

# Mécanique analytique — corrigé 11

*Assistants : hugo.chkroun@epfl.ch, brenno.delucca@epfl.ch, garance.durr-legoupil-nicoud@epfl.ch  
fanny.eustachon@epfl.ch, solange.flatt@epfl.ch, shiling.liang@epfl.ch  
adelade.mohr@epfl.ch, alexandra.shelest@epfl.ch, adrian.woyke@epfl.ch*

## Exercice 1 : Hamilton-Jacobi

a) L'hamiltonien du système est donné par

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + V(r, \theta, \varphi)$$

où les moments conjugués sont donnés comme d'habitude par

$$p_r = m\dot{r} \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta} \quad p_\varphi = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \quad (1)$$

b) L'équation d'Hamilton-Jacobi correspondante est donc

$$\frac{1}{2m} \left( \left( \frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)^2 \right) + V(r, \theta, \varphi) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

La méthode d'Hamilton-Jacobi consiste en une transformation canonique par fonction génératrice de type  $F_2$ . Nous cherchons donc une solution de l'équation ci-dessus. Nous voulons résoudre ce problème par séparation des variables, on recherche une solution  $f(r, \theta, \varphi, t)$  sous la forme :

$$f(r, \theta, \varphi, t) = f_1(r) + f_2(\theta) + f_3(\varphi) + f_4(t)$$

L'équation d'Hamilton-Jacobi devient alors

$$\frac{1}{2m} \left( \left( \frac{df_1}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{df_2}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{df_3}{d\varphi} \right)^2 \right) + V(r, \theta, \varphi) + \frac{df_4}{dt} = 0$$

Dans l'équation précédente, seul le dernier terme dépend du temps. Il doit donc obligatoirement être constant, puisque s'il avait une dépendance en  $t$  aucun autre terme ne pourrait le compenser afin de satisfaire l'équation d'Hamilton-Jacobi. On appelle cette constante  $-\alpha_1$  et on a donc

$$\begin{cases} \frac{df_4}{dt} + \alpha_1 = 0 \\ \frac{1}{2m} \left( \left( \frac{df_1}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{df_2}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{df_3}{d\varphi} \right)^2 \right) + V(r, \theta, \varphi) - \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

Et donc, en omettant la constante d'intégration globale, on trouve

$$\boxed{f_4(t) = -\alpha_1 t}$$

Notez que l'on a trouvé cette constante sans utiliser la forme explicite du potentiel, il s'agit donc d'une caractéristique générale qui, on le verra plus loin, exprime la conservation de l'énergie. Etant donné que le potentiel que nous considérons ici ne dépend pas de  $\varphi$ , on peut appliquer le même raisonnement qu'auparavant et on obtient

$$\boxed{f_3(\varphi) = \alpha_2 \varphi}$$

Cette condition découle du fait que la coordonnée  $\varphi$  est cyclique, et donc exprime la conservation du moment cinétique comme on le verra plus loin. A ce stade, l'équation d'Hamilton-Jacobi s'écrit

$$\frac{1}{2m} \left( \left( \frac{df_1}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{df_2}{d\theta} \right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + A(r) + \frac{B(\theta)}{r^2} - \alpha_1 = 0$$

Nous voulons séparer les termes qui dépendent de  $r$  de ceux qui dépendent de  $\theta$ , nous allons donc multiplier l'équation par  $r^2$  pour obtenir :

$$\frac{1}{2m} \left( r^2 \left( \frac{df_1}{dr} \right)^2 + \left( \frac{df_2}{d\theta} \right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{\sin^2 \theta} \right) + r^2(A(r) - \alpha_1) + B(\theta) = 0$$

