégration deviennent :

$$x_{+-} \rightarrow z = -1 \quad \& \quad x_{++} \rightarrow z = +1 \quad (42)$$

Au final on trouve :

$$I_{<} = \frac{aE}{2\pi} \sqrt{\frac{2m}{V_0}} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1 - z^2}{1 + z \sqrt{\frac{E}{V_0}}}} dz \quad (43)$$

A présent on peut prendre la limite $E \ll V_0$ et négliger le terme au dénominateur :

$$I_{<} \approx \frac{aE}{2\pi} \sqrt{\frac{2m}{V_0}} \underbrace{\int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - z^2} dz}_{= \pi/2} = \frac{aE}{4} \sqrt{\frac{2m}{V_0}} \quad (44)$$

L'intégration peut être effectuée en appliquant la règle de l'Hôpital à l'indication fournie dans l'exercice 2. En inversant (44), on obtient :

$$E = \frac{I_{<}}{a} \sqrt{8 \frac{V_0}{m}} \quad (45)$$

d'où l'on tire finalement la fréquence $\omega = \frac{\partial E}{\partial I_{<}}$:

$$\omega = \sqrt{8 \frac{V_0}{ma^2}} \quad (46)$$

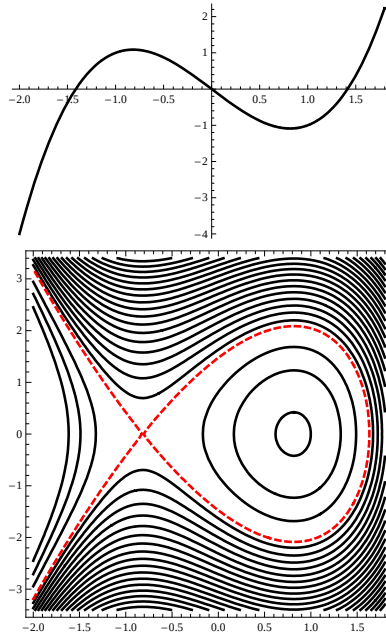
Celle-ci correspond en effet à la fréquence que nous avons calculée précédemment avec l'équation (34).

Exercice 5 : Portraits de phase

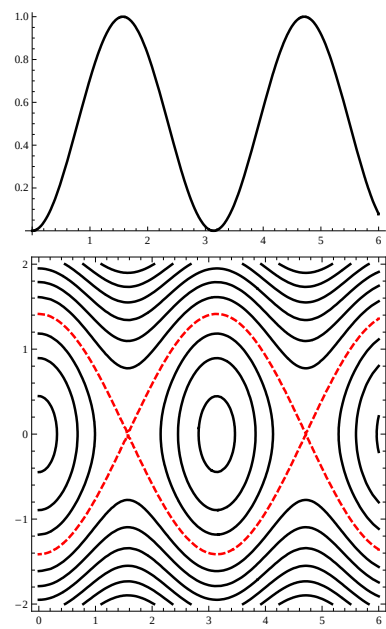
Tant que le hamiltonien a une forme canonique, $H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$, les orbites seront toujours définies par :

$$p_E(x) = \pm \sqrt{2m[E - V(x)]} \quad (47)$$

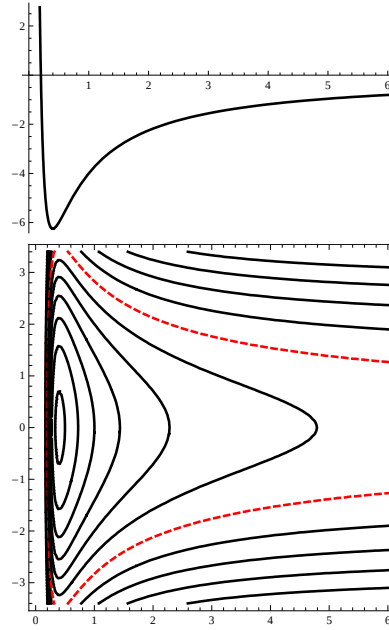
- a) (i) Potentiel et portrait de phase pour $V(x) = x^3 - 2x$. En rouge/traitillé, l'orbite limite entre le cas lié et le cas libre.



