

Mécanique analytique — corrigé 4

*Assistants : hugo.chkroun@epfl.ch, brenno.delucca@epfl.ch, garance.durr-legoupil-nicoud@epfl.ch
fanny.eustachon@epfl.ch, solange.flatt@epfl.ch, shiling.liang@epfl.ch
adelade.mohr@epfl.ch, alexandra.shelest@epfl.ch, adrian.woyke@epfl.ch*

Exercice 1 : Deux masses et un ressort

- a) En notant x_1 la position de la particule de masse m_1 et x_2 celle de masse m_2 , le lagrangien du système s'écrit

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k(L - |x_2 - x_1|)^2. \quad (1)$$

Il faut bien prendre en compte les deux positions car aucune contrainte n'impose la position absolue de la première masse ou sa position par rapport à la seconde masse ; on cherche justement cette dépendance.

- b) Le lagrangien ne dépendant pas explicitement du temps, la fonction hamiltonienne

$$h(\{x_i\}, \{\dot{x}_i\}) = T + V \quad (2)$$

est conservée et correspond à l'énergie mécanique du système.

La seconde quantité conservée est l'impulsion totale $P = p_1 + p_2 = m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2$. On peut observer que rien ne contraint le système total à un mouvement particulier selon l'axe x , donc qu'aucune force ne s'applique sur le centre de masse de ce système : d'après les équations de Newton, la quantité de mouvement totale sera donc conservée. Nous pouvons vérifier la conservation de l'impulsion totale $P = p_1 + p_2$ par le calcul suivant. Notant que $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}_i = m\dot{x}_i = p_i$, on a

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= m_1 \frac{d}{dt}\dot{x}_1 + m_2 \frac{d}{dt}\dot{x}_2 = \frac{d}{dt} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_1} + \frac{d}{dt} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_2} \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2} = \frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

A la première ligne, on a utilisé les équations d'Euler-Lagrange ; à la seconde, on a utilisé le fait que $V(x_1 < x_2) = \frac{1}{2}k(L - (x_2 - x_1))^2$ et $V(x_1 > x_2) = \frac{1}{2}k(L - (x_1 - x_2))^2$, d'où la dernière égalité.

Nous verrons plus tard dans le cours que la conservation de la quantité de mouvement est la conséquence du théorème de Noether et correspond à la symétrie de translation du système. En effet, le lagrangien est invariant sous la transformation $x_i \rightarrow x_i(s) = x_i + s$ où s est une constante. La constante de Noether associée est

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i} \frac{\partial x_i(s)}{\partial s} = m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = p_1 + p_2, \quad (4)$$

qui correspond à la conservation de la quantité de mouvement totale du système.

- c) Il est clair que les positions d'équilibre seront les positions pour lesquelles les deux masses sont séparées de L . Voyons le explicitement. Pour trouver les positions d'équilibre du système, on doit annuler la première dérivée du potentiel.

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) &= k(L - |x_2^* - x_1^*|) \frac{x_1^* - x_2^*}{|x_2^* - x_1^*|} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) &= -k(L - |x_2^* - x_1^*|) \frac{x_1^* - x_2^*}{|x_2^* - x_1^*|} = 0\end{aligned}\quad (5)$$

On constate bien que les positions d'équilibre se trouvent en $x_2^* - x_1^* = \pm L$. Choisissons de décrire les oscillations de la position d'équilibre caractérisée par $x_2^* - x_1^* = +L$. Dans ce cas, en notant $x_i = x_i^* + \delta_i$, le potentiel s'écrit

$$V(\delta_1, \delta_2) = \frac{1}{2}k(L - |x_2^* - x_1^* + \delta_2 - \delta_1|)^2 = \frac{1}{2}k(L - |L + \delta_2 - \delta_1|)^2 = \frac{1}{2}k(\delta_2 - \delta_1)^2. \quad (6)$$

La dernière égalité n'est valable que si l'on fait l'hypothèse que $L + \delta_2 - \delta_1 > 0$. Le lagrangien décrivant les petites oscillations autour de la position d'équilibre choisie s'écrit donc

$$\mathcal{L}_{\text{osc}} = \frac{1}{2}m_1\dot{\delta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\delta}_2^2 - \frac{1}{2}k(\delta_2 - \delta_1)^2 = \frac{1}{2}\dot{\vec{\delta}}^T M \dot{\vec{\delta}} - \frac{1}{2}\vec{\delta}^T K \vec{\delta}, \quad (7)$$

où

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad K = k \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

À ce stade, on a un lagrangien qui correspond à deux oscillateurs harmoniques couplés, puisque l'on s'est restreint à des oscillations autour d'une position d'équilibre en enlevant la possibilité au système de se retourner. On a également fait attention à ce que les matrices M et K soient symétriques, définies positives (sinon la méthode de résolution ne marche pas, et il sera impossible de découpler ces deux oscillateurs); en particulier, alors que l'on aurait pu écrire K sous la forme

$$K' = k \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [\text{non symétrique}] \quad (9)$$

on choisit la forme donnée à l'équation (8) pour obtenir une matrice K symétrique. Notez enfin que ce lagrangien est exprimé en fonction des coordonnées perturbées δ_i .

