

Mécanique analytique — corrigé 5

*Assistants : hugo.chkroun@epfl.ch, brenno.delucca@epfl.ch, garance.durr-legoupil-nicoud@epfl.ch
fanny.eustachon@epfl.ch, solange.flatt@epfl.ch, shiling.liang@epfl.ch
adelade.mohr@epfl.ch, alexandra.shelest@epfl.ch, adrian.woyke@epfl.ch*

Exercice 1 : Problème de la surface minimale de révolution

Nous avons la liberté de paramétrer la courbe en fonction de x ou de y . Nous allons tout d'abord faire le choix $(x, y(x))$ afin d'obtenir une variable cyclique puis montrer que l'autre paramétrisation conduit à une autre quantité conservée : la fonction hamiltonienne.

L'aire d'une bande de la surface vaut $2\pi x ds$ où le petit élément de longueur $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. En choisissant $y = y(x)$, on peut écrire $dy = y'(x)dx$, ainsi l'air d'une bande de la surface devient $2\pi x \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$. La surface totale mesure

$$\mathcal{A} = 2\pi \int_{x_{\mathcal{P}}}^{x_{\mathcal{Q}}} dx x \sqrt{1 + y'^2} = 2\pi \int_{x_{\mathcal{P}}}^{x_{\mathcal{Q}}} dx F(x, y, y'),$$

où $F(x, y, y')$ ne dépend en fait pas de y . Cette écriture suppose que $y(x)$ est définie partout sur l'intervalle $(x_{\mathcal{P}}, x_{\mathcal{Q}})$; en particulier, ceci interdit à x d'être une fonction autre que strictement monotone de y sur la trajectoire; il faut sinon subdiviser la trajectoire entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ en morceaux sur lesquels $y(x)$ est définie par segments. Pour que la surface $\mathcal{A}$ ainsi paramétrée soit extrémale, il faut que F satisfasse l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y'} x \sqrt{1 + y'^2} = \text{const} = a$$

On obtient donc en effectuant la dérivée par rapport à y' :

$$xy'(x) = a \sqrt{1 + y'(x)^2} \quad \rightarrow \quad y'(x)^2 (x^2 - a^2) = a^2$$

Pour $a = 0$, ces équations impliquent

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad y(x) = \text{const.}$$

Nous reviendrons sur ces cas de figure plus bas (dans ce premier cas de figure, en particulier, la fonction $y(x)$ et sa dérivée ne sont pas définies). Supposons donc maintenant que $a \neq 0$. Alors les équations ci-dessus n'ont de solution que pour $|x| > |a|$. On peut se restreindre au domaine $x > |a| > 0$ (on a une surface de révolution et x représente ici un rayon). Par conséquent, $y'(x)$ a le signe de a , et il vient

$$y'(x) = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

On effectue le changement de variables $x = |a| \cosh \theta$, avec $\theta > 0$, et l'on trouve

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta} y'(x) = |a| \sinh \theta \frac{a}{|a| \sqrt{\cosh^2 \theta - 1}} = a$$

d'où

$$y(\theta) = a\theta + b \quad \rightarrow \quad x(y) = |a| \cosh\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

On détermine a et b à partir des conditions

$$x_{\mathcal{P}} = x(y_{\mathcal{P}}) = |a| \cosh\left(\frac{y_{\mathcal{P}} - b}{a}\right) \quad x_{\mathcal{Q}} = x(y_{\mathcal{Q}}) = |a| \cosh\left(\frac{y_{\mathcal{Q}} - b}{a}\right)$$

Dans le cas présent, ceci signifie

$$1 = x(0) = |a| \cosh\left(-\frac{b}{a}\right) \quad \cosh(2) = x(2) = |a| \cosh\left(\frac{2-b}{a}\right),$$

ce qui donne une solution possible sous la forme $a = 1$ et $b = 0$. On arrive donc à la courbe solution :

$$x(y) = \cosh(y) \quad \text{soit} \quad y(x) = \operatorname{arccosh}(x)$$

Comme $y'(x) = (x^2 - 1)^{-1/2}$, on obtient l'aire de la surface de révolution :

$$\mathcal{A} = 2\pi \int_1^2 dx \, x \sqrt{1 + y'^2} = 2\pi \int_1^2 dx \, \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\pi}{2}(4 + \sinh(4)) \approx 49$$