Les parties dépendant uniquement de  $r$  et de  $\theta$  doivent donc être constantes et opposées. On appelle cette constante  $\alpha_3$  et on écrit alors

$$\begin{cases} \frac{r^2}{2m} \left( \frac{df_1}{dr} \right)^2 + r^2(A(r) - \alpha_1) + \alpha_3 = 0 \\ \frac{1}{2m} \left( \left( \frac{df_2}{d\theta} \right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{\sin^2 \theta} \right) + B(\theta) - \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Ce qui nous permet d'obtenir :

$$\boxed{f_1(r) = \int dr \sqrt{2m \left( \alpha_1 - A(r) - \frac{\alpha_3}{r^2} \right)} \quad \text{et} \quad f_2(\theta) = \eta \int d\theta \sqrt{2m (\alpha_3 - B(\theta)) - \frac{\alpha_2^2}{\sin^2 \theta}}$$

où  $\eta = \pm 1$ . Le signe global de  $S$  ne nous intéressant pas, nous n'avons pas besoin de mettre un autre  $\pm$  devant  $f_1$ . La fonction  $S(r, \theta, \varphi, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t)$  est donc solution du problème :

$$S = -\alpha_1 t + \alpha_2 \varphi + \int dr \sqrt{2m \left( \alpha_1 - A(r) - \frac{\alpha_3}{r^2} \right)} + \eta \int d\theta \sqrt{2m (\alpha_3 - B(\theta)) - \frac{\alpha_2^2}{\sin^2 \theta}}$$

- c) Si l'on utilise la fonction  $S$  comme fonction génératrice de type  $F_2$  d'un changement de variables canonique, le nouvel hamiltonien  $K$  sera donné par

$$K(P, Q) = H(p, q) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H \left( \frac{\partial F_2}{\partial q}, q \right) + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

Or  $F_2$  a précisément été choisie de manière à satisfaire  $K = 0$ , c'est l'équation de Hamilton-Jacobi ! Dès lors les équations du mouvement pour les variables  $P$  et  $Q$  sont triviales :

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \quad \rightarrow \quad P = P_0 = \text{const} \quad \quad \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = 0 \quad \rightarrow \quad Q = Q_0 = \text{const}$$

d) En définissant la fonction génératrice  $F_2(q_i, P_i, t)$  comme  $S(q_i, \alpha_i = P_i, t)$ , on obtient

$$\begin{aligned}
p_r &= \frac{\partial F_2}{\partial r} = \sqrt{2m \left( P_1 - A(r) - \frac{P_3}{r^2} \right)} \\
p_\theta &= \frac{\partial F_2}{\partial \theta} = \eta \sqrt{2m (P_3 - B(\theta)) - \frac{P_2^2}{\sin^2 \theta}} \\
p_\varphi &= \frac{\partial F_2}{\partial \varphi} = P_2 \\
Q_1 &= \frac{\partial F_2}{\partial P_1} = -t + \sqrt{\frac{m}{2}} \int dr \left( P_1 - A(r) - \frac{P_3}{r^2} \right)^{-1/2} \\
Q_2 &= \frac{\partial F_2}{\partial P_2} = \varphi - \eta \int d\theta \frac{P_2}{\sin^2 \theta} \left( 2m (P_3 - B(\theta)) - \frac{P_2^2}{\sin^2 \theta} \right)^{-1/2} \\
Q_3 &= \frac{\partial F_2}{\partial P_3} = -\sqrt{\frac{m}{2}} \int dr \frac{1}{r^2} \left( P_1 - A(r) - \frac{P_3}{r^2} \right)^{-1/2} + m\eta \int d\theta \left( 2m (P_3 - B(\theta)) - \frac{P_2^2}{\sin^2 \theta} \right)^{-1/2}
\end{aligned} \tag{2}$$

Le système est donc résolu ! En effet, d'après les équations de Hamilton  $P_1, P_2, P_3$  et  $Q_1, Q_2, Q_3$  sont constantes et peuvent être calculées à partir des conditions initiales. Ensuite, en inversant la quatrième équation on trouve en principe  $r(t)$ , en inversant la dernière on trouve  $\theta(r)$  et donc en injectant la solution de  $r(t)$  on trouve  $\theta(t) = \theta(r(t))$ . Idem pour la cinquième équation qui donne  $\varphi(\theta)$  et donc  $\varphi(t) = \varphi(\theta(t))$ . Les impulsions sont elles données par les trois premières équations. Dans le cas général, ces équations ne peuvent être inversées analytiquement mais suffisent pour une solution numérique.

Comme prévu, on voit que  $P_2$  est le moment cinétique selon  $z$  et que  $P_1$  est l'énergie mécanique du système :  $H = -\frac{\partial F_2}{\partial t} = P_1$ .

