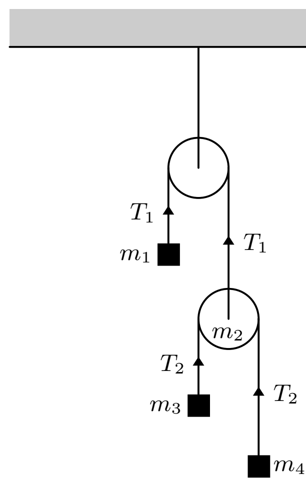
Mécanique analytique — corrigé 2

Assistants : hugo.chkroun@epfl.ch, brenno.delucca@epfl.ch, garance.durr-legoupil-nicoud@epfl.ch
fanny.eustachon@epfl.ch, solange.flatt@epfl.ch, shiling.liang@epfl.ch
adelaide.mohr@epfl.ch, alexandra.shelest@epfl.ch, adrian.woyke@epfl.ch

Exercice 1 : Machine d'Atwood



a) En choisissant un axe vertical z dirigé vers le bas, les équations de Newton prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} m_1\ddot{z}_1 = m_1 g - T_1 \\ m_2\ddot{z}_2 = m_2 g - T_1 + 2T_2 \\ m_3\ddot{z}_3 = m_3 g - T_2 \\ m_4\ddot{z}_4 = m_4 g - T_2 \end{cases} \tag{1}$$

Les conditions d'inextensibilité des deux cordes se traduisent en deux conditions sur les accélérations. En effet, en notant z_0 la hauteur de la plus haute poulie et R_i le rayon de la i-ème poulie on peut exprimer la longueur des cordes comme :

$$\begin{aligned} L_1 &= (z_1 - z_0) + (z_2 - z_0) + \pi R_1 \\ L_2 &= (z_3 - z_2) + (z_4 - z_2) + \pi R_2 \end{aligned} \tag{2}$$

En prenant la seconde dérivée par rapport au temps, on obtient les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 &= -\ddot{z}_2 \equiv a_1 \\ \ddot{z}_3 &\equiv a_3 \\ \ddot{z}_4 &= -2a_1 - a_3 \end{aligned} \tag{3}$$

On obtient alors le système suivant de quatre équations pour les quatre inconnues a_1, a_3, T_1 et T_2 :

$$\begin{cases} m_1 a_1 = m_1 g - T_1 \\ m_2 a_1 = -m_2 g + T_1 - 2T_2 \\ m_3 a_3 = m_3 g - T_2 \\ m_4(2a_1 + a_3) = -m_4 g + T_2 \end{cases} \tag{4}$$

b) Les solutions du système précédent sont

$$\begin{aligned} a_1 &= \left[\frac{(m_1 - m_2)(m_3 + m_4) - 4m_3 m_4}{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4) + 4m_3 m_4}\right] g \\ a_3 &= \left[\frac{(m_1 + m_2)m_3 + (m_2 - 3m_1 + 4m_3)m_4}{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4) + 4m_3 m_4}\right] g \\ T_1 &= \left[\frac{2m_1[4m_3 m_4 + m_2(m_3 + m_4)]}{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4) + 4m_3 m_4}\right] g \\ T_2 &= \left[\frac{4m_1 m_3 m_4}{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4) + 4m_3 m_4}\right] g \end{aligned} \tag{5}$$

c) Vérifions quelques propriétés des solutions :

i) Si $m_2 = m_1$ on a $a_1 < 0$. En d'autres mots, la masse 1 ne peux que monter, comme on s'y attend.

ii) Si $m_1 = m_2 + m_3 + m_4$ on a $a_1 \propto (m_3 - m_4)^2$. On constate donc que si m_3 et m_4 sont différentes, le mouvement autour de la poulie 2 va "alléger" le sous-système formé de m_2, m_3 et m_4. Si, au contraire, $m_3 = m_4$, on trouve $a_1 = a_2 = 0$.

d) Cette description est valable pour une longueur de corde formellement infinie. Il ne peut en aucun cas décrire ce qu'il se passe lorsqu'une des masses viendra percuter un poulie par exemple.