- d) On désire à présent choisir une nouvelle base, $\vec{Q}$, dans laquelle le lagrangien sera celui de deux oscillateurs harmoniques découplés :

$$\mathcal{L}_{\text{osc}} = \frac{1}{2}\dot{\vec{Q}}^T \dot{\vec{Q}} - \frac{1}{2}\vec{Q}^T \Omega \vec{Q} \quad (10)$$

où $\Omega \equiv \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2)$ une matrice diagonale à déterminer. Les modes propres d'oscillations seront l'expression de ces nouveaux vecteurs de base en fonction des anciens.

Afin de trouver cette nouvelle base, posons le changement de variable $\vec{\delta} = \Delta \vec{Q}$, où Δ est une matrice que l'on déterminera ci-dessus. On voit que pour passer de (7) à (10), la matrice de changement de base Δ doit satisfaire deux conditions :

$$\Delta^T M \Delta = \mathbb{1} \quad (11)$$

$$\Delta^T K \Delta = \Omega. \quad (12)$$

Il s'agit là des équations (2.37) et (2.40) des notes de cours typographiées.

Puisque M est symétrique définie positive, on obtient de (11) que $\Delta^T = \Delta^{-1} M^{-1}$. En insérant cette expression dans (12), on obtient une condition plus familière

$$\Delta^{-1} (M^{-1} K) \Delta = \Omega, \quad (13)$$

Nous devons donc diagonaliser la matrice $M^{-1} K$ pour trouver cette nouvelle base. Les matrices de masse et d'interaction de ce système sont données dans l'équation (8) ; on a donc

$$M^{-1} K = \frac{k}{m_1 m_2} \begin{pmatrix} m_2 & -m_2 \\ -m_1 & m_1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Les valeurs propres et vecteurs propres correspondants sont donnés par

$$\omega_0^2 = 0 \quad \vec{A}_0 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \omega_\mu^2 = \frac{k}{\mu} \quad \vec{A}_\mu \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -m_1/m_2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

où μ est la masse réduite définie par

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (16)$$

La normalisation des vecteurs propres est fixée par la condition de M -orthogonalité : $(\vec{A}_i)^T M \vec{A}_i = 1$. On obtient alors

$$\vec{A}_0 = \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{A}_\mu = \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}} \begin{pmatrix} \sqrt{m_2/m_1} \\ -\sqrt{m_1/m_2} \end{pmatrix} \quad (17)$$

La matrice de changement de base Δ permettant l'expression de $\vec{\delta}$ en fonction des coordonnées normales selon $\vec{\delta} = \Delta \vec{Q}$ est donc donnée par

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{m_2/m_1} \\ 1 & -\sqrt{m_1/m_2} \end{pmatrix} \quad (18)$$

En utilisant $\Delta^T M \vec{\delta} = \vec{Q}$, on trouve l'expression explicite des coordonnées normales :

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}} \begin{pmatrix} m_1 \delta_1 + m_2 \delta_2 \\ \sqrt{m_1 m_2} (\delta_1 - \delta_2) \end{pmatrix} \quad (19)$$

e) Le lagrangien décrivant les petites oscillations s'écrit donc en fonction des coordonnées normales comme

$$\mathcal{L}_{\text{osc}} = \frac{1}{2} \left(\dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2 - \omega_\mu^2 Q_2^2 \right) \quad (20)$$

La conservation de la quantité de mouvement s'exprime dans ces coordonnées par le fait que Q_1 est une variable cyclique donc $\dot{Q}_1$ est conservé. D'après l'équation (19), on a $Q_1 \propto m_1\delta_1 + m_2\delta_2$ et l'on retrouve la conservation de la quantité de mouvement totale.

On voit ici que la description en terme de coordonnées normales permet de décomposer le mouvement total en deux mouvements découplés : un mouvement de translation rectiligne uniforme du centre de masse décrit par $\ddot{Q}_1 = 0$ (le système est isolé) et une oscillation relative de m_1 et m_2 décrite par la coordonnée $Q_2 \propto \delta_1 - \delta_2$.

