Mécanique analytique — corrigé 9

Assistants : hugo.chkroun@epfl.ch, brenno.delucca@epfl.ch, garance.durr-legoupil-nicoud@epfl.ch fanny.eustachon@epfl.ch, solange.flatt@epfl.ch, shiling.liang@epfl.ch adelaide.mohr@epfl.ch, alexandra.shelest@epfl.ch, adrian.woyke@epfl.ch

Exercice 1 : Equations de Hamilton

La définition du hamiltonien est :

$$H(q_i, p_i, t) \equiv \sum_i p_i \dot{q}_i(p_i, q_i, t) - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i(p_i, q_i, t), t) \qquad \text{où} \qquad p_i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \tag{1}$$

Il est crucial de noter que le hamiltonien dépend des p et q. Ce sont donc des variables indépendantes. Dans le formalisme de Hamilton, on ne connaît pas a priori la forme des $\dot{q}_i$ et il faut donc les voir comme une fonction de p_i, q_i et t.

Dérivons à présent les équations du mouvement dans le formalisme de Hamilton. Prenons tout d'abord la dérivée du hamiltonien par rapport à p :

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial p_j}\dot{q}_i + \sum_i p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j} - \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_j} = \dot{q}_j \tag{2}$$

En effet, les deux derniers termes s'annulent en vertu de la définition de p. Remarquez que cette équation du mouvement découle directement de la définition du hamiltonien, nous n'avons pas fait intervenir les équations de Lagrange. Voyons si elles interviennent dans la seconde équation. Prenons la dérivée du hamiltonien par rapport à q :

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = \sum_i p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_j} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = -\dot{p}_j \tag{3}$$

Dans le formalisme de Hamilton, $\partial \dot{q}_i / \partial q_j$ n'est pas 0 par définition, parce que seuls p_i et q_i sont des variables indépendantes. Ce sont les premier et troisième termes qui se compensent à cause de la définition des p_i dans (1). Le second terme [1] peut être exprimé comme $-\dot{p}$ grace aux équations d'Euler-Lagrange.

Il est aussi possible de retrouver les équations de Hamilton en considérant le principe de moindre action. Comme nous considérons que p et q sont indépendants nous avons

$$S[\{q(t)\}, \{p(t)\}] = \int dt \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i) \right) \equiv \int dt\, G(q_i, \dot{q}_i, p_i, \dot{p}_i) \tag{4}$$

Pour extrémaliser la fonctionnelle S il suffit d'imposer les équations d'Euler-Lagrange pour p et q :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial G}{\partial q_i} = 0 \quad &\rightarrow \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{p}_i}\right) - \frac{\partial G}{\partial p_i} = 0 \quad &\rightarrow \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{aligned} \tag{5}$$

1. Attention, le second terme est à comprendre comme la dérivée du lagrangien par rapport à son premier argument ! Ce fait est crucial pour pouvoir l'identifier à $-\dot{p}$.

Il est important de bien comprendre quels arguments sont considérés comme étant indépendants dans chaque formalisme. Alors que le lagrangien ne fait intervenir que q et $\dot{q}$ comme variables indépendantes, et que le hamiltonien ne fait intervenir que q et p, la fonction G sous l'intégrale, elle, dépend de quatre arguments indépendants.

Exercice 2 : Transformation canonique et fonction génératrice

a) En utilisant $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$ ainsi que la définition d'une fonction génératrice de type F_1 on trouve que

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = Q_i \\ P_i &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -q_i \end{aligned}$$

et donc

$$\left\{ \begin{array}{rcr} Q_i &=& p_i \\ P_i &=& -q_i \end{array} \right. \tag{6}$$

b) Par définition d'une fonction génératrice de type F_4 on a que

$$q_i = -\frac{\partial F_4(p_j, P_j, t)}{\partial p_i} = -P_i \tag{7}$$

Cette équation est aisément intégrée et l'on obtient

$$F_4(p_j, P_j, t) = \sum_i p_i P_i + f(P_i, t), \tag{8}$$

où $f(P_i, t)$ est une fonction arbitraire de P_i et du temps. La deuxième relation nous donne

$$Q_i = \frac{\partial F_4(p_j, P_j, t)}{\partial P_i} = p_i + \frac{\partial f(P_j, t)}{\partial P_i} = p_i, \tag{9}$$

qui conduit à $f(P_i, t) = c(t)$, et donc

$$F_4(p_j, P_j, t) = \sum_i p_i P_i + c(t), \tag{10}$$

où $c(t)$ est arbitraire.

