

Mécanique analytique — corrigé 7

*Assistants : hugo.chkroun@epfl.ch, brenno.delucca@epfl.ch, garance.durr-legoupil-nicoud@epfl.ch
fanny.eustachon@epfl.ch, solange.flatt@epfl.ch, shiling.liang@epfl.ch
adelaide.mohr@epfl.ch, alexandra.shelest@epfl.ch, adrian.woyke@epfl.ch*

Exercice 1 :

- a) Le Lagrangien en coordonnées cartésiennes d'un point matériel se déplaçant dans $\mathbb{R}^3$ en présence du champ de la pesanteur est $\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$. En utilisant les coordonnées sphériques

$$x = R \cos \phi \sin \theta, \quad y = R \sin \phi \sin \theta, \quad z = R \cos \theta \quad (1)$$

avec $R = R(t), \phi = \phi(t), \theta = cste$, le Lagrangien s'écrit comme

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}m(\dot{R}^2 + R^2\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - mgR \cos \theta \quad (2)$$

ϕ étant une variable cyclique, on trouve la conservation du moment cinétique L_z :

$$L_z = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\phi}} = mR^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta \quad (3)$$

La fonction hamiltonienne

$$h = \frac{1}{2}m(\dot{R}^2 + R^2\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + mgR \cos \theta \quad (4)$$

est la deuxième quantité conservée.

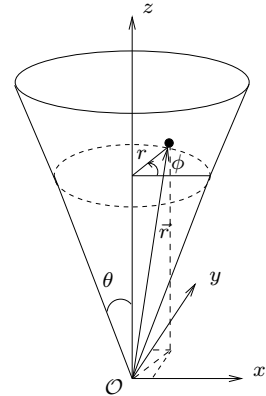
$$\Rightarrow \quad \dot{\phi} = \frac{L_z}{mR^2 \sin^2 \theta} \quad ; \quad \dot{R} = \sqrt{\frac{2h}{m} - 2gR \cos \theta - \frac{L_z^2}{m^2 R^2 \sin^2 \theta}} \quad (5)$$

- b) Pour obtenir ce même Lagrangien en coordonnées cylindriques, on part de

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad z = z \quad (6)$$

pour obtenir $\dot{x} = \dot{r} \cos \phi - r\dot{\phi} \sin \phi$ et $\dot{y} = \dot{r} \sin \phi + r\dot{\phi} \cos \phi$, ce qui mène alors à

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - mgz \quad (7)$$



- c) La contrainte s'écrit $z = r \cot \theta$. Nous choisissons donc $f(r, \phi, z) = z - r \cot \theta$ (mais d'autres choix sont possibles).

d) Les équations du mouvement découlant du Lagrangien $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \lambda f(r, \phi, z)$ sont :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + \lambda \cot \theta \\ 0 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\phi}) \\ 0 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = m\ddot{z} + mg - \lambda \\ 0 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -z + r \cot \theta \end{aligned} \quad (8)$$

Remarquez que l'on n'a pas explicitement calculé l'équation du mouvement pour ϕ puisque le fait que $\mathcal{L}$ soit indépendant de ϕ nous donne tout de suite la grandeur conservée $mr^2 \dot{\phi}$ qui n'est rien d'autre que la composante L_z du moment cinétique. De même, remarquez que λ est traitée comme une variable dynamique comme les autres.

- e) On a déjà parlé ci-dessus de L_z . L'autre grandeur conservée est la fonction hamiltonienne correspondant à l'énergie mécanique $h = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + mgz$ puisque le Lagrangien ne dépend pas explicitement du temps.
- f) En différenciant deux fois par rapport au temps l'équation du mouvement de λ , on trouve $-\ddot{z} + \ddot{r} \cot \theta = 0$ et en éliminant $\ddot{z}$ et $\ddot{r}$ grâce à leur équation du mouvement, on obtient finalement

$$\lambda = \sin \theta \left(mg \sin \theta + \frac{L_z^2 \cos \theta}{mr^3} \right) \quad (9)$$