- f) La description que l'on a faite n'est pas en mesure de décrire le croisement des masses m_1 et m_2 . Cette description est donc valide pour des oscillations ayant une amplitude assez faible pour que les masses ne se croisent pas.
- g) Dans le cas $m_2 \gg m_1$, la situation est la même que si m_2 était fixée et l'on s'attend donc simplement à trouver un mouvement harmonique pour m_1 . En effet, la pulsation et les vecteurs propres ont les limites suivantes :

$$\omega_\mu^2 = \frac{k}{\mu} = \frac{k}{m_1} \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \xrightarrow{m_2 \gg m_1} \frac{k}{m_1} \quad \text{et} \quad \vec{A}_\mu \xrightarrow{m_2 \gg m_1} \frac{1}{\sqrt{m_1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

Complément Aux questions d) et e), il est possible de suivre l'approche détaillée dans les notes de cours manuscrites, qui attribue un rôle plus symétrique à la matrice de masse M . Le changement de base des coordonnées généralisées δ_i décrivant les petites oscillations vers les coordonnées normales (décrivant ces mêmes petites oscillations) se fait alors conceptuellement en deux étapes. Un premier changement de base

$$\vec{y} = M^{1/2} \vec{\delta} \quad (22)$$

$$\vec{\delta} = M^{-1/2} \vec{y} \quad (23)$$

est introduit pour absorber l'effet de la matrice de masse M .

Rappel : racine d'une matrice définie positive

On rappelle que la (une) racine de M (symétrique et définie positive) s'obtient par la diagonalisation

$$M = PDP^{-1} = PDP^T,$$

où P est une matrice orthogonale ($PP^T = \mathbb{1} = P^TP$, $P^{-1} = P^T$) et la matrice diagonale D s'écrit $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ avec $d_n > 0$ puisque M est supposée définie positive ; on peut alors poser

$$M^{1/2} = PD^{1/2}P^{-1} = PD^{1/2}P^T$$

avec $D^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n})$, et cette matrice vérifie bien $(M^{1/2})^2 = \mathbb{1}$. Dans le cas particulier du présent exercice, la diagonalisation n'est pas nécessaire car M est déjà sous forme diagonale, et l'on obtient immédiatement $M^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2})$.

Comme $M^{1/2}$ est indépendante du temps et symétrique (ce qui se vérifie facilement sur la base de l'encadré ci-dessus), le lagrangien (7) se réécrit en effet

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{osc}} &= \frac{1}{2} \dot{\vec{\delta}}^T M^{1/2} M^{1/2} \dot{\vec{\delta}} - \frac{1}{2} \vec{\delta}^T K \vec{\delta} = \frac{1}{2} \left(M^{1/2} \dot{\vec{\delta}} \right)^T M^{1/2} \dot{\vec{\delta}} - \frac{1}{2} \vec{\delta}^T K \vec{\delta} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\vec{y}}^T \dot{\vec{y}} - \frac{1}{2} \vec{y}^T M^{-1/2} K M^{-1/2} \vec{y} = \frac{1}{2} \dot{\vec{y}}^T \dot{\vec{y}} - \frac{1}{2} \vec{y}^T \tilde{K} \vec{y},\end{aligned}\quad (24)$$

avec (cf notes manuscrites)

$$\tilde{K} = M^{-1/2} K M^{-1/2}. \quad (25)$$

Cette matrice $\tilde{K}$, réelle et symétrique, est diagonalisable par une transformation orthogonale U ($UU^T = \mathbb{1} = U^T U$) qui fournit le second changement de base cherché :

$$\vec{Q} = U^{-1} \vec{y} = U^T \vec{y} \quad (26)$$

$$\vec{y} = U \vec{Q} \quad (27)$$

La matrice U est construite dans la diagonalisation

$$\tilde{K} = U \Omega U^{-1} = U \Omega U^T \quad (28)$$

$$\Omega = U^{-1} \tilde{K} U = U^T \tilde{K} U, \quad (29)$$

où Ω est une matrice diagonale. Comme $\tilde{K}$ est définie positive (ou semi-définie positive), ses valeurs propres sont strictement positives ou nulles, et l'on écrit $\Omega = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2)$, où $\omega_i \in \mathbb{R}$. Au terme de cette seconde étape, on peut donc réécrire le lagrangien sous la forme

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{osc}} &= \frac{1}{2} \dot{\vec{y}}^T U U^T \dot{\vec{y}} - \frac{1}{2} \vec{y}^T U \Omega U^T \vec{y} = \frac{1}{2} \dot{\vec{Q}}^T \dot{\vec{Q}} - \frac{1}{2} \vec{Q}^T \Omega \vec{Q} \\ &= \sum_i \frac{1}{2} \dot{Q}_i^2 - \frac{1}{2} \omega_i^2 Q_i^2.\end{aligned}\quad (30)$$

En fin de compte, on a effectué le changement de base orthogonal

$$\vec{Q} = (U^{-1} M^{1/2}) \vec{\delta} \quad (31)$$

$$\vec{\delta} = (M^{-1/2} U) \vec{Q}. \quad (32)$$

En introduisant $\Delta = M^{-1/2} U$, on vérifie que le travail de diagonalisation présenté à l'équation (13), à savoir $\Omega = \Delta^{-1} (M^{-1} K) \Delta = U^{-1} M^{1/2} M^{-1} K M^{-1/2} U = U^{-1} (M^{-1/2} K M^{1/2}) U$ est bien équivalent au travail de diagonalisation $\Omega = U^{-1} \tilde{K} U$ de l'équation (29), et qu'il est simplement effectué en partant d'une autre base. La méthode présentée dans ce complément fait simplement intervenir M de façon plus symétrique dans la réécriture du lagrangien et dans la matrice à diagonaliser. Bien que cette présentation symétrique soit plus élégante, il convient de retenir la méthode qui, à vos yeux, est la plus simple à retenir, ou celle qui simplifie au maximum les calculs. Avec cette seconde méthode et dans le cadre du présent exercice, il s'agit de diagonaliser

