Mécanique analytique — corrigé 6

Assistants : hugo.chkroun@epfl.ch, brenno.delucca@epfl.ch, garance.durr-legoupil-nicoud@epfl.ch
fanny.eustachon@epfl.ch, solange.flatt@epfl.ch, shiling.liang@epfl.ch
adelaide.mohr@epfl.ch, alexandra.shelest@epfl.ch, adrian.woyke@epfl.ch

Exercice 1 : L'aventurier dans le désert

On choisit notre système de coordonnées de sorte que l'aventurier se trouve en $x = 0$ et l'oasis en $x = L$. De plus, on paramétrise la trajectoire par $z(x)$.

La fonctionnelle à minimiser est donnée par $S = \int n(s)ds$, avec l'élément de chemin $ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z(x)}{\partial x}\right)^2}$. On obtient donc

$$S[z(x)] = \int_0^L dx\, n_0(1 - az)\sqrt{1 + z'^2}. \tag{1}$$

Les conditions aux bords sont données par

$$z(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad z'(0) = \frac{5}{12}. \tag{2}$$

Le Lagrangien est $\mathcal{L}(z, z', x) = (1 - az)\sqrt{1 + z'^2}$ et ne dépend pas de x donc la fonction hamiltonienne est une constante :

$$-\mathcal{H} = (1 - az)\sqrt{1 + z'^2} - (1 - az)\frac{z'^2}{\sqrt{1 + z'^2}} = \frac{1 - az}{\sqrt{1 + z'^2}} = C_0. \tag{3}$$

En introduisant $\xi = \frac{1-az}{a}$, et en inversant la relation on trouve

$$\frac{d\xi}{\sqrt{\frac{\xi^2}{C_1^2} - 1}} = dx, \tag{4}$$

où C_1 est juste une redéfinition de C_0. On en tire

$$\xi(x) = C_1 \cosh\left(\frac{x}{C_1} + C_2\right) \quad \Longrightarrow \quad z(x) = \frac{1}{a} - C_1 \cosh\left(\frac{x}{C_1} + C_2\right). \tag{5}$$

En imposant les conditions aux bords on trouve

$$C_2 = -\text{arcsinh}\left(\frac{5}{12}\right) = -\ln\left(\frac{3}{2}\right) \qquad \text{et} \quad C_1 = \frac{1}{a\cosh C_2} = \frac{12}{13a}, \tag{6}$$

pour finalement avoir la trajectoire donnée par

$$z(x) = \frac{1}{a} - \frac{12}{13a}\cosh\left[\frac{13}{12}a\left(x - \frac{12}{13a}\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right], \tag{7}$$

d'où l'on tire aisément la distance jusqu'à l'oasis, $z(L) = 0$:

$$\boxed{L = \frac{24}{13}\ln\left(\frac{3}{2}\right)\frac{1}{a}}. \tag{8}$$

Exercice 2 : L'Homme Pressé

1. La démonstration dans le plan est également faite dans les notes. Le chemin ds le long d'une courbe quelconque entre A et B dans un plan euclidien s'exprime $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. En prenant la paramétrisation $y = y(x)$ par exemple, on trouve que la longueur L du fil est :

$$L = \int_A^B ds = \int_{x_A}^{x_B} dx \sqrt{1 + y'^2} \tag{9}$$

car en effet $dy = \frac{dy}{dx} dx = y'(x) dx$. Le Lagrangien est donc $\mathcal{L}(y, y'; x)$. On observe que y est une variable cyclique, seulement sa dérivé apparaît, on a donc la conservation du moment associé :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = e \tag{10}$$

Cette équation peut se résoudre :

$$y'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} \quad \text{soit} \quad y' = \text{constante} \tag{11}$$

Si $y'(x)$ est constante, alors y décrit une droite dans le plan xy. Il faut donc aller tout droit quand on est pressé à Genève.

La généralisation à $3D$ est immédiate : il suffit de remarquer que par deux points dans l'espace il passe une infinité de plan, et dans tous le raisonnement précédent tient. Par le calcul, on tient le même raisonnement avec $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dx\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$ et on trouve y' constant et z' constant.

2. Ici, un argument assez convaincant pour ne faire aucun calcul serait de dire : en dépliant le cylindre, on trouve un plan, on résout dans le plan, on trouve que c'est une droite, on replie. Cela va apparaître sous la forme d'une hélice sur la surface du cylindre.