Exercice 2 : Particule sur un cylindre

a) L'équation de Newton s'écrit :

$$m\ddot{\vec{x}} = m\left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta + \ddot{z}\hat{e}_z\right] = -mg\hat{e}_z + S\hat{e}_r \tag{6}$$

Avec la contrainte $r = R =$ constante. Selon $\hat{e}_\theta$ on obtient donc :

$$\ddot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \text{constante} = \frac{L_z}{mR^2} \tag{7}$$

où $L_z = mR^2\dot{\theta}$ est le moment cinétique selon $\hat{e}_z$. En projetant selon $\hat{e}_r$ on n'obtient aucune nouvelle information sur la dynamique du système, par contre on peut en tirer la force de réaction S :

$$S = -\frac{L_z^2}{mR^3} \tag{8}$$

Finalement selon l'axe z :

$$\ddot{z} = -g \quad \Rightarrow \quad z(t) = z_0 + v_{z0}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{9}$$

b) On choisit comme condition initiale une vitesse de norme v_0 formant un angle α avec l'horizontale (dirigée vers le haut). Le moment cinétique selon $\hat{e}_z$ est alors donné par :

$$L_z = mRv_0 \cos(\alpha) \tag{10}$$

Pour parcourir N tours en un temps τ, il faut que $\theta(\tau) - \theta(0) = 2\pi N$, et donc :

$$\tau = 2\pi N \frac{mR^2}{L_z} = \frac{2\pi NR}{v_0 \cos(\alpha)} \tag{11}$$

A présent il faut imposer $z(\tau) - z(0) = 0$, et donc :

$$v_{z0}\tau - \frac{1}{2}g\tau^2 = \tau \left(v_{z0} - \frac{1}{2}g\tau \right) = 0 \tag{12}$$

ce qui nous donne la condition suivante sur v_0 et α :

$$v_0^2 \sin(2\alpha) = 2\pi NgR \tag{13}$$

On note que v_0 est minimal pour $\alpha = \pi/4$.

Complément : le point le plus compliqué de cet exercice est de connaître l'accélération en coordonnées polaires. Pour y arriver on part de :

$$\vec{x} = r\hat{e}_r \tag{14}$$

La vitesse est donc donnée par :

$$\dot{\vec{x}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r \tag{15}$$

Les vecteur $\hat{e}_r$ et $\hat{e}_\theta$ étant donnés par :

$$\hat{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \& \quad \hat{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{16}$$

on trouve :

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \dot{\theta}\,\hat{e}_\theta \tag{17}$$

et donc :

$$\dot{\vec{x}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \tag{18}$$

Pour l'accélération, il faut dériver le résultat ci-dessus encore une fois, de la même façon ($\dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\hat{e_r}$), et le résultat est :

$$\ddot{\vec{x}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta \tag{19}$$

Exercice 3 : Particule sur un rail

Une particule soumise à la pesanteur se déplace dans une cavité. On veut qu'elle ait un mouvement harmonique de fréquence $\omega^2 = g/L$, où L est une échelle de longeur introduite pour satisfaire l'analyse dimensionnelle. Donc

$$\ddot{x} = -\frac{g}{L}x \tag{20}$$

La position de la particule et la force de soutien s'écrivent

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{S} = \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \end{pmatrix} \tag{21}$$

Les équations de Newton s'écrivent dès lors

$$\begin{cases} m\ddot{x} = S_x \\ m\ddot{f}(x) = S_y - mg \end{cases} \tag{22}$$

où l'on a $\dot{f}(x) = f'(x)\dot{x}$ et donc $\ddot{f}(x) = f''(x)\dot{x}^2 + f'(x)\ddot{x}$ où l'on a noté la dérivée de $f(x)$ par rapport à x par $f'(x)$. Il existe toutefois une condition supplémentaire : la force de soutien exercée par le rail est perpendiculaire à ce dernier. Introduisons donc le vecteur unitaire $\hat{t}$ tangent en tout point au rail. Il s'exprime tout simplement comme

$$\hat{t} = \frac{1}{\sqrt{1+f'(x)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix} \tag{23}$$

La condition sur la force de soutien est donc

$$\vec{S} \cdot \hat{t} = 0 \quad \rightarrow \quad S_x + f'(x)S_y = 0 \tag{24}$$