- e) i. Afin d'étudier le potentiel proposé, fixons  $A(r) = \kappa/r^2$  et  $B(\theta) = 0$ . En utilisant les équations (1), les conditions initiales sur  $r, \theta, \varphi$  se traduisent sur les impulsions de la façon suivante :

$$p_r(0) = 0 \quad p_\theta(0) = mr_0^2 \omega \quad p_\varphi(0) = 0$$

En injectant ceci dans les expressions (2) des impulsions ( $p_i$ ) trouvées précédemment et en utilisant que les  $P$  et  $Q$  sont constants, on trouve (quelque soit le signe de  $\eta$ )

$$P_2 = 0 \quad \text{puis} \quad P_3 = \frac{1}{2}mr_0^4\omega^2 \quad \text{et} \quad P_1 = \frac{1}{2}mr_0^2\omega^2 + \frac{\kappa}{r_0^2} = E$$

Notez que  $P_3 > 0$ , ceci sera important pour le point suivant.

- ii. Les domaines de  $r$  et de  $\theta$  sont contraints par les expressions de  $p_r$  et  $p_\theta$ . En effet, celles-ci contiennent des racines, il faut donc s'assurer que leur argument est positif. Dans le cas de  $p_r$  on doit imposer

$$P_1 - A(r) - \frac{P_3}{r^2} = E - \frac{\kappa + P_3}{r^2} = E \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) > 0$$

(où on a utilisé que  $\kappa + P_3 = r_0^2 E$  ; très utile pour simplifier les expressions.) Il y a dès lors deux possibilités : soit  $E > 0$  et donc  $r > r_0$  le système est libre, soit alors  $E < 0$  et le système est lié :  $r < r_0$ . Dans le cas de  $p_\theta$  la racine porte sur  $2mP_3$  qui est toujours positif comme nous l'avons vu au point précédent et donc nous n'avons pas de contrainte sur  $\theta$ .

- iii. Nous pouvons donc maintenant calculer les  $Q_i$ . Il y a trois possibilités, commençons par le cas  $E > 0$  (particule libre). Dans ce cas  $Q_1$  est donné par

$$Q_1 = -t + \sqrt{\frac{m}{2}} \int dr \left( P_1 - \frac{\kappa + P_3}{r^2} \right)^{-1/2} = -t + \sqrt{\frac{m}{2E}} \int dr \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right)^{-1/2} = -t + \sqrt{\frac{m}{2E}} \sqrt{r^2 - r_0^2}$$

En évaluant cette expression en  $t = 0$ , on trouve  $Q_1 = 0$  et donc

$$\boxed{r(t) = \sqrt{r_0^2 + \frac{2E}{m} t^2}} \quad (3)$$

Pour  $Q_2$  nous obtenons immédiatement  $Q_2 = \varphi(t) = 0$  puisque  $P_2$  est nul. Enfin pour  $Q_3$  on a

$$Q_3 = -\sqrt{\frac{m}{2E}} \int \frac{dr}{r^2} \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right)^{-1/2} + m\eta \int d\theta (2mP_3)^{-1/2} = \frac{\eta\theta}{r_0^2\omega} - \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{m}{2E}} \arctan \left( \sqrt{\frac{2E}{m}} \frac{t}{r_0} \right)$$

Pour ce calcul, on a utilisé le changement de variable  $u = \sqrt{r^2 - r_0^2}$  et  $du = \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - r_0^2}}$

$$\int \frac{dr}{r^2} \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right)^{-1/2} = \int \frac{dr}{r} \frac{1}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} = \int \frac{du}{u^2 + r_0^2} = \frac{1}{r_0} \arctan \left( \frac{u}{r_0} \right)$$

En évaluant l'avant-dernière équation en  $t = 0$ , on trouve  $Q_3 = \frac{\eta\pi}{2r_0^2\omega}$  et en substituant l'expression explicite (3) de  $r$  on a :

$$\theta(t) = \frac{\pi}{2} + \eta \sqrt{\frac{m}{2E}} r_0 \omega \arctan \left( \sqrt{\frac{2E}{m}} \frac{t}{r_0} \right)$$