On a bien entendu que $\lambda = \lambda(t)$ puisque $r = r(t)$ pour une solution des équations du mouvement, mais on a obtenu une expression pour λ qui dépend seulement des grandeurs conservées (L_z) et de la position (r), ce qui signifie encore qu'on peut calculer λ en un point quelconque du cylindre sans connaître les solutions des équations du mouvement.

g)

$$R_r = -\cot \theta \cdot \lambda = -\cos \theta \left(mg \sin \theta + \frac{L_z^2 \cos \theta}{mr^3} \right) \quad (10)$$

$$R_z = \lambda = \sin \theta \left(mg \sin \theta + \frac{L_z^2 \cos \theta}{mr^3} \right) \quad (11)$$

$$R_\phi = 0 \quad (12)$$

Exercice 2 :

Pour obtenir l'Hamiltonien on calcule premièrement les moments conjugués. Si $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$, les moments sont $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$. Les relations obtenues doivent être inversées pour obtenir $\dot{q}_i = \dot{q}_i(p_j, q_j)$ et l'Hamiltonien est donné par :

$$H(q_i, p_i) = \sum_i p_i \dot{q}_i(p_j, q_j) - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i(p_j, q_j)) \quad (13)$$

1. Le moment conjugué à θ est $p_\theta = mR^2\dot{\theta}$, d'où $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2}$. L'Hamiltonien est donc :

$$H(\theta, p_\theta) = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} - \frac{1}{2}mR^2\omega^2 \sin^2 \theta + mgR \cos \theta \quad (14)$$

Les équations de Hamilton sont alors :

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2} \\ \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = mR^2\omega^2 \sin \theta \cos \theta + mgR \sin \theta \end{cases} \quad (15)$$

2. Les moments conjugués sont $p_\theta = mR^2\dot{\theta}$ et $p_\phi = mR^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}$, d'où $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2}$ et $\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mR^2 \sin^2 \theta}$. L'Hamiltonien est donc :

$$H(\theta, \phi, p_\theta, p_\phi) = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_\phi^2}{2mR^2 \sin^2 \theta} + mgR \cos \theta \quad (16)$$

Les équations de Hamilton sont alors :

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2} \\ \dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mR^2 \sin^2 \theta} \\ \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{\cos \theta}{mR^2 \sin^3 \theta} p_\phi^2 + mgR \sin \theta \\ \dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

3. Les moments conjugués sont $p_1 = m\dot{x}_1$ et $p_2 = m\dot{x}_2$. L'Hamiltonien est donc :

$$H(x_1, x_2, p_1, p_2) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2 + (x_1 - x_2)^2) \quad (18)$$

Les équations de Hamilton sont alors :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m} \\ \dot{x}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{m} \\ \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -k(2x_1 - x_2) \\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -k(2x_2 - x_1) \end{cases} \quad (19)$$

4. Les moments conjugués peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} p_u \\ p_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & m_2 l \cos \phi \\ m_2 l \cos \phi & m_2 l^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \quad (20)$$

En inversant la matrice on trouve

$$\dot{u} = \frac{l p_u - \cos \phi p_\phi}{l(m_1 + m_2 \sin^2 \phi)} \quad \text{et} \quad \dot{\phi} = \frac{(m_1 + m_2) p_\phi - m_2 l \cos \phi p_u}{m_2 l^2 (m_1 + m_2 \sin^2 \phi)} \quad (21)$$

L'Hamiltonien est donc :

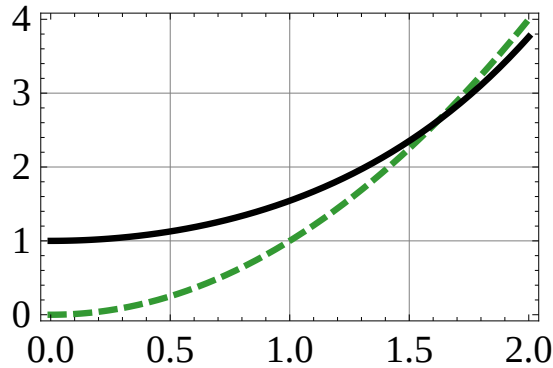
$$H(u, \phi, p_u, p_\phi) = \frac{1}{2(m_1 + m_2 \sin^2 \phi)} \left(p_u^2 + \frac{m_1 + m_2}{m_2 l^2} p_\phi^2 - \frac{2 \cos \phi}{l} p_u p_\phi \right) - m_2 g l \cos \phi \quad (22)$$