Remarque : il resterait à examiner si cette solution est unique, et si, pour toute paire $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$, il existe une solution unique aux équations ci-dessus ; s'il existe plusieurs solutions, il peut s'agir d'extrema locaux ; s'il n'existe pas de solution, la solution véritable du problème (la surface de révolution d'aire minimale) est à chercher en dehors de l'ensemble des surfaces paramétrisables par une fonction $y(x)$. Ces questions sont adressées dans le paragraphe "pour les curieux".

Voyons maintenant que de l'autre paramétrisation découle la conservation de la fonction hamiltonienne. L'intégrale à minimiser s'écrit cette fois-ci comme

$$\mathcal{A} = 2\pi \int_{y_{\mathcal{P}}}^{y_{\mathcal{Q}}} dy \, x \sqrt{1 + x'^2} \equiv 2\pi \int_{y_{\mathcal{P}}}^{y_{\mathcal{Q}}} dy \, A(y, x, x')$$

où la fonction A ne dépend pas explicitement de y . La fonction hamiltonienne est donc conservée :

$$h = \frac{\partial A}{\partial x'} x' - A = -\frac{x}{\sqrt{1 + x'^2}} = \text{const}$$

On fait là aussi l'hypothèse que cette fonction est conservée tout le long de la trajectoire, et pas juste par morceaux le long de la trajectoire là où la paramétrisation $x(y)$ est bien définie. Pour $h = 0$, on trouve $x = 0$, le cas $y = \text{const}$ (x' indéfini) étant exclu par la paramétrisation $x(y)$. Pour $h \neq 0$, on sépare les variables et l'on trouve

$$x' = \frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{x^2 - a^2}{a^2}} \quad \rightarrow \quad y(x) = \int dy = \int dx \sqrt{\frac{a^2}{x^2 - a^2}}$$

où $a^2 = h^2$, qui est exactement la même expression que l'on a trouvée avec la première paramétrisation. On arrive à la même solution

$$x(y) = \cosh(y)$$

Pour les curieux

Ici, la fonctionnelle est l'aire de la surface de révolution. Tout comme une fonction d'une variable peut admettre plusieurs extrema locaux pour diverses positions, la fonctionnelle peut admettre plusieurs extrema locaux pour diverses fonctions ; ces extrema peuvent être égaux ou non, et il peut exister un minimum ou maximum global ou non. Dans le cas présent, il peut exister plusieurs courbes passant par P et Q qui minimisent localement l'aire de révolution, dans le sens où de *petites* modifications de ces courbes font croître l'aire de révolution.

La fonction doit être solution d'une équation différentielle qui a la forme des équations d'Euler-Lagrange. Si cette équation différentielle a plusieurs solutions, il y a plusieurs profils. Ici, la forme générale de la solution est toujours $x(y) = |a| \cosh\left(\frac{y-b}{a}\right)$ mais le couple (a, b) qui satisfait les conditions initiales n'est pas unique. Le système d'équation qui détermine ces deux coefficients est

$$\begin{cases} 1 = |a| \cosh\left(\frac{-b}{a}\right) & \text{rouge} \\ \cosh(2) = |a| \cosh\left(\frac{2-b}{a}\right) & \text{bleu} \end{cases}$$

C'est un système d'équations non-linéaires transcendentales. Aucune chance de le résoudre analytiquement. Une étude graphique ou numérique s'impose. Une telle étude est représentée en figure 1.