En utilisant la dernière relation pour éliminer la force de soutien des équations de Newton on trouve

$$\ddot{x} = -\frac{gf'(x) + \dot{x}^2 f'(x) f''(x)}{1+f'(x)^2} \tag{25}$$

Afin d'obtenir un mouvement oscillatoire de pulsation $\omega = \sqrt{g/L}$ on devrait donc résoudre

$$\frac{g}{L}x = \frac{gf'(x) + \dot{x}^2 f'(x) f''(x)}{1+f'(x)^2} \tag{26}$$

Le but de l'exercice est de trouver la fonction $f(x)$, nous cherchons donc une équation portant sur f et ses dérivées selon x. Pour nous débarasser de la dépendance de $\dot{x}^2$, nous pouvons utiliser la conservation de l'énergie

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{f}(x)^2\right) + mgf(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\left(1+f'(x)^2\right) + mgf(x) \tag{27}$$

L'équation à résoudre devient alors

$$\frac{g}{L}(1+f'(x)^2)x = gf'(x) + 2\left(\frac{E}{m} - gf(x)\right)\frac{f'(x)f''(x)}{1+f'(x)^2} \tag{28}$$

Nous avons donc finalement obtenu une équation ne contenant plus que x, $f(x)$ et ses dérivées. Cette équation différentielle est trop complexe pour pouvoir reconnaître une solution analytique simple et doit être traitée numériquement. Analytiquement, il est possible de résoudre formellement cette équation par un développement en série et de calculer les premiers coefficients. Pour alléger un tout petit peu l'écriture, introduisons d'abord la fonction sans dimension h telle que

$$f(x) = Lh\left(\frac{x}{L}\right) \tag{29}$$

$$h(u) = \frac{1}{L}f(Lu) \tag{30}$$

Après quelques réarrangement mineurs, on obtient alors

$$0 = h'(u)\left(1 + h'(u)^2\right) - u\left(1 + h'(u)^2\right)^2 + 2\left(\epsilon - h(u)\right)h'(u)h''(u) \tag{31}$$

où $\epsilon = E/(mgL) = E\omega^2/(mg^2)$. Posons ensuite

$$h(u) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (u - u_0)^n \tag{32}$$

Sans perte de généralité, on peut supposer $c_0 = 0$, puisque l'origine des ordonnées est arbitraire et le potentiel de gravitation est défini à une constante près. Sans perte de généralité, on peut également supposer $u_0 = 0$. La symmétrie du mouvement suggère aussi que les tous les coefficients impairs c_{2p+1} sont nuls (ce qui peut se vérifier en les gardant tout d'abord dans le calcul ci-dessous). Développons ensuite tous les termes dans l'équation (31), par exemple

$$\left(1 + h'(u)^2\right)^2 = 1 + 2h'(u)^2 + h'(u)^4 \tag{33}$$

$$= 1 + 8c_2^2 u^2 + 24 c_2 c_3 u^3 + \cdots \tag{34}$$

sans nous soucier ici du rayon de convergence (potentiellement petit) du développement. Nous obtenons alors

$$0 = (-1 + 2c_2 + 8\epsilon c_2^2)u + (-8c_2^2 + 4c_4 + 64\epsilon c_2 c_4)u^3 + \cdots, \tag{35}$$

d'où

$$c_2 = \frac{(-1 + \sqrt{1 + 8\epsilon})}{8\epsilon} > 0 \tag{36}$$

$$c_4 = \frac{2c_2^2}{1 + 16\epsilon c_2} \tag{37}$$

$$\cdots = \cdots$$

Par le biais de ces coefficients, la forme de la tige dépend uniquement de $\epsilon = E\omega^2/(mg^2)$. Or ce paramètre ϵ fait intervenir à la fois la pulsation ω du mouvement harmonique et l'énergie E. A forme de potentiel donnée (c_2, c_4 etc. fixés), la pulsation ω dépend donc de l'énergie E (conservée), c'est-à-dire des conditions initiales. On se souviendra que dans la cas de l'oscillateur harmonique, la pulsation ω et la période d'oscillation $T = 2\pi/\omega$ sont indépendantes de l'énergie. Il est donc impossible de trouver une forme de rail (fixant c_2 etc.) qui donne lieu à un mouvement harmonique de pulsation ω fixée indépendamment des conditions initiales (qui déterminent l'énergie mécanique). Ceci n'exclut pas la possibilité de construire un potentiel qui donne lieu à des oscilations harmoniques pour des conditions initiales bien déterminées (une énergie E bien déterminée).