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{m_2} \end{pmatrix} \quad (33)$$

$$= k \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1} & -\frac{1}{\sqrt{m_1 m_2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{m_1 m_2}} & \frac{1}{m_2} \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Le polynôme caractéristique de $\tilde{K}$ est $P_{\tilde{K}}(\lambda) = \lambda^2 - \lambda k/\mu$, où $\mu^{-1} = m_1^{-1} + m_2^{-1}$, ce qui fournit les valeurs propres $\lambda_0 = \omega_0^2 = 0$ et $\lambda_\mu = \omega_\mu^2 = k/\mu$ comme précédemment. On trouve aussi facilement les vecteurs propres normés associés :

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\mu/m_2} \\ \sqrt{\mu/m_1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \sqrt{\mu/m_1} \\ -\sqrt{\mu/m_2} \end{pmatrix}, \quad (35)$$

d'où la matrice de changement de base

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu/m_2} & \sqrt{\mu/m_1} \\ \sqrt{\mu/m_1} & -\sqrt{\mu/m_2} \end{pmatrix}. \quad (36)$$

On retrouve ainsi aussi

$$\Delta = M^{-1/2}U = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu/(m_1 m_2)} & \sqrt{\mu/m_1^2} \\ \sqrt{\mu/(m_1 m_2)} & -\sqrt{\mu/m_2^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{m_2/m_1} \\ 1 & -\sqrt{m_1/m_2} \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Exercice 2 : Deux masses et trois ressorts

a) Le lagrangien est donné par :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}k(x_1 + x_2)^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - k(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) \quad (38)$$

Il n'y a pas de valeur absolues ici car les positions sont définies par rapport à la longueur au repos des ressorts.

b) Les équations d'Euler-Lagrange qui en découlent sont :

$$m\ddot{x}_1 = -k(2x_1 - x_2) \quad (39)$$

$$m\ddot{x}_2 = -k(2x_2 - x_1) \quad (40)$$

c) On cherche une solution harmonique de la forme :

$$\vec{x}(t) = \vec{A}e^{i\omega t} \quad \text{avec} \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (41)$$

En l'insérant dans les équations du mouvement on obtient :

$$\begin{pmatrix} m\omega^2 - 2k & k \\ k & m\omega^2 - 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (42)$$

Pour que ce système ait des solutions non nulles il faut que le déterminant soit nul (sinon l'on pourrait inverser la matrice et donc obtenir $\vec{A} = 0$), soit :

$$(m\omega^2 - 2k)^2 - k^2 = 0 \quad (43)$$

Les fréquences propres sont donc données par :

$$\omega_- = \sqrt{3k/m} \quad (44)$$

$$\omega_+ = \sqrt{k/m} \quad (45)$$

avec les vecteurs propres associés :

$$\vec{A}_+ \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{A}_- \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (46)$$

Leur normalisation est imposée par $\vec{A}_i^T M \vec{A}_i = 1$ où M est la matrice de masse. On trouve alors qu'il faut multiplier les vecteurs par $1/\sqrt{2m}$. Le fait que les deux vecteurs aient la même normalisation se comprend aisément puisque M est proportionnelle à l'identité.

d) La matrice de transformation est donc donnée par :

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (47)$$

Cela nous conduit finalement aux coordonnées normales :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_+ \\ Q_- \end{pmatrix} \quad (48)$$

Le lagrangien dans les nouvelles coordonnées a bien la forme attendue :

$$L = \frac{1}{2} \left(\dot{Q}_+^2 + \dot{Q}_-^2 - \omega_+^2 Q_+^2 - \omega_-^2 Q_-^2 \right) \quad (49)$$

e) On a

$$Q_+(0) = (x_1(0) + x_2(0))\sqrt{m/2} = a\sqrt{m/2}, \quad (50)$$

$$Q_-(0) = a\sqrt{m/2} \quad (51)$$

$$\dot{Q}_+(0) = \dot{Q}_-(0) = 0. \quad (52)$$

La trajectoire pour les variables Q est donc :

$$Q_+(t) = a\sqrt{m/2} \cos(\omega_+ t) \quad (53)$$

$$Q_-(t) = a\sqrt{m/2} \cos(\omega_- t) \quad (54)$$

Soit pour les variables x :

$$x_1(t) = \frac{a}{2} [\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t)] \quad (55)$$

$$x_2(t) = \frac{a}{2} [\cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t)] \quad (56)$$

f) Le système est quadratique, aucune approximation n'a été faite. La solution est donc valable dans le rayon de validité de la description (aucune collision entre les masses ni avec le mur).