Afin de déterminer  $\eta$ , il suffit de calculer  $\dot{\theta}(0) = \eta\omega$ . Il faut donc  $\eta = +1$  pour satisfaire aux conditions initiales. On a donc finalement

$$\boxed{\theta(t) = \frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{m}{2E}} r_0 \omega \arctan \left( \sqrt{\frac{2E}{m}} \frac{t}{r_0} \right)} \quad (4)$$

Interprétation : l'équation (3) nous dit que quand  $t \rightarrow \infty$  alors  $r(t) \rightarrow \infty$ , la particule part donc à l'infini (état libre). On a aussi par (4)  $\theta(t) \rightarrow \frac{\pi}{2} (1 + \sqrt{\frac{m}{2E}} r_0 \omega)$ , la particule fait un nombre fini de tours autour de l'origine dépendant de  $E, \omega, r_0$ .

Voyons maintenant le cas  $E < 0$  (particule liée). On suit le même cheminement :

$$Q_1 = -t + \sqrt{\frac{m}{-2E}} \int dr \left( \frac{r_0^2}{r^2} - 1 \right)^{-1/2} = -t + \sqrt{\frac{m}{-2E}} \sqrt{r_0^2 - r^2}$$

On trouve que  $r(t)$  est donné par la même formule (3) que dans le cas lié :

$$\boxed{r(t) = \sqrt{r_0^2 + \frac{2E}{m}t^2}} \quad (5)$$

Pour  $Q_2$  nous obtenons toujours  $Q_2 = \varphi(t) = 0$  et enfin pour  $Q_3$  on a avec une technique similaire

$$\begin{aligned} Q_3 &= -\sqrt{\frac{m}{-2E}} \int \frac{dr}{r^2} \left( \frac{r_0^2}{r^2} - 1 \right)^{-1/2} + m\eta \int d\theta (2mP_3)^{-1/2} \\ &= \frac{\eta\theta}{r_0^2\omega} - \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{m}{-2E}} \operatorname{arctanh} \left( \sqrt{\frac{-2E}{m}} \frac{t}{r_0} \right) \end{aligned}$$

En évaluant cette équation en  $t = 0$ , on trouve  $Q_3 = \frac{\eta\pi}{2r_0^2\omega}$  et donc :

$$\theta(t) = \frac{\pi}{2} + \eta \sqrt{\frac{m}{-2E}} r_0 \omega \operatorname{arctanh} \left( \sqrt{\frac{-2E}{m}} \frac{t}{r_0} \right)$$

Afin de déterminer  $\eta$ , on calcule de même  $\dot{\theta}(0) = \eta\omega$ . Il faut donc  $\eta = +1$  pour satisfaire aux conditions initiales. On a donc finalement

$$\boxed{\theta(t) = \frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{m}{-2E}} r_0 \omega \operatorname{arctanh} \left( \sqrt{\frac{-2E}{m}} \frac{t}{r_0} \right)} \quad (6)$$

Interprétation : Dans l'équation (5),  $E$  est négatif donc  $r(t)$  est décroissante. De plus, la particule tombe sur l'origine en un temps fini  $t_1 = \sqrt{-\frac{mr_0^2}{2E}}$ . Dans l'équation (6), on voit que  $\theta(t) \rightarrow \infty$  quand  $t \rightarrow t_1$  : la particule fait un nombre infini de tours autour de l'origine avant de s'écraser dessus en un temps fini ! De plus, ce cas n'est possible que pour un potentiel attractif  $\kappa < 0$ .

Enfin, il nous reste le cas  $E = 0$ . Ceci correspond au cas particulier  $\omega^2 = -\frac{2\kappa}{mr_0^4}$  ( $\kappa$  est négatif). Nous pouvons prendre la limite  $E \rightarrow 0$  dans les équations (3), (4) ou (5), (6). Pour  $r(t)$  on a simplement :

$$\boxed{r(t) = r_0} \quad (7)$$

et pour  $\theta(t)$  après un développement au premier ordre nous avons :

$$\boxed{\theta(t) = \frac{\pi}{2} + \omega t} \quad (8)$$

D'après (7), (8), il s'agit donc d'un mouvement circulaire uniforme.