De façon plus pédestre, il faut partir de l'élément de surface $ds = \sqrt{dz^2 + R^2 d\theta^2}$, avec R le rayon du cylindre. Ici on choisit $\theta = \theta(z)$ mais l'autre choix est équivalent.

$$L = \int_A^B ds = \int_{z_A}^{z_B} dz \sqrt{1 + R^2 \theta'^2} \tag{12}$$

Même raisonemment qu'en 1, on constate la cyclicité de θ, donc

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta'} = \frac{R^2 \theta'}{\sqrt{1 + R^2 \theta'^2}} = e \tag{13}$$

ce qui donne :

$$\theta'(z) = \frac{e^2}{R^4 - R^2 e^2} \tag{14}$$

θ varie linéairement avec la hauteur : tant qu'on laisse de côté toute discussion liée au caractère périodique du cylindre, on a donc une hélice.

3. Ici, pas d'intuition, on le fait de façon purement pédestre. On choisit de paramétrer notre chemin par $\varphi(\theta)$. On a $ds = \sqrt{R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta d\varphi^2} = Rd\theta\sqrt{1+\sin^2\theta\varphi'^2(\theta)}$ et donc :

$$L = \int_A^B ds = R\int_{\theta_A}^{\theta_B} d\theta\sqrt{1+\sin^2\theta\varphi'^2} \tag{15}$$

Ici encore, φ est une variable cyclique (pour les autres exercices, on aurait pu utiliser la fonction hamiltonienne, mais pas ici !) :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi'} = \frac{\sin^2\theta\varphi'}{\sqrt{1+\sin^2\theta\varphi'^2}} = e \tag{16}$$

Et ici, la démonstration est finie si l'on utilise l'indice donné ! En effet, en plaçant le point A au sommet de la sphère (ce que l'on peut toujours faire, le système étant invariant par rotation) on voit que cette constante e vaut exactement 0 (par définition de l'angle θ). Donc φ est constant le long d'une géodésique, on se trouve donc sur les méridiens (par analogie avec la Terre). Et les méridiens sont des grands cercles, au sens où ils partagent le même centre que la sphère.

Exercice 3 : La croisière

1. La fonctionnelle décrivant l'énergie consommée par le bateau lors d'un trajet $x(t)$ s'écrit

$$E[x(t)] = \int_{t_{\text{ini}}}^{t_{\text{fin}}} F(x, \dot{x}, t) = \epsilon \int_{19\text{h}00}^{23\text{h}00} (\dot{x} - \omega(t-19)^2)^2 dt \tag{17}$$

2. Si l'on choisit de naviguer à vitesse constante, alors $\dot{x} = v_0 = 5$ km/h afin de réaliser les 20 km en 4 heures. Dès lors, le trajet s'écrit $x_c(t) = v_0(t-19)$. On trouve alors

$$E[x_c(t)] = \epsilon \int_0^4 (v_0 - \omega u^2)^2 du = 240.8\,\epsilon \tag{18}$$

3. Comme la variable x est cyclique, l'impulsion correspondante est conservée :

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 2\epsilon(\dot{x} - \omega(t-19)^2) = \text{const} \quad \to \quad \dot{x} = \bar{v} + \omega(t-19)^2 \tag{19}$$

   où $\bar{v}$ est une constante. La trajectoire est donc donnée par

$$x(t) = A + \bar{v}t + \frac{\omega}{3}(t-19)^3 \tag{20}$$

   En imposant $x(19\text{h}) = 0$ et $x(23\text{h}) = L = 20$ km, on détermine les constantes d'intégration et on trouve finalement la trajectoire optimale

$$x_{\text{opt}}(t) = -3(t-19) + \frac{\omega}{3}(t-19)^3 \tag{21}$$

4. L'énergie consommée pour la trajectoire optimale est donnée par

$$E[x_{\text{opt}}(t)] = \epsilon \int_0^4 (-3 + \omega u^2 - \omega u^2)^2 du = 36\,\epsilon \tag{22}$$

   On a donc bien $E[x_{\text{opt}}(t)] < E[x_c(t)]$.

5. Le graphe de notre trajectoire est le suivant