Exercice 3 : Trois masses et deux ressorts

a) Les coordonnées généralisées sont les positions des trois masses sur l'axe x : respectivement x_1 , x_2 et x_3 . Le lagrangien est donné par :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k(L_1 - |x_1 - x_2|)^2 - \frac{1}{2}k(L_2 - |x_2 - x_3|)^2 \quad (57)$$

- b) Le lagrangien ne dépendant pas explicitement du temps, la fonction hamiltonienne $h = T + V$ correspondant à l'énergie mécanique est conservée. La seconde quantité conservée est l'impulsion totale du système, conséquence de l'invariance sous translation du système. Le lagrangien est en effet invariant sous la transformation $x_i \rightarrow x_i(s) = x_i + s$ où s est une constante. La quantité conservée correspondante est donnée par

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i(s)}{\partial s} = m_1(\dot{x}_1 + \dot{x}_3) + m_2 \dot{x}_2 = \sum_{i=1}^3 p_i \quad (58)$$

qui n'est autre que la quantité de mouvement totale du système.

- c) Afin de trouver les positions d'équilibres nous devons minimiser le potentiel par rapport aux trois positions :

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \quad (59)$$

La solution de ce système est bien entendu donnée par $x_1^* - x_2^* = \pm L_1$ et $x_2^* - x_3^* = \pm L_2$. Choisissons maintenant δ_i comme étant la déviation de l'équilibre de la masse i : $x_i = x_i^* + \delta_i$. Dans l'approximation de petits déplacements ($|\delta_1 - \delta_2|/L_1 \ll 1$ et $|\delta_2 - \delta_3|/L_2 \ll 1$), on peut développer le potentiel au deuxième ordre dans les δ_i et l'on trouve aisément :

$$\mathcal{L}_{\text{osc}} = \frac{1}{2}m_1(\dot{\delta}_1^2 + \dot{\delta}_3^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{\delta}_2^2 - \frac{1}{2}k(\delta_1 - \delta_2)^2 - \frac{1}{2}k(\delta_2 - \delta_3)^2 = \frac{1}{2}\dot{\delta}^T M \dot{\delta} - \frac{1}{2}\delta^T K \delta \quad (60)$$

où les matrices M et K sont données par :

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 \end{pmatrix}, \quad K = k \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (61)$$

- d) Afin de trouver les modes d'oscillation, nous devons diagonaliser la matrice $M^{-1}K$:

$$M^{-1}K = k \begin{pmatrix} 1/m_1 & -1/m_1 & 0 \\ -1/m_2 & 2/m_2 & -1/m_2 \\ 0 & -1/m_1 & 1/m_1 \end{pmatrix} \quad (62)$$

dont le polynôme caractéristique est $[\lambda(k/m_1 - \lambda)(\lambda - k/m_1 - 2k/m_2)]$ et les valeurs propres sont donc $\omega_1^2 = 0$, $\omega_2^2 = k/m_1$ et $\omega_3^2 = k/\mu$ où $\mu = m_1 m_2 / (2m_1 + m_2)$. Les vecteurs propres associés sont donnés par

$$\vec{A}_1 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{A}_2 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{A}_3 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -2m_1/m_2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (63)$$

Leur normalisation est imposée par la relation $\vec{A}_i^T M \vec{A}_i = 1$. On trouve alors :

$$\begin{aligned} \vec{A}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2m_1 + m_2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \vec{A}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2m_1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \vec{A}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2m_1(1 + 2m_1/m_2)}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2m_1/m_2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (64)$$

- e) Afin de réécrire le lagrangien en termes de coordonnées normales, nous devons faire le changement de variable suivant : $\delta = \Delta Q$ où Δ est la matrice de changement de base dont les colonnes sont $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$ et $\vec{A}_3$. On trouve alors

$$\mathcal{L}_{\text{osc}} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 \dot{Q}_i^2 - \omega_2^2 Q_2^2 - \omega_3^2 Q_3^2 \right) \quad (65)$$

La conservation de la quantité de mouvement est maintenant traduite par le fait que Q_1 est cyclique et donc que $\dot{Q}_1$ est conservée. En effet, comme $\Delta^T M \delta = Q$ on trouve $\dot{Q}_1 \propto m_1(\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_3) + m_2 \dot{\delta}_2$.

- f) Comme auparavant, la description que nous avons faite se limite aux cas où les masses ne se croisent pas.
- g) La situation où $m_2 \gg m_1$ correspond à fixer la masse m_2 . ω_2 et $\vec{A}_2$ sont indépendants de m_2 , seule ω_3 est affectée :

$$\omega_3^2 = \frac{k}{\mu} \xrightarrow{m_2 \gg m_1} \frac{k}{m_1} \quad \vec{A}_3 = \frac{1}{\sqrt{2m_1(1+2m_1/m_2)}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2m_1/m_2 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{m_2 \gg m_1} \frac{1}{\sqrt{2m_1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (66)$$

On retrouve donc bien le mode optique ($\vec{A}_2$) et le mode acoustique ($\vec{A}_3$), comme on pouvait s'y attendre !