Les équations de Hamilton sont alors :

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{\partial H}{\partial p_u} = \frac{l p_u - \cos \phi p_\phi}{l(m_1 + m_2 \sin^2 \phi)} \\ \dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{(m_1 + m_2) p_\phi - m_2 l \cos \phi p_u}{m_2 l^2 (m_1 + m_2 \sin^2 \phi)} \\ \dot{p}_u = -\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \\ \dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -\sin \phi \left(m_2 g l + \frac{(l p_u - \cos \phi p_\phi) ((m_1 + m_2) p_\phi - m_2 l \cos \phi p_u)}{l^2 (m_1 + m_2 \sin^2 \phi)^2} \right) \end{cases} \quad (23)$$

Exercice 3 : Particules sur un anneau

- a) On a trois particules sur un cercle, chacune représente donc un degré de liberté. La paramétrisation la plus naturelle est un angle par particule par rapport à une référence fixe, θ_i .
- b) En noir, $\cosh(x)$ et en vert trait tillé, x^2 :



- c) L'énergie potentielle est la somme des contributions des trois ressorts. La longueur du ressort

entre les masses 1 et 2 (avec $\vec{x}_i = (R \cos \theta_i, R \sin \theta_i)$, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$) est

$$\begin{aligned}
x_{12} &= |\vec{x}_1 - \vec{x}_2| \\
&= R \sqrt{(\cos \theta_1 - \cos \theta_2)^2 + (\sin \theta_1 - \sin \theta_2)^2} \\
&= R \sqrt{\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 - 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2 - 2 \sin \theta_1 \sin \theta_2} \\
&= R \sqrt{2(1 - \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2)} \\
&= R \sqrt{2[1 - \cos(\theta_1 - \theta_2)]} \\
&= 2R \left| \sin \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \right|,
\end{aligned} \tag{24}$$

où nous avons utilisé l'identité trigonométrique suivante :

$$1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}. \tag{25}$$

On obtient donc pour le potentiel (voir figure 1) :

$$V = k \left\{ \cosh \left[2 \sin \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right) \right] + \cosh \left[2 \sin \left(\frac{\theta_3 - \theta_2}{2} \right) \right] + \cosh \left[2 \sin \left(\frac{\theta_1 - \theta_3}{2} \right) \right] \right\} \tag{26}$$

A noter qu'on a pu laisser tomber la valeur absolue vu que $\cosh$ est une fonction paire.

Au point d'équilibre, toutes les dérivées du potentiel doivent s'annuler. Ici :

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = -k \left\{ \sinh \left[2 \sin \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right) \right] \cos \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right) - \sinh \left[2 \sin \left(\frac{\theta_1 - \theta_3}{2} \right) \right] \cos \left(\frac{\theta_1 - \theta_3}{2} \right) \right\} \tag{27}$$

et de même pour les autres. Pour la disposition qui nous intéresse on a (à 2π près) :

$$\theta_2 - \theta_1 = \theta_1 - \theta_3 = \theta_3 - \theta_2 = \frac{2\pi}{3} \tag{28}$$

et donc la dérivée en-dessus s'annule.

D'autres possibilités sont d'annuler le sinus ou le cosinus :

- Deux contre un : $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 + \pi$ et les autres combinaisons équivalentes
- Trois en un : $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$

Pour trouver l'énergie de chaque configuration il faut simplement entrer les angles choisis dans le potentiel. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
E_{\text{équilatéral}} &= 3 \cosh(\sqrt{3}) \cdot k \approx 8.74k \\
E_{\text{deux contre un}} &= [1 + 2 \cosh(2)] \cdot k \approx 8.52k \\
E_{\text{trois en un}} &= 3 \cdot k
\end{aligned}$$