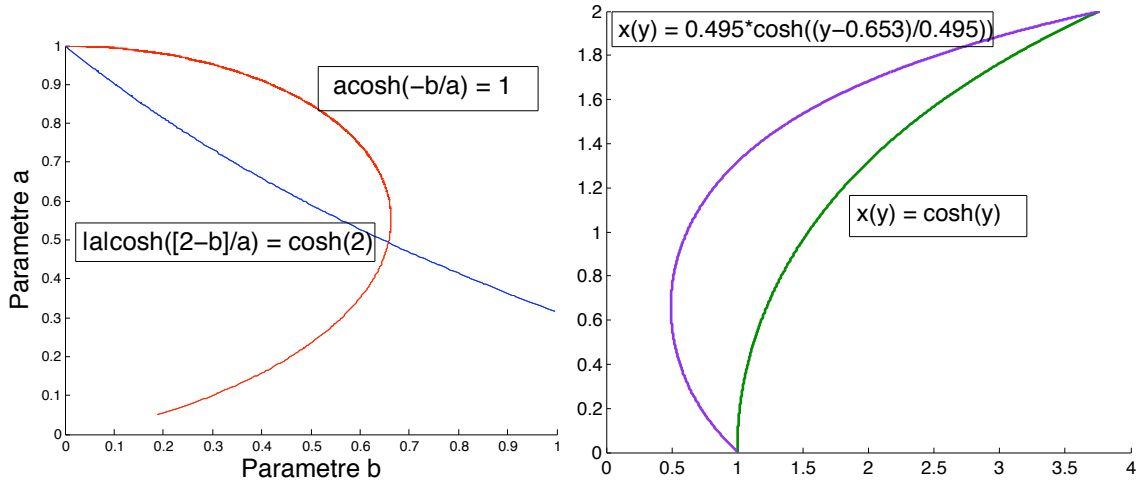


FIGURE 1 – **Gauche** En rouge : les solutions (a, b) qui vérifient la première condition initiale. En bleu, la deuxième. Les intersections vérifient les deux conditions en même temps, donc sont solutions du système. **Droite** Ainsi, les deux courbes sont deux fonctions représentant deux minima locaux distincts de la fonctionnelle.

La figure de gauche ci-dessus montre que la solution $(a, b) = (1, 0)$ de la section précédente n'est donc pas unique. $(a, b) = (0.495, 0.653)$ résout également le système et produit la courbe plus excentrée (voir figure de droite).

On est en présence de deux courbes continues dérivables qui extrêmisent la fonctionnelle $\mathcal{A}$. Il ne peut pas s'agir de maxima : il est toujours possible de déformer la courbe à l'infini pour augmenter

la surface de révolution. Le calcul numérique montre que la courbe $x(y) = \cosh(y)$ (vert) produit une aire inférieure à la courbe violette.

Remarque : si l'on fait l'hypothèse que les courbes sont paramétrisables pour une fonction $y(x)$, on ne trouve comme solution des équations d'Euler que la courbe verte. Il est fortuit qu'il s'agisse ici de l'optimum global recherché. Pour pouvoir déceler l'autre minimum (local) avec une telle paramétrisation, il faudrait autoriser $y(x)$ à être définie "par morceaux" le long de la courbe (et entreprendre une étude d'optimisation vis-à-vis de la forme de chacun de ces deux morceaux ainsi que de la position du point de raccordement...).

Une limite étrange

Il est naturel de se poser la question de savoir pourquoi les conditions initiales sont si spécialement choisies. On s'attend à ce que des courbes qui passent par $P' = (0,0)$ et Q existent également. On se propose alors de poser $P(1 - \epsilon, 0)$ avec $\epsilon \in [0, 1]$. Donc le début de la courbe est progressivement reculé vers l'origine. Le système à résoudre devient alors

$$\begin{cases} 1 - \epsilon = |a| \cosh\left(\frac{-b}{a}\right) & \text{rouge} \\ \cosh(2) = |a| \cosh\left(\frac{2-b}{a}\right) & \text{bleu} \end{cases}$$