Exercice 4 : Une infinité de masses !

- a) Sans préciser l'ensemble de définition du système pour le moment, on peut tout de même écrire son énergie cinétique de façon formelle :

$$\mathcal{T} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \quad (67)$$

la somme portant sur la totalité des masses du système.

Pour l'énergie potentielle, il faut faire attention à ne pas compter les choses deux fois. La façon la plus simple de procéder est donc d'écrire l'énergie d'un ressort pour chaque masse, et de sommer sur toutes les masses. Pour l'instant, ne nous préoccupons pas trop de ce qui se passe aux bords. Le lagrangien du système est donc

$$\mathcal{L} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 - \sum_i \frac{1}{2} k (L - (x_{i+1} - x_i))^2 \quad (68)$$

- b) En sélectionnant une masse l particulière, on voit qu'il y aura deux termes parmi la somme d'énergies potentielles qui vont contenir x_l . L'équation d'Euler-Lagrange pour cette masse est donc :

$$m \ddot{x}_l = k(x_{l+1} + x_{l-1} - 2x_l) \quad (69)$$

- c) Intuitivement, les points d'équilibres du système sont donnés par les masses toutes séparées de la longueur au repos des ressorts. Puisque, par hypothèse, $x_k > x_{k-1}$, on peut calculer la dérivée première du potentiel pour la masse l .

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_l}(x_i^*) = k(x_{l+1}^* + x_{l-1}^* - 2x_l^*) = 0 \quad (70)$$

Clairement, la distance entre x_{l-1}^* et x_l^* doit être la même qu'entre x_l^* et x_{l+1}^* . On peut donc paramétrer les positions d'équilibre par $x_l = x_l^* + \delta_l = (lL) + \delta_l$, où l est juste une étiquette pour cataloguer la masse, et où l'on a arbitrairement (mais sans perte de généralité) fixé la position de la masse 1 à 0.

Afin de résoudre l'équation (69), on propose l'ansatz harmonique suivant :

$$\delta_l = \Delta e^{i\omega t} e^{iqx_l^*} \quad (71)$$

où Δ est une constante qui correspond à l'amplitude de l'onde. La forme particulière de cet ansatz ne se justifie vraiment qu'en ayant un peu plus de recul sur la question. Essayons toutefois d'obtenir une image plus précise.

On s'intéresse à des solutions de cette forme car elles sont stationnaires (*i.e.* stable dans le temps). C'est-à-dire que si l'on positionne le système dans cet état, il va osciller toujours de cette façon, et sans contrainte extérieure, restera dans cet état.

Dans les exercices précédent, le problème est le même. On a trouvé les modes propres d'oscillations, qui sont des solutions stables du système. Pour le cas des deux masses m_1 autour d'une masse m_2 , on comprend que si les deux masses extérieures sont écartées symétriquement, elles vont osciller indéfiniment autour de ces positions, sans faire bouger la masse du milieu.

Ici, si l'on écarte d'un petit déplacement δ , de façon alternée une masse vers la gauche, une masse vers la droite, on peut voir que les masses vont continuer à osciller de cette façon sans jamais modifier la position globale du système. Sans perturbations extérieures, la chaîne de ressorts infinie pourrait rester dans cet état.

On verra au point 5 précisément quelle est la condition sur le nombre d'onde pour que ces oscillations décrites par l'ansatz (71) soient des modes propres du système.

- d) Si l'on se rappelle la définition du sinus en terme d'exponentielles : $2i \sin(x) = (\exp(ix) - \exp(-ix))$, il reste seulement à substituer l'ansatz (71) dans l'équation du mouvement. On obtient alors :

$$-m\omega^2 = k(e^{iqL} + e^{-iqL} - 2) \quad (72)$$

$$\omega = \pm 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\frac{qL}{2}\right) \quad (73)$$

Cette relation entre fréquence temporelle ω et nombre d'onde q est appelée relation de dispersion.

- e) Pour un système périodique fini (N masses), où $\delta_{N+1} = \delta_1$, notre ansatz impose :

$$\Delta e^{i\omega t} e^{iq(N+1)L} = \Delta e^{i\omega t} e^{iqL} \quad (74)$$

Ce qui implique la relation suivante :

$$e^{iqNL} = 1, \text{ donc : } qNL = n2\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (75)$$

On voit que tous les nombres d'ondes ne sont pas acceptables. Seuls certains modes sont solutions de cet équation, autrement dit seuls certains modes peuvent se propager dans cette chaîne. Cet effet diminue avec l'augmentation de N , puisque la différence entre chaque mode admissible est de plus en plus petite, jusqu'à donner l'impression de continuité que l'on a à notre échelle. En effet, cette description d'une chaîne infinie de ressorts est une bonne approximation d'un matériau métallique cristallin, où tous les atomes sont éloignés d'une distance constante au repos. Les ondes pouvant se propager à l'intérieur sont ce que l'on vient de calculer.