- d) L'analyse dimensionnelle est une méthode simple qui permet en peu de temps de comprendre la dynamique d'un système. Ici on cherche à trouver ω^2 , qui a la dimension $[\text{temps}]^{-2}$. Les variables avec dimension qui interviennent dans notre problème sont :

- $m \sim [\text{masse}]$
- $R \sim [\text{distance}]$
- $k \sim [\text{energie}]$

Pour relier ces différentes grandeur, on peut par exemple repartir de l'énergie cinétique $E = \frac{1}{2}mv^2$, et donc :

$$[\text{energie}] \sim [\text{masse}] \frac{[\text{distance}]^2}{[\text{temps}]^2} \Rightarrow \omega^2 \propto \frac{k}{mR^2} \quad (29)$$

On peut en apprendre encore plus. Le système est invariant sous rotation, càd. si on modifie chaque angle $\theta_i \rightarrow \theta_i + \alpha$ on retombe sur le même système. Ce mouvement ne sera évidemment pas oscillatoire, les particules vont continuer à tourner. La fréquence associée est donc nulle. C'est ce qui est généralement appelé un mode zéro.

On cherche encore deux autres fréquences. Un mode possible est de laisser une particule au repos et les deux autres oscillent en opposition. Mais on pourrait choisir n'importe laquelle des trois particules pour être au repos. Le sous-espace orthogonal au mode zéro est donc dégénéré (mêmes valeurs propres).

Les conclusions a priori sont donc :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0 \\ \omega_2 = \omega_3 &\propto \frac{k}{mR^2} \end{aligned} \quad (30)$$

La suite servira d'une part à confirmer ce résultat, et à trouver le facteur numérique devant les constantes avec dimension et le signe de ω_i^2 (càd. position stable ou instable).

- e) Le potentiel a déjà été trouvé. Pour le terme cinétique on peut utiliser l'expression connue en coordonnées polaires :

$$T = \frac{m}{2} R^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2) \quad (31)$$

donc :

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} R^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2) \\ &\quad - k \left\{ \cosh \left[2 \sin \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right) \right] + \cosh \left[2 \sin \left(\frac{\theta_3 - \theta_2}{2} \right) \right] + \cosh \left[2 \sin \left(\frac{\theta_1 - \theta_3}{2} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

- f) Etant donné que le Lagrangien ne dépend pas explicitement du temps, la fonction hamiltonienne $h(\{\theta_i\}, \{\dot{\theta}_i\}) = T + V$ est conservée et correspond à l'énergie mécanique du système. La seconde quantité conservée est le moment cinétique total. En effet le Lagrangien est invariant sous la transformation $\theta_i \rightarrow \theta_i(s) = \theta_i + s$ où s est une constante. Par le théorème de Noether la quantité conservée associée est

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \frac{\partial \theta_i(s)}{\partial s} = mR^2 \sum_{i=1}^3 \dot{\theta}_i \quad (32)$$

- g) Pour obtenir les petites oscillations autour de la position d'équilibre stable du système, il faut faire le développement limité de l'énergie potentielle $V(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ jusqu'au deuxième ordre autour de θ_i^* , $i = 1, 2, 3$. On développe :

$$V(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = V(\theta_1^*, \theta_2^*, \theta_3^*) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_i \partial \theta_j} (\theta_1^*, \theta_2^*, \theta_3^*) (\theta_i - \theta_i^*) (\theta_j - \theta_j^*) \quad (33)$$

Le terme linéaire est absent comme on l'a vu plus haut.

Les dérivées à calculer sont :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} \right|_{\theta_i = \theta_i^*} &= -\frac{k}{2} \{ \sqrt{3} \sinh(\sqrt{3}) - \cosh(\sqrt{3}) \} \\ \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right|_{\theta_i = \theta_i^*} &= +\frac{k}{4} \{ \sqrt{3} \sinh(\sqrt{3}) - \cosh(\sqrt{3}) \} \end{aligned} \quad (34)$$

et de même pour les autres.