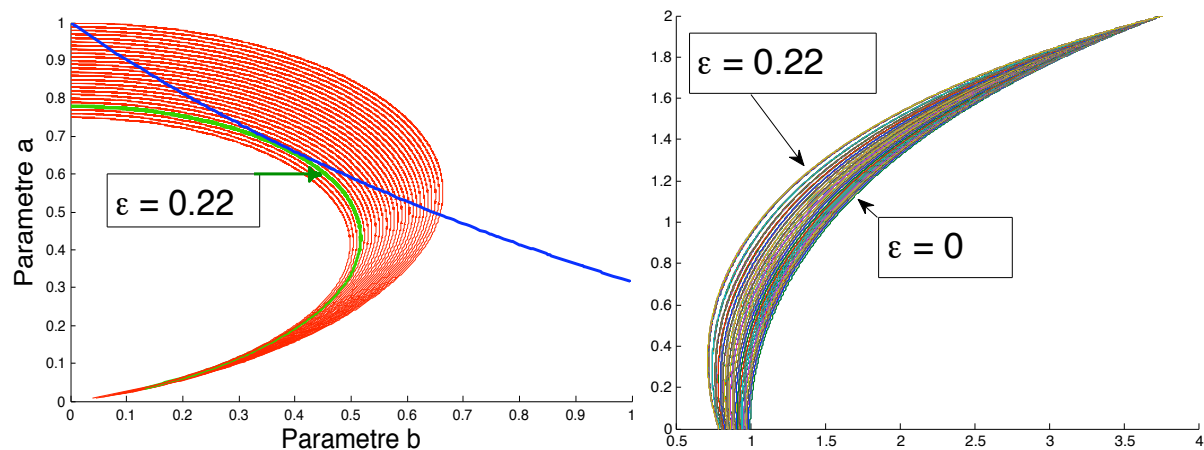


FIGURE 2 – Pour $\epsilon > 0.22$ il n'y a plus de solutions à l'équation ! A droite, pour chaque epsilon, seule la courbe produisant l'aire minimale a été dessinée

Comment comprendre le fait qu'à partir d'un certain ϵ , il n'existe plus de solution au problème ? Si la fonction existe, c'est qu'elle extrême la fonctionnelle. Ici, en particulier, elle est un minimum de la fonctionnelle. Ce comportement s'explique seulement par le fait qu'en reculant peu à peu P , la solution passe d'un minimum à un point selle (en $\epsilon = 0.22$). En-dessus de $\epsilon = 0.22$, le fait qu'il n'existe plus de solution (a,b) au système d'équation témoigne du fait que ce cosh n'est plus un extrémum local de la fonctionnelle ! **Mais il doit exister une courbe !**

Il existe un minimum global du problème que l'on ne peut néanmoins pas trouver avec le formalisme, car il s'agit d'une courbe non-lisse (fonction continue par morceaux). La courbe $[(0,0), (1,0)] \cup [(0,0), (0, \cosh(2))] \cup [(0, \cosh(2)), (2, \cosh(2))]$ (courbe "parasol", formée de deux disques

en $y = 1$ et $y = 2$ et reliés entre eux par une droite le long de l'axe y) est un minimum global du problème. Remarquer que cette courbe n'est paramétrisable ni par $y(x)$ ni par $x(y)$ dans son intégralité, ce pourquoi elle n'apparaît ni dans l'une, ni dans l'autre approche.