Complément : Il est possible d'arriver à l'équation du mouvement (25) sans la forme explicite de la force de soutien. En effet, la force de soutien ne travaille pas et l'énergie mécanique E est donc conservée. En dérivant directement l'énergie mécanique (27) par rapport au temps, on obtient

$$0 = m\dot{x}\left[\ddot{x}\left(1 + f'(x)^2\right) + \dot{x}^2 f'(x) f''(x) + g f'(x)\right], \tag{38}$$

d'où découle l'équation (25) pour tout point de la trajectoire où la vitesse est non nulle.

Complément 2 : Il est possible d'utiliser une autre relation pour exprimer $\dot{x}$ dans l'équation (25). Un mouvement oscillatoire selon la direction x implique une forme explicite pour la fonction x : $x(t) = x_0 \sin(\omega t)$. Sans utiliser la conservation de l'énergie mécanique, on peut remplacer le terme $\dot{x}^2$ dans l'équation (25) par $\omega^2(x_0^2 - x^2)$ et l'équation différentielle (25) devient :

$$\omega^2 x = \frac{g f'(x) + \omega^2(x_0^2 - x^2) f'(x) f''(x)}{1 + f'(x)^2} \tag{39}$$

De même, on peut utiliser directement l'expression de l'énergie mécanique (27) et utiliser la relation ci-dessus $\dot{x}^2 = \omega^2(x_0^2 - x^2)$ pour obtenir une troisième équation différentielle :

$$\omega^2(x_0^2 - x^2)\left(1 + f'(x)^2\right) = 2\left(\frac{E}{m} - g f(x)\right) \tag{40}$$

En dérivant l'équation (40) par rapport à x, on obtient l'équation (39) tandis qu'en la réarrangeant

$$\omega^2(x_0^2 - x^2) = 2\frac{\frac{E}{m} - g f(x)}{1 + f'(x)^2} \tag{41}$$

puis en dérivant par rapport à x, on retombe sur l'équation (28). Les trois équations différentielles sont donc équivalentes.

Comme précédemment, on peut développer f en série, ici dans l'équation (39). Les coefficients impairs sont nuls et c_0 peut être choisi arbitrairement (hauteur absolue du rail). Les premiers coefficients sont

$$c_2 = \frac{-g \pm \sqrt{g^2 + 4\omega^4 x_0^2}}{4\omega^2 x_0^2} \tag{42}$$

$$c_4 = \frac{2\omega^2 c_2^2}{g + 8x_0^2\omega^2 c_2} \tag{43}$$

Comme on a fait le développement de f directement, les coefficients ont des unités : c_2 est en $1/\mathrm{m}$ et c_4 est en $1/\mathrm{m}^3$. Les coefficients trouvés sont les mêmes que précédemment, en effet en évaluant l'énergie mécanique à $t = 0$ on obtien la relation entre E et x_0 : $E = \frac{1}{2} m\omega^2 x_0^2$.

Exercice 4 : Gyroscope

1. Commençons par le moment d'inertie par rapport à l'axe passant par le centre du disque et perpendiculaire à ce dernier. Notons la densité massique de surface σ, alors l'élément infinitésimal de masse est $dm = \sigma dS = \sigma r d\varphi dr$. Nous obtenons

$$I_\perp = \int dm\, r^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \sigma r \, d\varphi \, dr = 2\pi\sigma \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}\,. \tag{44}$$

   Pour le moment d'inertie par rapport à un axe parallèle au plan du disque, l'élément de surface est toujours donné par $dS = r d\varphi dr$, mais la distance par rapport à l'axe est maintenant donnée par $r\cos\varphi$. L'intégrale devient

$$I_\parallel = \int dm\, r^2 \cos^2\varphi\,. \tag{45}$$

Nous obtenons

$$I_{\parallel} = \int_0^{2\pi}\int_0^R r^2\cos^2\varphi\sigma r\,d\varphi\,dr = \pi\sigma\frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{4}\,. \tag{46}$$

Le troisième axe principal d'inertie sera perpendiculaire aux deux premiers, il sera donc également dans le plan formé par le disque et son moment d'inertie associé sera identique à $I_{\parallel}$.