On obtient donc les matrices suivantes :

$$M = mR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (35)$$

$$K = -\gamma^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

avec

$$\gamma^2 = \frac{k}{4} (\sqrt{3} \sinh \sqrt{3} - \cosh \sqrt{3}) \quad (36)$$

le coefficient numérique est positif :

$$\sqrt{3} \sinh \sqrt{3} - \cosh \sqrt{3} = 1.83 \quad (37)$$

- h) On a évidemment $M^{1/2} = \sqrt{m}R\mathbb{1}_3$, et donc :

$$M^{-1/2} K M^{-1/2} = -\frac{\gamma^2}{mR^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (38)$$

Les valeurs propres sont données par :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0 \\ \omega_2^2 = \omega_3^2 &= -3 \frac{\gamma^2}{mR^2} \end{aligned} \quad (39)$$

- i) On a un mode zéro qui n'est pas strictement stable et deux modes instables. Par contre, les argument du point 4 étaient justes, une valeur propre nulle et les deux autres dégénérées.

- j) On a fait l'approximation de petits angles. Mais vu que la position est instable, le moindre déplacement (sauf le long du mode zéro) l'en écartera ; le rayon de validité est donc nul.
- k) Etant proche d'un point d'équilibre, les particules ne vont se mettre à bouger que très lentement. Mais ensuite elles vont se mettre à bouger vite, et converger vers la position d'équilibre stable. Vu qu'elles auront alors une grande énergie cinétique, elles vont repartir et ainsi de suite.

La figure 1 montre le potentiel, avec les points d'équilibre. Les figures 2 et 3 montrent des solutions pour différentes conditions initiales. A noter que 3 correspond à une solution assez particulière qui est elle-même instable ; une petite perturbation et on retombe sur quelque chose du type de l'autre solution.

- l)c) Les points d'équilibre sont les mêmes. Leur énergie, qui correspond à la valeur du potentiel en ces points, change simplement de signe.
- l)g) Le développement est le même qu'avant, modulo un signe devant K .
- l)h) Les fréquences propres sont les mêmes qu'avant, avec un signe :

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_1 &= 0 \\ \tilde{\omega}_2^2 = \tilde{\omega}_3^2 &= 3 \frac{\gamma^2}{mR^2}\end{aligned}\tag{40}$$

Les vecteurs propres, normalisés par la condition $\vec{A}^T \vec{A} = 1$ sont donnés par

$$\vec{A}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{A}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{A}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\tag{41}$$

- l)i) Les pulsations $\tilde{\omega}_{2/3}^2$ étant positives, la position équilatérale est stable. Le fait qu'un mode zéro apparaisse n'influence pas la stabilité bien que la pulsation associée soit nulle.
- l)j) Nous avons fait l'hypothèse de petites variations par rapport à la position d'équilibre, il faut donc imposer $\theta_i - \theta_i^* =: \phi_i \ll 1$. A noter que l'on peut accepter une grande amplitude le long du mode zéro.
- l)k) Trois exemples de trajectoires sont présentés dans les figures 4-6.
- m) La matrice R est donnée par :

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\tag{42}$$

Le Lagrangien exprimés en coordonnées normales se trouve donc en y remplaçant $\vec{Q} = RM^{1/2}\delta\vec{\theta}$. On trouve donc

$$L_{\text{osc}} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 \dot{Q}_i^2 - \omega_2^2 (Q_2^2 + Q_3^2) \right)\tag{43}$$

La conservation de l'énergie est à nouveau manifeste, tandis que la conservation du moment cinétique total se traduit par la cyclicité de la variable Q_1 qui implique que $\dot{Q}_1$ est conservé.