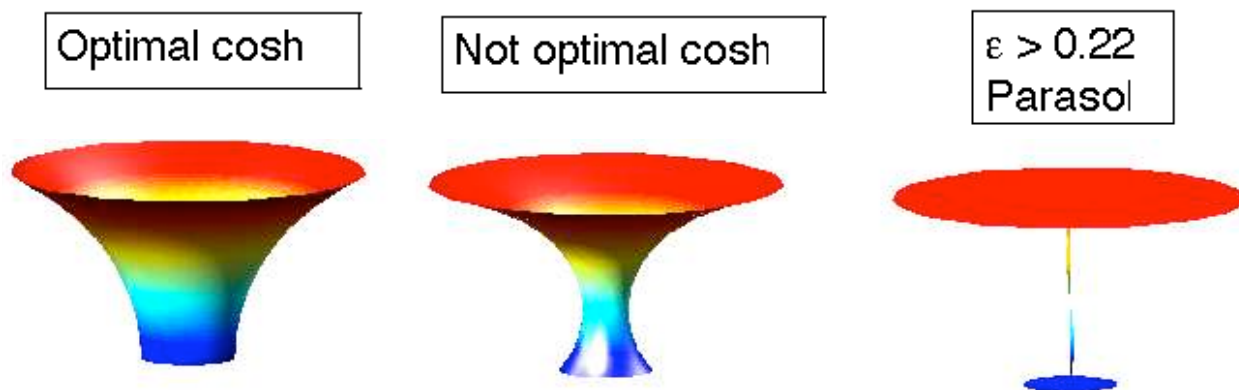


FIGURE 3 – *A gauche, la solution optimale pour $\epsilon = 0$. Au centre, la deuxième solution qui existe en même temps pour $\epsilon = 0$, mais dont l'aire est supérieure. A droite, le minimum global du problème pour $\epsilon > 0.22$, nommé 'parasol'.*

Une analogie frappante avec la physique est la suivante : imaginons deux supports circulaires verticalement espacés, de rayons $\cosh(2)$ et de rayons $1 - \epsilon$. Imaginons une surface de savon qui existe entre ces deux cercles. Par des principes de tension de surface, la surface de savon tendra à vouloir minimiser son aire. Elle adoptera donc automatiquement le cosinus hyperbolique. La fonctionnelle qu'elle minimise est son énergie, qui dans ce cas est exactement $\gamma \mathcal{A}$ qui a des unités d'énergie, avec γ le coefficient tension de surface entre le savon et l'air. Tant que $\epsilon < 0.22$ (donc tant que le support inférieur est assez grand), il existe des minimas locaux de l'énergie, ce qui permet à la surface de savon d'exister. Elle peut donc soit adopter la configuration de gauche (minimum absolu pour $\epsilon = 0$), soit celle de droite (minimum local pour $\epsilon = 0$) dans la figure 1. Dans ce second cas, il s'agit d'un équilibre que l'on pourrait nommer métastable ou stable vis-à-vis de petites perturbations. Cependant, pour $\epsilon < 0.22$ elle ne pourra jamais se stabiliser, et le seul minimum qui reste est la figure de droite, qui correspond à une implosion de la surface de savon (la surface de savon rejoint soudainement l'axe vertical pour minimiser l'aire totale lorsque l'on fait varier ϵ) ! On peut ici employer une analogie avec la physique statistique, où ϵ est un paramètre de contrôle (au même titre que par exemple la température ou un autre paramètre physique) qui induit une transition de phase en $\epsilon = 0.22$.

Exercice 2 : Problème de la brachistochrone

Dans cet exercice, nous cherchons la courbe dans le plan (x, y) minimisant le temps de parcours entre l'origine $\mathcal{O}$ et le point $\mathcal{P}(x_0, y_0)$ dans un champ gravifique constant.

Il nous faut tout d'abord utiliser la conservation de l'énergie pour exprimer la vitesse de la particule en fonction de y . En effet, en prenant $y = 0$ pour niveau de référence du potentiel gravitationnel et en orientant y vers le bas, on a

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgy = 0 \quad \rightarrow \quad v(y) = \sqrt{2gy}$$

La stratégie est maintenant de minimiser le temps de parcours entre $\mathcal{O}$ et $\mathcal{P}$. Le temps nécessaire pour parcourir une longueur $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ est $dt = ds/v(y)$. La fonction à minimiser dépendra donc explicitement de y .

Le point clé ici est de bien comprendre l'analogie avec la minimisation de l'action comme vue en cours. Lorsque l'on définit l'action comme intégrale sur le temps du Lagrangien, c'est en cherchant à minimiser l'action que l'on trouve les équations d'Euler-Lagrange. Ici, on cherche à minimiser le temps de parcours, que l'on écrit comme une intégrale sur une distance (dx ou dy selon le choix) d'une quantité. Chercher à minimiser ce temps de parcours revient à trouver des équations d'Euler-Lagrange pour la quantité intégrée.

Nous devons maintenant choisir quelle paramétrisation utiliser : soit $(x, y(x))$ soit $(x(y), y)$. Nous allons voir que, dans le cadre de cet exercice, les deux choix mènent à une quantité conservée qui nous permettra de simplifier la résolution du système. En effet nous allons voir que dans le premier cas la fonction hamiltonienne est une quantité conservée, alors que dans le second une variable cyclique apparaîtra.