2. On appelle O' le centre du disque qui est également le centre de masse du solide. L'axe passant par O le long de $\mathbf{e}_r$ passe également par O' et donc nous avons simplement $I_r = \frac{MR^2}{2}$. Pour l'axe parallèle à $\mathbf{e}_\theta$ passant par O nous devons utiliser le théorème de Huygens-Steiner

$$I_\theta = ML^2 + I_{\parallel} = M\left(L^2 + \frac{R^2}{4}\right)\,, \tag{47}$$

car le centre de masse du solide O' se situe à distance L de l'axe. Nous avons le même résultat le long de $\mathbf{e}_\varphi$: $I_\varphi = I_\theta$. Puisque ces trois directions sont des axes principaux, le tenseur d'inertie sera diagonal dans cette base :

$$I = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & I_\theta & 0 \\ 0 & 0 & I_\varphi \end{bmatrix} \tag{48}$$

3. Le tenseur d'inertie se transforme comme toute matrice associée à un opérateur linéaire. Commençons par écrire les vecteurs de la base $K_a = (\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$ en fonction des vecteurs de base de $K_b = (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \sin\theta\,\cos\varphi\,\mathbf{e}_x + \sin\theta\,\sin\varphi\,\mathbf{e}_y + \cos\theta\,\mathbf{e}_z\,, \\ \mathbf{e}_\theta &= \cos\theta\,\cos\varphi\,\mathbf{e}_x + \cos\theta\,\sin\varphi\,\mathbf{e}_y - \sin\theta\,\mathbf{e}_z\,, \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin\varphi\,\mathbf{e}_x + \cos\varphi\,\mathbf{e}_y\,. \end{aligned} \tag{49}$$

La matrice de changement de base O de la base K_a vers K_b s'écrit donc

$$O = \begin{bmatrix} \sin\theta\,\cos\varphi & \cos\theta\,\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\,\sin\varphi & \cos\theta\,\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix}\,. \tag{50}$$

Puisque les deux bases sont orthonormales, nous avons $O^{-1} = O^T$ et la transformation du tenseur d'inertie $\mathcal{I}'$ s'écrit

$$\mathcal{I}' = O\mathcal{I}O^T\,. \tag{51}$$

4. Pour écrire le vecteur de vitesse angulaire totale, commençons par analyser les divereses rotations autour des axes de notre base. Le vecteur rotation autour d'un axe parallèle à $\mathbf{e}_r$ est simplement donné par $\boldsymbol{\omega}_\psi = \dot\psi\mathbf{e}_r$. La rotation selon θ se fait dans le plan formé par $\mathbf{e}_r$ and $\mathbf{e}_\theta$ et donc autour d'un axe parallèle à $\mathbf{e}_\varphi$. Nous pouvons donc écrire $\boldsymbol{\omega}_\theta = \dot\theta\mathbf{e}_\varphi$. Finalement, nous devons considérer la rotation autour de $\mathbf{e}_z$. Ecrivons le vecteur unitaire $\mathbf{e}_z = \cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta$. Ce vecteur définit la direction de rotation de φ, la vitesse angulaire autour de cet axe est donc donnée par $\boldsymbol{\omega}_\varphi = \dot\varphi\mathbf{e}_z = \dot\varphi\left(\cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta\right)$. Le vecteur de vitesse angulaire totale est finalement donné par la somme vectorielle de ces rotations :

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_\psi + \boldsymbol{\omega}_\theta + \boldsymbol{\omega}_\varphi = \left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)\mathbf{e}_r - \dot\varphi\sin\theta\mathbf{e}_\theta + \dot\theta\mathbf{e}_\varphi\,. \tag{52}$$