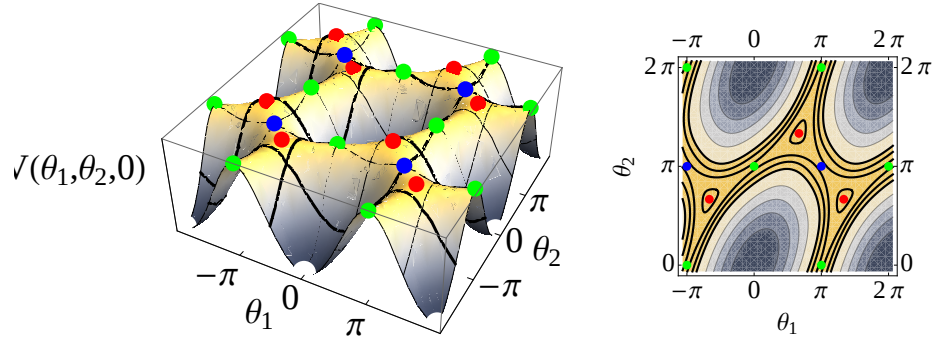


FIGURE 1 – Potentiel pour $\theta_1\theta_2$ avec $\theta_3 = 0$, avec les points d'équilibre : **Blanc** : point d'équilibre stable “trois en un”. **Rouge** : point d'équilibre “équilatéral”, on voit bien qu'il est instable. **Vert** : point d'équilibre “deux contre un”, $13 \leftrightarrow 2$ & $23 \leftrightarrow 1$. **Bleu** : point d'équilibre “deux contre un”, $12 \leftrightarrow 3$.

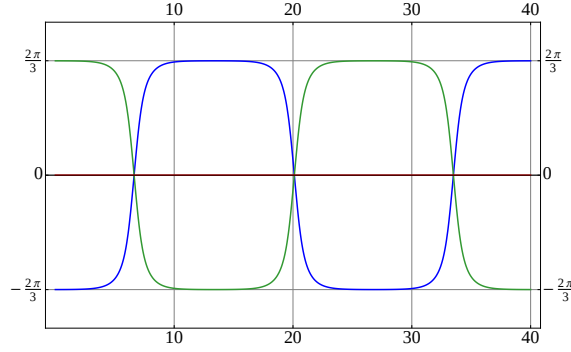


FIGURE 2 – Solution pour $R = k = m = 1$, avec les conditions initiales : $\dot{\theta}_i(0) = 0$, $\theta_1 = -2\pi/3 + 0.001$, $\theta_2(0) = 0$, $\theta_3(0) = 2\pi/3 - 0.001$

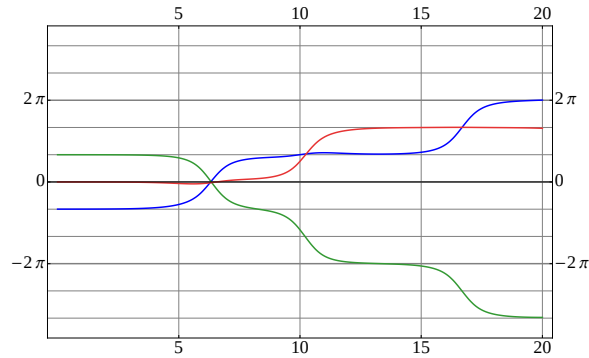


FIGURE 3 – Solution pour $R = k = m = 1$, avec les conditions initiales : $\dot{\theta}_i(0) = 0$, $\theta_1 = -2\pi/3 + 0.003$, $\theta_2(0) = 0$, $\theta_3(0) = 2\pi/3$