- f) i. Pour ce potentiel nous avons  $A(r) = 0$  et  $B(\theta) = \lambda \cos \theta$ . Les conditions initiales imposent les mêmes relations sur les  $p_i$  que dans le cas précédent. Traduites pour les  $P_i$ , ces conditions s'écrivent

$$P_1 = \frac{1}{2}mr_0^2\omega^2 + \frac{\lambda}{r_0^2} \cos \theta_0 = E \quad P_2 = 0 \quad P_3 = r_0^2 E$$

- ii. Si  $\cos \theta_0 > 0$ , c'est-à-dire si la charge test se trouve dans le demi-plan supérieur, alors l'énergie  $E > 0$ . Dès lors pour que  $p_r$  soit défini, il faut  $r > r_0$ , ce qui interdit à la masse test de s'écraser sur le dipôle !
- iii. Comme l'énergie est positive,  $r > r_0$  comme nous venons de le voir au point précédent. Voyons si l'on a une condition sur  $\theta$ . Pour que  $p_\theta$  soit défini il faut  $P_3 > \lambda \cos \theta$  ce qui est équivalent à

$$\cos \theta < \frac{r_0^2 E}{\lambda} = \cos \theta_0 + \frac{1}{2\lambda} m r_0^4 \omega^2$$

- iv. Afin de déterminer les trajectoires, il faut calculer les  $Q_i$  puis les inverser. Commençons par  $Q_1$  :

$$Q_1 = -t + \sqrt{\frac{m}{2}} \int dr \left( E - \frac{P_3}{r^2} \right)^{-1/2} = -t + \sqrt{\frac{m}{2E}} \sqrt{r^2 - r_0^2}$$

qui est exactement de la même forme que pour le premier potentiel considéré. Pour  $Q_2$  la solution est triviale :  $Q_2 = \varphi(t) = 0$ . Voyons maintenant  $Q_3$  :

$$Q_3 = -\sqrt{\frac{m}{2E}} \int \frac{dr}{r^2} \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right)^{-1/2} + \eta \sqrt{\frac{m}{2}} \int d\theta (r_0^2 E - \lambda \cos \theta)^{-1/2}$$

Le premier terme est exactement le même que celui considéré avec le premier potentiel proposé. Quant au second, il contient une intégrale elliptique. Afin de l'évaluer autour des points proposés, nous allons développer l'intégrand en série de Taylor. Nous avons le droit de le faire car par continuité de la solution, pour  $t$  proche de 0,  $\theta(t)$  est proche de  $\theta_0$ .

— Pour  $\theta$  autour de 0, approximations  $\cos \theta$  par  $1 - \frac{\theta^2}{2}$ . L'intégrale devient alors

$$\begin{aligned} \int d\theta (r_0^2 E - \lambda \cos \theta)^{-1/2} &\simeq \int d\theta \left( (r_0^2 E - \lambda) + \frac{\lambda \theta^2}{2} \right)^{-1/2} \\ &\simeq (r_0^2 E - \lambda)^{-1/2} \int d\theta \left( 1 + \frac{\lambda \theta^2}{2(r_0^2 E - \lambda)} \right)^{-1/2} \\ &\simeq \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \int d\xi (1 + \xi^2)^{-1/2} \\ &\simeq \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \operatorname{arcsinh} \left( \sqrt{\frac{\lambda}{2(r_0^2 E - \lambda)}} \theta \right) \end{aligned}$$

La constante  $Q_3$  prend alors la forme

$$Q_3 = -\frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{m}{2E}} \arctan \left( \sqrt{\frac{2E}{m}} \frac{t}{r_0} \right) + \eta \sqrt{\frac{m}{\lambda}} \operatorname{arcsinh} \left( \sqrt{\frac{\lambda}{2(r_0^2 E - \lambda)}} \theta \right)$$

On voit donc que le premier terme ( $-\arctan$ ) est une fonction décroissante de  $t$ , il faut donc que le second terme ( $\eta \operatorname{arcsinh}$ ) soit croissant afin que  $Q_3$  reste constant. Si  $\omega > 0$  alors  $\theta(t)$  est croissante,  $\operatorname{arcsinh} \theta$  est croissante et donc  $\eta = +1$ . Dans le cas  $\omega < 0$  on a naturellement la situation inverse :  $\eta = -1$ .