5. Nous savons que pour un solide en rotation, son moment cinétique s'écrit
$$\mathbf{L} = \mathcal{I}\boldsymbol{\omega}\,. \tag{53}$$
En replaçant les expressions pour $\mathcal{I}$ et $\boldsymbol{\omega}$ nous obtenons
$$\mathbf{L} = I_r\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)\,\mathbf{e}_r - I_\theta\dot{\varphi}\sin\theta\,\mathbf{e}_\theta + I_\theta\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\varphi \tag{54}$$
où nous avons utilisé le fait que $I_\varphi = I_\theta$ trouvé à la question 2.
6. Pour calculer la dérivée totale de $\mathbf{L}$, il ne faut pas oublier de calculer les dérivées des vecteurs unitaires de la base :
$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} &= \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\mathbf{e}_\varphi\,,\\ \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} &= -\dot{\theta}\mathbf{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\mathbf{e}_\varphi\,,\\ \frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt} &= -\dot{\varphi}\sin\theta\mathbf{e}_r - \dot{\varphi}\cos\theta\mathbf{e}_\theta\,.\end{aligned}$$
La dérivée totale de $\mathbf{L}$ est finalement donnée par
$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{L}}{dt} =& I_r\left[\left(\ddot{\psi} + \ddot{\varphi}\cos\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta\right)\,\mathbf{e}_r + \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)\,\frac{d\mathbf{e}_r}{dt}\right] + \\ &- I_\theta\left[\left(\ddot{\varphi}\sin\theta + \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\,\mathbf{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt}\right] + \\ &+ I_\theta\left[\ddot{\theta}\,\mathbf{e}_\varphi + \dot{\theta}\,\frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt}\right] = \\ =& I_r\left(\ddot{\psi} + \ddot{\varphi}\cos\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta\right)\,\mathbf{e}_r + \\ &+ \left(I_r\dot{\theta}\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right) - I_\theta\left(\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\right)\mathbf{e}_\theta + \\ &+ \left(I_\theta\left(\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta\right) + I_r\dot{\varphi}\sin\theta\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)\right)\mathbf{e}_\varphi\,.\end{aligned} \tag{55}$$
Pour appliquer le théorème du moment cinétique, il nous faut calculer tous les moments de forces externes qui agissent sur le gyroscope. Dans ce cas, nous voyons que seul le poids crée un moment de force, qui s'écrit
$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{l_{cm}} \times M\mathbf{g} = LMg\sin\theta\,\mathbf{e}_\varphi \tag{56}$$
Nous avons maintenant tous les ingrédients pour dériver les équations du mouvement à travers le théorème du moment cinétique
$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}\,. \tag{57}$$
7. Si θ est constant, les équations du mouvement deviennent
$$\begin{aligned}&\ddot{\psi} + \ddot{\varphi}\cos\theta = 0\\ &\ddot{\varphi}\sin\theta = 0\\ &- I_\theta\dot{\varphi}^2\cos\theta + I_r\dot{\varphi}\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right) = LMg\,.\end{aligned} \tag{58}$$

Des deux premières équations, nous pouvons déduire $\ddot{\varphi} = \ddot{\psi} = 0$ et de la troisième

$$\dot{\psi} = \frac{LMg + (I_\theta - I_r)\,\dot{\varphi}^2 \cos\theta}{I_r \dot{\varphi}} \,. \tag{59}$$

Nous voyons donc que pour $\theta = \pi/2$, le gyroscope ne tombe pas si $\dot{\psi} = \frac{LMg}{I_r \dot{\varphi}}$.

Petit complément

Les équations 55 et 57 peuvent être utilisées pour décrire un vaste nombre de situations physiques. Par exemple, si $\dot{\varphi} = \dot{\psi} = 0$, mais $\dot{\theta} \neq 0$, en utilisant l'équation pour la composante $\mathbf{e}_\varphi$ nous retrouvons l'équations pour un pendule simple

$$\ddot{\beta} = -K \sin\beta \,, \tag{60}$$

où l'on a défini $\beta = \pi - \theta$ et $K = \frac{LMg}{I_\theta}$.

Si au contraire $\dot{\theta} = 0$ et $\dot{\psi} = 0$ mais $\dot{\varphi} \neq 0$, nous voyons que nous obtenons des équations pour un corps rigide en rotation, pour lequel à l'équilibre la force centrifuge contrebalance la force gravitationnelle :

$$LMg = -\,(I_\theta - I_r)\,\dot{\varphi}^2 \cos\theta \,. \tag{61}$$