On note que pour $n = N/2$, $q = 2\pi/L$. Il y a donc un déphasage de π entre chaque masse, ce qui correspond au mouvement décrit dans le point 3.

- f) Cette description est évidemment limitée, puisqu'aucune masse ne peut changer de position avec sa voisine. D'autre part, N doit être très grand pour pouvoir négliger complètement les effets de bord. Ceci est une étape souvent utile en physique. Sans les effets de bords, la description est simple (physique du solide, élasticité, etc.) et les intuitions sont justes. Avec les effets de bord, l'intuition disparaît parce que tous les effets que l'on avait cachés sous le tapis deviennent importants (regardez des phénomènes liés aux nanomatériaux par exemple).

Exercice supplémentaire 1 : Le Lagrangien du champ EM

1. Calculons explicitement les champs $\mathbf{E}'$ et $\mathbf{B}'$ après la transformation de jauge.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}' &= -\nabla\phi' - \frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} \\
 &= -\nabla\left(\phi + \frac{\partial\chi}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A} - \nabla\chi) \\
 &= -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial\nabla\chi}{\partial t} + \frac{\partial\nabla\chi}{\partial t} \\
 &= -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \\
 &= \mathbf{E}
 \end{aligned} \tag{76}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}' &= \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} - \nabla\chi) \\
 &= \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \times \nabla\chi = \nabla \times \mathbf{A} \\
 &= \mathbf{B}
 \end{aligned} \tag{77}$$

où dans le calcul de $\mathbf{E}'$ nous avons utilisé le fait que les dérivées spatiales et temporelles commutent. Dans le calcul de $\mathbf{B}'$ nous avons utilisé la propriété de l'opérateur ∇

$$\nabla \times \nabla f = \vec{0}, \tag{78}$$

pour tout f .

2. Il y a (au moins) deux moyens de prouver l'identité vectorielle

$$\mathbf{a} \times [\nabla \times \mathbf{b}] = \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} \tag{79}$$

pour $\mathbf{a}$ un vecteur constant.

Première méthode.

Utilisons l'approche standard qui consiste à calculer explicitement le produit vectoriel :

$$\nabla \times \mathbf{b} = \left(\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z}, \frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x}, \frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y} \right) \quad (80)$$

et calculons son produit vectoriel avec $\mathbf{a}$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times [\nabla \times \mathbf{b}] &= \begin{bmatrix} a_y \left[\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y} \right] - a_z \left[\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x} \right] \\ a_z \left[\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z} \right] - a_x \left[\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y} \right] \\ a_x \left[\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x} \right] - a_y \left[\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z} \right] \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial a_y b_y}{\partial x} + \frac{\partial a_z b_z}{\partial x} \\ \frac{\partial a_z b_z}{\partial y} + \frac{\partial a_x b_x}{\partial y} \\ \frac{\partial a_x b_x}{\partial z} + \frac{\partial a_y b_y}{\partial z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_y \frac{\partial b_x}{\partial y} + a_z \frac{\partial b_x}{\partial z} \\ a_z \frac{\partial b_y}{\partial z} + a_x \frac{\partial b_y}{\partial x} \\ a_x \frac{\partial b_z}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_z}{\partial y} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial a_y b_y}{\partial x} + \frac{\partial a_z b_z}{\partial x} \\ \frac{\partial a_z b_z}{\partial y} + \frac{\partial a_x b_x}{\partial y} \\ \frac{\partial a_x b_x}{\partial z} + \frac{\partial a_y b_y}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial a_x b_x}{\partial x} \\ \frac{\partial a_y b_y}{\partial y} \\ \frac{\partial a_z b_z}{\partial z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial a_x b_x}{\partial x} \\ \frac{\partial a_y b_y}{\partial y} \\ \frac{\partial a_z b_z}{\partial z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_y \frac{\partial b_x}{\partial y} + a_z \frac{\partial b_x}{\partial z} \\ a_z \frac{\partial b_y}{\partial z} + a_x \frac{\partial b_y}{\partial x} \\ a_x \frac{\partial b_z}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_z}{\partial y} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial a_y b_y}{\partial x} + \frac{\partial a_z b_z}{\partial x} + \frac{\partial a_x b_x}{\partial x} \\ \frac{\partial a_z b_z}{\partial y} + \frac{\partial a_x b_x}{\partial y} + \frac{\partial a_y b_y}{\partial y} \\ \frac{\partial a_x b_x}{\partial z} + \frac{\partial a_y b_y}{\partial z} + \frac{\partial a_z b_z}{\partial z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_x}{\partial y} + a_z \frac{\partial b_x}{\partial z} \\ a_y \frac{\partial b_y}{\partial y} + a_z \frac{\partial b_y}{\partial z} + a_x \frac{\partial b_y}{\partial x} \\ a_z \frac{\partial b_z}{\partial z} + a_x \frac{\partial b_z}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_z}{\partial y} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\partial z} \end{bmatrix} - \mathbf{a} \cdot \nabla \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \\ &= \nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Deuxième méthode.