Exercice 3 : Transformation canonique ?

Dans le corrigé nous allons toujours utiliser la matrice jacobienne et montrer qu'elle est symplectique. Pour mémoire :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} \qquad \& \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

En cours nous avons vu qu'une transformation est canonique si

$$M^T J M = J \tag{12}$$

a) Dans notre cas, on trouve

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda^{-1} \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

d'où l'on obtient

$$M^T J M = 2J \tag{14}$$

Cette transformation n'est donc pas canonique. Mais elle n'en est pas loin, il s'agit simplement d'un problème de normalisation, qui peut facilement être réglé en définissant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P(p,q,t) & = & (p+\lambda q)/\sqrt{2} \\ Q(p,q,t) & = & (q-\lambda^{-1}p)/\sqrt{2} \end{array} \right. \tag{15}$$

b) Définissons des coordonnées polaires dans le plan (p,q) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} r & = & \sqrt{p^2+q^2} \\ \theta & = & \arctan\left(\dfrac{q}{p}\right) \end{array} \right. \tag{16}$$

et choisissons comme nouvelles coordonnées $P = r$, $Q = \theta$. La matrice jacobienne est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{p}{p^2+q^2} & -\dfrac{q}{p^2+q^2} \\ \dfrac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} & \dfrac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} \end{pmatrix}, \tag{17}$$

et l'on trouve

$$M^T J M = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}} J \tag{18}$$

Cette transformation n'est pas canonique. Mais ici il ne s'agit pas d'un simple problème de normalisation.

c) On modifie la transformation ci-dessus afin qu'elle s'écrive

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P & = & \frac{1}{2}(p^2+q^2) \\ Q & = & \arctan\left(\dfrac{q}{p}\right) \end{array} \right. \tag{19}$$

La matrice jacobienne est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{p}{p^2+q^2} & -\dfrac{q}{p^2+q^2} \\ q & p \end{pmatrix}, \tag{20}$$

et cette fois on trouve bien

$$M^T J M = J \tag{21}$$

Cette transformation est donc canonique. A noter que, comme d'habitude en coordonnées polaires, il y a des problèmes à l'origine.

Exercice 4 : Utiliser les transformations canoniques

Cette fois on va utiliser les transformations canoniques pour simplifier un problème. Le hamiltonien est donné par :

$$H = \frac{p^2}{2m}\left(\frac{l}{q}\right)^2 - \lambda q^2$$

a) Les équation de Hamilton sont donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{p} & = & \frac{l^2}{m}\frac{p^2}{q^3} + 2\lambda q \\ \dot{q} & = & \frac{l^2}{m}\frac{p}{q^2} \end{array}\right. \tag{22}$$

b) Les équation ci-dessus semblent difficiles à résoudre. On va essayer d'obtenir un système plus simple par des changements de coordonnées. La nouvelle impulsion est définie de sorte à ce que le terme cinétique soit canonique, càd. :

$$T = \frac{P^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}\left(\frac{l}{q}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad P = l\frac{p}{q} \tag{23}$$

c) Ensuite on aimerait trouver une fonction génératrice de type $F_2(q, P)$ qui définisse une telle transformation [2] :

$$p = \frac{\partial F_2(q,P)}{\partial q} = \frac{Pq}{l} \quad \Rightarrow \quad F_2(q,P) = \frac{Pq^2}{2l} + f(P) \tag{24}$$

$f(P)$ peut être fixé arbitrairement, un choix simple est $f(P) = 0$.

d) Tout est à présent défini et on peut trouver la nouvelle coordonnée

$$Q = \frac{\partial F_2(q,P)}{\partial P} = \frac{q^2}{2l}, \tag{25}$$

et le nouvel hamiltonien

$$K(P,Q) = \frac{P^2}{2m} - 2l\lambda Q. \tag{26}$$

e) Les équations de Hamilton deviennent :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{P} & = & 2\lambda l \\ \dot{Q} & = & \frac{P}{m} \end{array}\right. \tag{27}$$

La première donne :

$$P(t) = 2\lambda l(t - t_0) \tag{28}$$

où t_0 est la première constante à fixer par les conditions initiales. On injecte cette solution dans la deuxième équation et on trouve :

$$Q(t) = \frac{\lambda l}{m}(t - t_0)^2 + Q_0 \tag{29}$$

avec Q_0 la deuxième constante.