— Pour  $\theta$  autour de  $\pi/2$ ,  $\cos \theta$  est approximé par  $\pi/2 - \theta$ . L'intégrale devient alors

$$\begin{aligned} \int d\theta (r_0^2 E - \lambda \cos \theta)^{-1/2} &\simeq \int d\theta \left( \left( r_0^2 E - \frac{\lambda \pi}{2} \right) + \lambda \theta \right)^{-1/2} \\ &\simeq \left( r_0^2 E - \frac{\lambda \pi}{2} \right)^{1/2} \lambda^{-1} \int d\xi (1 + \xi)^{-1/2} \\ &\simeq \frac{2}{\lambda} \sqrt{r_0^2 E + \lambda \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right)} \end{aligned}$$

La constante  $Q_3$  prend alors la forme

$$Q_3 = -\frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{m}{2E}} \arctan \left( \sqrt{\frac{2E}{m}} \frac{t}{r_0} \right) + \eta \sqrt{2m} \lambda^{-1} \sqrt{r_0^2 E + \lambda \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right)}$$

On en déduit par le même genre de raisonnement que dans le cas précédent que si  $\omega > 0$  alors  $\eta = +1$ , et vice versa.

— Pour  $\theta$  autour de  $\pi$ ,  $\cos \theta$  est approximé par  $-1 + \frac{(\theta - \pi)^2}{2}$ . L'intégrale devient alors

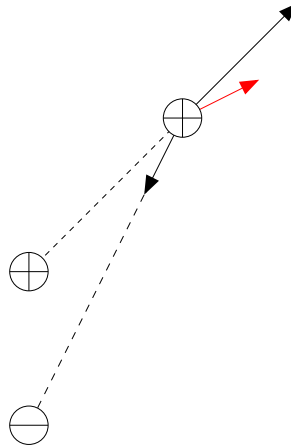
$$\begin{aligned} \int d\theta (r_0^2 E - \lambda \cos \theta)^{-1/2} &\simeq \int d\theta \left( (r_0^2 E + \lambda) - \frac{\lambda(\theta - \pi)^2}{2} \right)^{-1/2} \\ &\simeq \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \arcsin \left( \sqrt{\frac{\lambda}{2(r_0^2 E + \lambda)}} (\theta - \pi) \right) \end{aligned}$$

La constante  $Q_3$  prend alors la forme

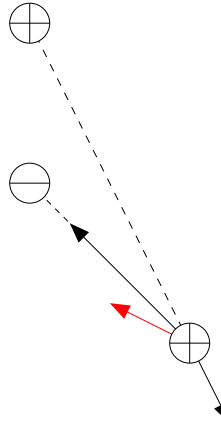
$$Q_3 = -\frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{m}{2E}} \arctan \left( \sqrt{\frac{2E}{m}} \frac{t}{r_0} \right) + \eta \sqrt{\frac{m}{\lambda}} \arcsin \left( \sqrt{\frac{\lambda}{2(r_0^2 E + \lambda)}} (\theta - \pi) \right)$$

En répétant à nouveau le raisonnement fait ci-dessus on trouve que pour  $\omega > 0$ ,  $\eta = +1$  et vice versa.

v. Tous les résultats du point précédent ont été dérivés avec pour hypothèse que l'énergie est positive. On en a déduit que  $r > r_0$ . Nous donnons ici le comportement intuitif de la situation où  $\omega = 0$ . Dans le cas d'un angle proche de zéro, l'énergie est positive et la masse test va donc s'éloigner du dipôle :



Si l'angle est proche de  $\pi$ , l'énergie est négative et la masse test va donc être attirée par le dipôle et aller s'y écraser :



Si l'angle est proche de  $\pi/2$ , l'énergie est quasi-nulle. Si l'angle est plus petit que  $\pi/2$  l'énergie sera positive et donc il sera impossible pour la masse test de rejoindre le dipôle (cf. point (b)), si l'angle est plus grand que  $\pi/2$  alors le système a une énergie négative et est donc lié.