Alternativement, nous pouvons utiliser une notation tensorielle pour exprimer les composantes des produits vectoriels¹ :

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u}|_i = \epsilon_{ijk} v_j u_k, \quad (81)$$

où nous avons explicité la i -ème composante du produit vectoriel $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$. ϵ_{ijk} dénote le tenseur de Levi-Civita en trois dimensions. Ce dernier a les propriétés suivantes : Il est nul à chaque fois que deux indices sont les mêmes, il vaut $+1$ quand les indices ijk sont une permutation paire de (123) et -1 autrement. On démontre également qu'il obéit à la propriété suivante

$$\epsilon_{jik} \epsilon_{jlm} = \delta_{il} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kl} \quad (82)$$

où δ_{ij} dénote le delta de Kroeneker, qui vaut 1 si $i = j$ et zéro autrement. Avec cet outil, nous

1. Cette notation sera utilisée abondamment dans des cours futurs, il est donc utile que vous vous familiarisez avec celle-ci.

pouvons aisément calculer le double produit vectoriel :

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times [\nabla \times \mathbf{b}]|_k &= \epsilon_{ijk} a_i \epsilon_{jlm} \partial_l b_m = -\epsilon_{jik} a_i \epsilon_{jlm} \partial_l b_m \\
&= -(\delta_{il} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kl}) a_i \partial_l b_m \\
&= a_i \partial_k b_i - a_i \partial_i b_k \\
&= \nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b}
\end{aligned} \tag{83}$$

où nous avons utilisé la convention d'Einstein qui consiste à implicitement sommer sur les indices répétés.

3. Si nous écrivons $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ en fonction de $\mathbf{A}$ and ϕ , nous obtenons

$$\mathbf{F} = q \left[-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A} \right]. \tag{84}$$

En utilisant la relation démontrée plus haut, écrivons

$$\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}. \tag{85}$$

En appliquant la règle de dérivation composée, nous avons que

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}. \tag{86}$$

En combinant ces deux résultats, nous obtenons la relation recherchée

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} = m\mathbf{a} &= q \left[-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right] \\
&= q \left[-\nabla \phi - \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right].
\end{aligned} \tag{87}$$

4. Les deux premiers termes des équations d'Euler-Lagrange donnent

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\ddot{x}_i + q \frac{dA_i}{dt}, \tag{88}$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = q \frac{\partial}{\partial x_i} [-\phi + \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}}]. \tag{89}$$

En les combinants, et après manipulations, nous obtenons

$$m\ddot{x}_i = -q \frac{dA_i}{dt} + q \frac{\partial}{\partial x_i} [-\phi + \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}}], \tag{90}$$

qui n'est rien d'autre que l'équation (87) écrite en composants.

5. Appliquons la transformation de jauge au Lagrangien pour obtenir

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - q [\phi' - \mathbf{A}' \cdot \dot{\mathbf{x}}] \\
&= \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - q \left[\phi + \frac{\partial\chi}{\partial t} - (\mathbf{A} - \nabla\chi) \cdot \dot{\mathbf{x}} \right] \\
&= \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - q \left[\phi - \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial\chi}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla\chi \right] \\
&= \mathcal{L} - q \left[\frac{\partial\chi}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla\chi \right] \\
&= \mathcal{L} - \frac{d}{dt} [q\chi] .
\end{aligned} \tag{91}$$

Nous voyons donc que la transformation de jauge sur les champs ne modifie le Lagrangien que par une dérivée totale du temps, et ne modifie donc pas les équations du mouvement.

6. Observons que le Lagrangien ne dépend pas explicitement du temps, la fonction hamiltonienne correspondante sera donc conservée :

$$h(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i} \dot{x}_i - \mathcal{L} \tag{92}$$

$$h(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = m\dot{\mathbf{x}}^2 + q\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + q[\phi - \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}}] = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + q\phi \tag{93}$$

Nous reconnaissons ici l'énergie totale du système qui est bien conservée.

De plus, si les champs ne dépendent pas de la coordonnée z , nous voyons que cette dernière variable est cyclique, i.e.

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} = 0 \tag{94}$$

Nous avons donc la quantité conservée associée $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}}$ qui est une constante du mouvement

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}} = m\dot{z} + qA_z \equiv p_z \tag{95}$$

qui n'est autre que la quantité de mouvement généralisée le long de la direction z . Notons que dans ce cas, dû au terme en $q\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}}$ dans le Lagrangien, le moment $\mathbf{p}$ conjugué à la position n'est pas simplement donnée par $m\mathbf{v}$, mais contient une contribution non-triviale du potentiel vecteur $\mathbf{A}$.