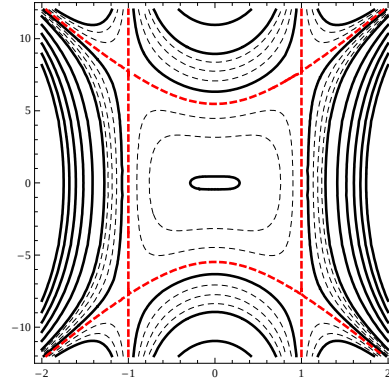
(ii) Potentiel et portrait de phase pour $V(x) = \sin^2(x)$. En rouge/traitillé, l'orbite $E = \lambda$.



(iii) Potentiel et portrait de phase pour $V(x) = -\frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}$. En rouge/traitillé, l'orbite $E = 0$.



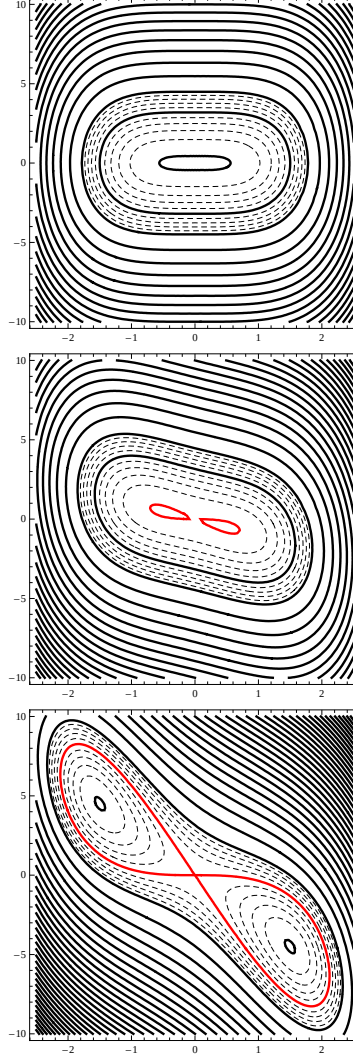
b) (i) Portrait de phase pour $H(p, x) = \frac{p^2}{2}(1 - x^2) + 15x^4$:



Pour obtenir ce résultat, il faut pour commencer essayer de comprendre ce qui se passe. Pour $|x| > L$, le “terme cinétique” devient négatif. Le système va donc partir, quel que soit le potentiel (sauf pour les points avec $p = 0$ qui sont instables).

Si on se trouve au centre, $|x| < L$, soit le terme potentiel domine la dynamique et on obtient des orbites fermées. Dans le cas contraire, où le “terme cinétique” domine, le système va s’approcher de $x = \pm L$. L’énergie limite est donnée par $E = \xi L^4$, en rouge ci-dessus.

(ii) Portrait de phase pour $H(p, x) = \frac{p^2}{2} + \lambda px + x^4$ pour différentes valeurs de λ , $(0, 1, 3)$:



Pour essayer de décortiquer ce cas, essayons de résoudre l'équation $H(p, x) = E$ pour p . Le discriminant est donné par :

$$\Delta = \frac{2E}{m} + \lambda^2 x^2 - \frac{2\xi}{m} x^4 \quad (48)$$

Pour $E = 0$, il y a toujours qu'une solution pour p en $x = 0$. C'est l'orbite rouge ci-dessus.

Les autres points (x) où $\Delta = 0$ sont donnés par :

$$x_{\text{rebroussement}}^2 = \frac{m\lambda^2}{4\xi} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{16\xi}{m^2\lambda^4} E} \right) \quad (49)$$

Pour $E > 0$, seule une de ces solutions est positive, il n'y a donc qu'une orbite. Alors que pour $E < 0$, il y a deux $x_{\text{rebroussement}}^2$ possibles, et donc quatre points de rebroussement.

A présent on a $p_E(x)$ et le rayon de validité, les contours peuvent donc être dessinés. Mais cela reste non-trivial. Afin de donner un peu plus d'intuition, on peut noter que le terme λpx est négatif si $px < 0$, ce qui baisse l'énergie et permet donc d'aller plus loin. On s'attend donc à avoir des orbites un peu penchées dans cette direction, ce qui est en effet observé.

Noter que ces deux derniers cas sont non-triviaux et ont été présentés pour montrer combien un hamiltonien avec un terme cinétique non-canonique pouvait conduire à des résultats peu intuitifs.