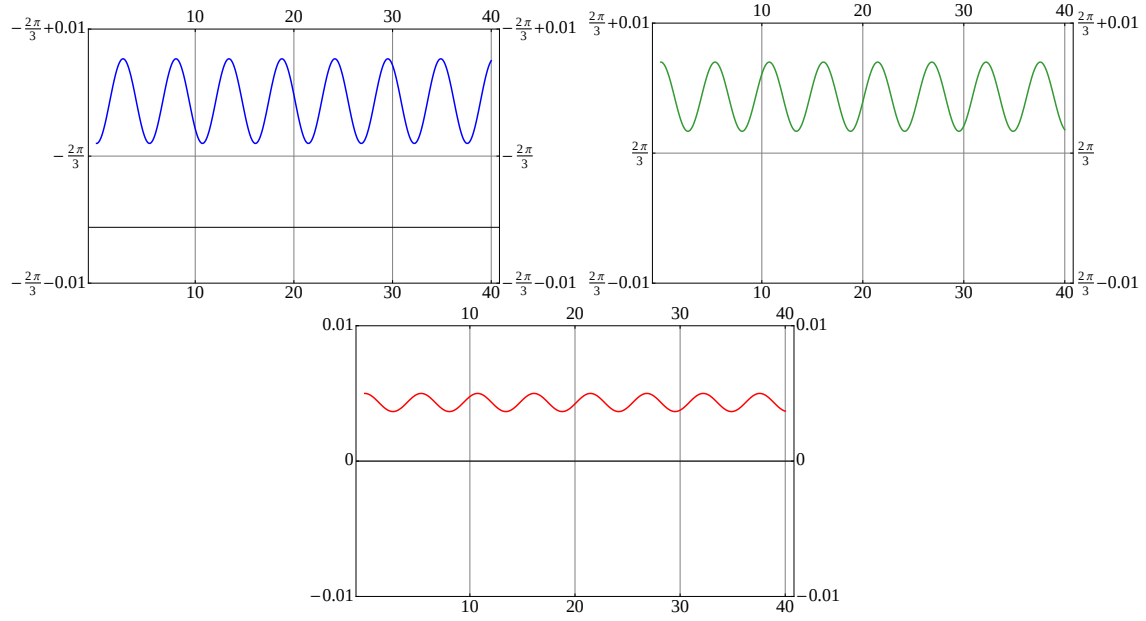


FIGURE 4 – Trajectoires pour les conditions initiales $\dot{\theta}_i = 0$, $\theta_1 = -2\pi/3 + 0.001$, $\theta_2 = 2\pi/3 + 0.007$, $\theta_3 = 0.005$, on observe bien des petites fluctuations stables.

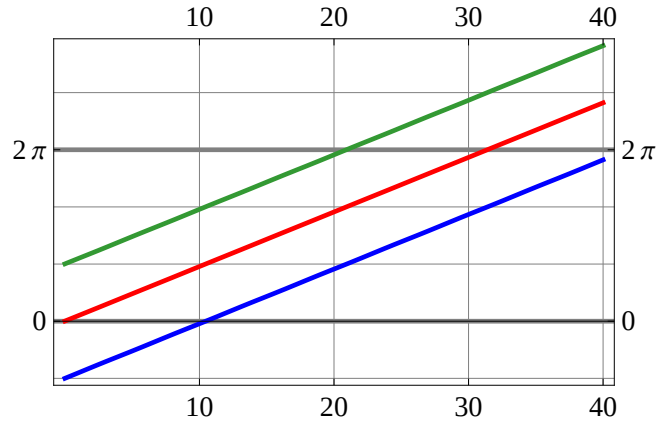


FIGURE 5 – Trajectoires pour les conditions initiales $\dot{\theta}_i = 0.2$, $\theta_1 = -2\pi/3 + 0.001$, $\theta_2 = 2\pi/3 + 0.007$, $\theta_3 = 0.005$, on voit un mouvement de rotation constant. Les oscillations sont toujours présentes, mais on ne les voit pas.

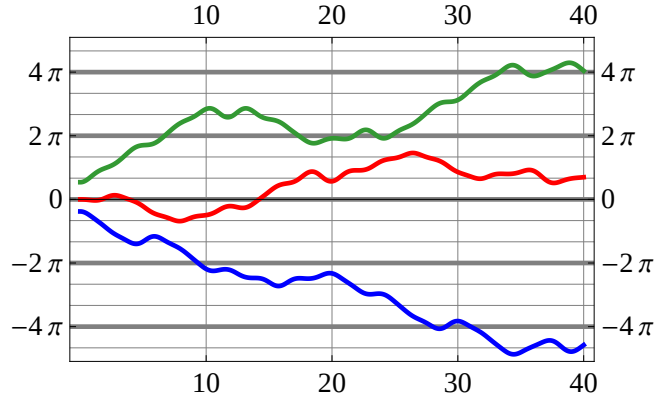


FIGURE 6 – Trajectoires pour les conditions initiales $\dot{\theta}_i = 0$, $\theta_1 = -2\pi/3 + 0.9$, $\theta_2 = 2\pi/3 - 0.4$, $\theta_3 = 0.0$. On voit que l'approximation des petites oscillations n'est plus valable pour d'aussi grandes perturbations.