2. Rien ne dépendant explicitement du temps on laisse tomber cette possibilité pour cet exercice ; n'étant pas nécessaire, une dépendance du temps n'apporterait rien.

f) Il reste à présent à inverser les coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{lcl} q(t) & = & \pm\sqrt{2lQ(t)} = \pm\sqrt{\dfrac{2\lambda l^2}{m}(t-t_0)^2 + 2lQ_0} \\ p(t) & = & P(t)\dfrac{q(t)}{l} = \pm 2\lambda(t-t_0)\sqrt{\dfrac{2\lambda l^2}{m}(t-t_0)^2 + 2lQ_0} \end{array}\right. \tag{30}$$

Pour vérifier nos calculs on peut injecter ces solutions dans les équations de Hamilton trouvées au début, qui sont effectivement satisfaites.

Exercice 5 : Parachutiste et hélicoptère

a) Le hamiltonien est simplement donné par :

$$H(p,q,t) = \frac{p^2}{2m} + mgq \tag{31}$$

b) On veut changer de référentiel, les nouvelles coordonnées deviennent donc :

$$\left\{\begin{array}{lcl} Q(p,q,t) & = & q - h(t) \\ P(p,q,t) & = & p - m\dot{h}(t) \end{array}\right. \tag{32}$$

c) On se trouve dans un référentiel accéléré en une dimension. Ceci va conduire à un “g effectif” donné par $g + \ddot{h}$. Les équations du mouvement spéculées sont donc :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{P} & = & -m[g + \ddot{h}(t)] \\ \dot{Q} & = & \dfrac{P}{m} \end{array}\right. \tag{33}$$

d) En utilisant la définition de $F_2(P,q,t)$ on a :

$$Q = \frac{\partial F_2(P,q,t)}{\partial P} = q - h(t) \tag{34}$$

et donc :

$$F_2(P,q,t) = P[q - h(t)] + f(q,t) \tag{35}$$

On doit également imposer :

$$p = \frac{\partial F_2(P,q,t)}{\partial q} = P + \frac{\partial f(q,t)}{\partial q} = P + m\dot{h}(t) \tag{36}$$

et donc :

$$f(q,t) = m\dot{h}(t)q + \tilde{f}(t) \tag{37}$$

On a donc défini :

$$F_2(P,q,t) = P[q - h(t)] + m\dot{h}(t)q + \tilde{f}(t) \tag{38}$$

Puisque l’on a trouvé une fonction génératrice qui engendre la transformation, elle est canonique par construction.

e) Le nouvel hamiltonien est donné par :

$$\begin{aligned}
K(P,Q,t) &= H(p(P,Q,t),q(P,Q,t),t) + \left.\frac{\partial F_2(P,q,t)}{\partial t}\right|_{q=q(P,Q,t)} \\
&= \frac{[P+m\dot{h}(t)]^2}{2m} + mg[Q+h(t)] - P\dot{h}(t) + m\ddot{h}(t)[Q+h(t)] + \dot{\tilde{f}}(t) = \\
&= \frac{P^2}{2m} + m[g+\ddot{h}(t)]Q + \underbrace{\tfrac{1}{2}m\dot{h}(t)^2 + m[g+\ddot{h}(t)]h(t) + \dot{\tilde{f}}(t)}_{\text{Indépendant des coordonnées}} \qquad (39)
\end{aligned}$$

Les équations du mouvement que l'on obtient sont bien celles qui sont attendues :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{P} &=& -m[g+\ddot{h}(t)] \\ \dot{Q} &=& \dfrac{P}{m} \end{array}\right. \qquad (40)$$