Commençons par le choix $(x(y), y)$. L'élément de ligne s'écrit alors comme $ds = \sqrt{1 + x'^2} dy$ et le temps à minimiser comme

$$T = \int \frac{ds}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{y_0} dy \sqrt{\frac{1 + x'^2}{y}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2g}} \int dy F$$

On voit qu'il s'agit de trouver la courbe réalisant le meilleur compromis entre une courte distance et une grande vitesse. Comme discuté ce choix fait apparaître une variable cyclique qui nous permet de résoudre le système plus facilement :

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right) = \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'} \sqrt{\frac{1 + x'^2}{y}} = \text{const} = a$$

En effectuant la dérivée par rapport à x' , l'équation d'Euler-Lagrange prend la forme

$$\frac{x'}{\sqrt{1 + x'^2}} = a\sqrt{y} \quad \rightarrow \quad x' = \sqrt{\frac{y}{b - y}}$$

avec $b = a^{-2}$. La forme de la courbe est donc donnée par l'intégrale suivante :

$$x(y) = \int dx + c = \int dy \frac{dx}{dy} + c = \int dy \sqrt{\frac{y}{b - y}} + c$$

Voyons maintenant que l'on retrouve le même résultat en utilisant la paramétrisation $(x, y(x))$. L'élément de ligne serait alors $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$ et l'intégrale à minimiser

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_0} dx \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2g}} \int dx G$$

L'équation d'Euler-Lagrange serait alors de la forme

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial G}{\partial y'} \right) = \frac{\partial G}{\partial y}$$

qui n'admet pas de variable cyclique. Le point important est de noter que la fonction G ne dépend pas explicitement de x et donc que la fonction hamiltonienne est conservée :

$$h = \frac{\partial G}{\partial y'} y' - G = -\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = \text{const}$$

En séparant les variables on obtient

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{b-y}{y}} \quad \rightarrow \quad x(y) = \int dx = \int dy \sqrt{\frac{y}{b-y}} + c$$

où $b = h^{-2}$. On a donc bien retrouvé la même équation qu'auparavant. Des deux paramétrisations découle une quantité conservée qui conduit à une simplification du problème. La manifestation de cette quantité conservée est propre au choix de la paramétrisation : pour l'une une variable cyclique, pour l'autre la fonction hamiltonienne. Nous pouvons maintenant résoudre la dernière intégrale afin de trouver la forme explicite du rail.

En faisant le changement de variables $y = b \sin^2 \theta$ on obtient

$$x(\theta) = 2b \int d\theta \sin^2 \theta + c = \frac{b}{2}(2\theta - \sin 2\theta) + c$$

Etant donné que la courbe passe par le point $\mathcal{O}$, la constante c est nulle. En posant $\varphi = 2\theta$ et $R = b/2$, on a la forme paramétrique suivante de la courbe recherchée :

$$\begin{cases} x(\varphi) = R(\varphi - \sin \varphi) \\ y(\varphi) = R(1 - \cos \varphi) \end{cases}$$

qui est l'équation paramétrique d'une cycloïde de rayon R .

Noter qu'en calculant $dt = ds/v$ en utilisant

$$x' = \frac{dx}{dy} = \frac{dx}{d\varphi} \left(\frac{dy}{d\varphi} \right)^{-1}$$

on a

$$dt = \sqrt{\frac{1+x'^2}{2gy}} dy = \frac{1}{\sqrt{2gR}} \sqrt{\frac{2-2\cos\varphi}{\sin^2\varphi}} \frac{1}{\sqrt{1-\cos\varphi}} R \sin\varphi d\varphi = \sqrt{\frac{R}{g}} d\varphi$$

et donc $T = \sqrt{R/g} \varphi_0$ où φ_0 est l'angle final, c'est à dire l'angle pour lequel $x(\varphi_0) = x_0$ et $y(\varphi_0) = y_0$. Il n'y a pas d'expression simple permettant d'exprimer R et φ_0 en fonction de x_0 et y_0 , nous laissons donc R et φ_0 sous forme implicite.

On peut maintenant remarquer une chose a priori surprenante : il existe des situations pour lesquelles la forme idéale du rail passe au dessous de $\mathcal{P}$ avant de remonter. En effet, ce genre de trajectoire est caractérisé par

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{dy}{dx} = \frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi}$$

Il faut donc que $\varphi_0 > \pi$ pour que cela puisse se produire. Cette condition peut être traduite sur la pente entre $\mathcal{O}$ et $\mathcal{P}$. En effet on a

$$\varphi_0 > \pi \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{y_0}{x_0} = \frac{1 - \cos \varphi_0}{\varphi_0 - \sin \varphi_0} < \frac{2}{\pi}$$

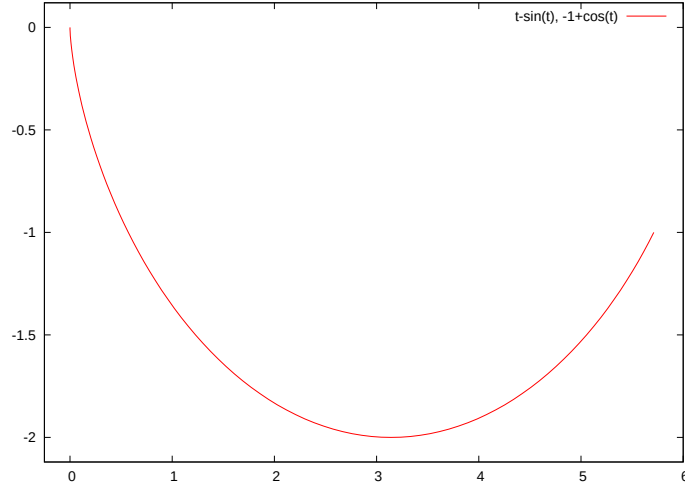


FIGURE 4 – Exemple de rail admettant un minimum : $\varphi_0 = 3\pi/2$. Attention, contrairement au texte du corrigé, y est ici orienté vers le haut.

car la fonction $\varphi_0 \mapsto \frac{1-\cos \varphi_0}{\varphi_0 - \sin \varphi_0}$ est décroissante sur $[0, 2\pi]$.

Exercice 3 : Rotateurs couplés

Le Lagrangien du système est donné par

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1a^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2b^2\dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2}kl^2$$

où l est la distance entre les deux points matériels. Les positions des deux masses sont :

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} a \cos \theta_1 \\ a \sin \theta_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} b \cos \theta_2 \\ b \sin \theta_2 \\ z \end{pmatrix}$$

La distance l est alors :

$$l^2 = \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|^2 = a^2 + b^2 + z^2 - 2ab \cos(\theta_1 - \theta_2).$$

Le Lagrangien ne dépendant pas explicitement du temps, la fonction hamiltonienne est conservée :

$$h = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} \dot{\theta}_i - \mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1a^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2b^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}kl^2$$

On remarque qu'il n'y a pas de variable cyclique, toutefois physiquement, on s'attend à la conservation du moment cinétique total. On peut le trouver en appliquant le théorème de Noether. Le Lagrangien est invariant par rotation, c'est-à-dire sous la transformation

$$\theta_i \rightarrow \theta_i(s) = \theta_i + s$$

La quantité suivante est donc conservée :

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} \frac{\partial \theta_i(s)}{\partial s} = m_1 a^2 \dot{\theta}_1 + m_2 b^2 \dot{\theta}_2$$

Le moment cinétique est donc bien conservé ! On peut aussi le voir en effectuant le changement de variable suivant : au lieu des variables θ_1, θ_2 on considère les variables θ_1 et $\bar{\theta} = \theta_1 - \theta_2$. Le Lagrangien devient :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 a^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 b^2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\bar{\theta}})^2 - kab \cos \bar{\theta}$$

La variable θ_1 est maintenant cyclique et la quantité conservée associée est

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 a^2 \dot{\theta}_1 + m_2 b^2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\bar{\theta}})$$

qui correspond bien au moment cinétique.