Corrigé: Examen Mécanique Analytique 2016

Professeur Paolo De Los Rios

1.07.2016

Exercice 1 : Système binaire en deux dimensions

a) **Ecrivez le Lagrangien du système en coordonnées cartésiennes**
Le Lagrangien en coordonnées cartésiennes s'écrit :

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{\vec{x}}_1^2 + \dot{\vec{x}}_2^2) - \frac{k}{2}(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} - l_0)^2$$

b) **Re-écrivez le Lagrangien, après avoir effectué les changements de variables suivants :**

$$\vec{x}_{cm} = \frac{\vec{x}_1 + \vec{x}_2}{2}$$

$$\vec{d} = \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{2}$$

$$\vec{d} = (d\cos\phi, d\sin\phi)$$

$$\vec{x}_{cm} = (x_{cm}, y_{cm})$$

In insérant la première transformation donnée, on obtient :

$$\mathcal{L} = m(\dot{\vec{x}}_{cm}^2 + \dot{\vec{d}}^2) - \frac{k}{2}(2d - l_0)^2 \ ,$$

et après la seconde

$$\mathcal{L} = \frac{M}{2}(\dot{\vec{x}}_{cm}^2 + \dot{d}^2 + (\dot{\phi}d)^2) - \frac{K}{2}(d - L_0)^2 \ ,$$

où l'on a défini $M = 2m$, $L_0 = l_0/2$ et $K = 4k$.

c) **Ecrivez le Hamiltonien dans les nouvelles coordonnées**
Le Hamiltonien dans les nouvelles coordonnées est

$$H = \frac{1}{2M}(\vec{p}_{cm}^2 + p_d^2 + \frac{p_\phi^2}{d^2}) + \frac{K}{2}(d - L_0)^2 \ .$$

d) **Ecrivez les équations d'Euler-Lagrange et utilisez-les pour montrer que la vitesse du centre de masse est une constante du mouvement.**
Les équations d'Euler-Lagrange donnent :

$$\frac{d[M\dot{\vec{x}}_{cm}]}{dt} = 0 \ ,$$
$$\frac{d[Md^2\dot{\phi}]}{dt} = 0 \ ,$$
$$M\ddot{d} = -(K - M\dot{\phi}^2)d + KL_0 \ .$$

Puisque M est constant nous obtenons donc $\dot{\vec{x}}_{cm} = v_{cm} = const$. La vitesse du centre de masse est donc bien une quantité conservée.

e) **Trouvez deux autres quantités conservées. Ont-elles une interprétation physique simple ?**
Puisque le Lagrangien est indépendant du temps, la fonction hamiltonienne (qui correspond ici à l'énergie mécanique) est conservée :

$$h = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \mathcal{L} = \frac{M}{2}(\dot{\vec{x}}_{cm}^2 + \dot{d}^2 + (\dot{\phi}d)^2) + \frac{K}{2}(d - L_0)^2 = E$$

ϕ étant une variable cycle, sont moment conjugué est conservé : $L = Md^2\dot{\phi}$, qui correspond au moment cinétique selon l'axe z.

f) **Considérez maintenant l'approximation suivante :**

$$\epsilon = \frac{d - L_0}{L_0} \ll 1$$

i) **Expliquez <u>avec des mots</u> à quoi correspond physiquement l'approximation ci-dessus**
Nous faisons l'approximation de petites (en amplitude) oscillations

ii) **Résolvez le système dans l'approximation ci-dessus.**
La transformation à faire est $d = L_0(1 + \epsilon)$. On peut soit modifier directement les équations du mouvement, ou alors modifier le Lagrangien. Dans les deux cas, l'on obtient :

$$\begin{aligned}
\dot{\phi} &= \frac{L}{ML_0^2(1+\epsilon)^2} \simeq \frac{L}{ML_0^2}\left[1 - 2\epsilon\right] \;, \\
\ddot{\epsilon} &= -\left(\frac{K}{M}L_0(1+\epsilon) - \frac{L^2}{M^2L_0^3(1+\epsilon)^3}\right) + \frac{K}{M}L_0 \simeq -\left(\frac{K}{M}L_0\epsilon - \frac{L^2}{M^2L_0^3}\left[1 - 3\epsilon\right]\right) = \\
&= -\epsilon\left(\frac{K}{M}L_0 + 3\frac{L^2}{M^2L_0^3}\right) + \frac{L^2}{M^2L_0^3} = -\tilde{\Omega}^2\epsilon + \gamma
\end{aligned}$$

où l'on a défini $\tilde{\Omega}^2 = \frac{K}{M}L_0 + 3\frac{L^2}{M^2L_0^3}$ et $\gamma = \frac{L^2}{M^2L_0^3}$. On peut résoudre l'équation de l'oscillateur harmonique en ϵ, et l'on obtient

$$\epsilon(t) = A\cos(\tilde{\Omega}t + \chi) + \frac{\gamma}{\tilde{\Omega}^2} \;. \tag{1}$$

et

$$\phi(t) \simeq \frac{L}{ML_0^2}\left[t(1 - \frac{\gamma}{\tilde{\Omega}^2}) - 2\left(\frac{A}{\tilde{\Omega}}\sin(\tilde{\Omega}t + \chi)\right)\right] + B \tag{2}$$

iii) L'approximation est valable pour autant que $\epsilon \ll 1$. Ceci est possible si $\frac{\gamma}{\tilde{\Omega}^2} \ll 1$, ce qui mène à $\frac{K}{M}L_0 \gg \frac{L^2}{M^2L_0^3}$ et donc $\sqrt{\frac{K}{M}} \gg \dot{\phi}$: la fréquence des oscillations doit être plus grande que la fréquence de rotation. Il y a donc une séparation d'échelles de temps.

Exercice 2 : Transformations canoniques

a) **Montrez par la méthode de votre choix que la transformation n'est pas canonique.**

Pour montrer que la transformation n'est pas canonique on peut soit vérifier si les crochets de Poisson de la transformation satisfont les relations canoniques, soit vérifier que la matrice Jacobienne de la transformation n'est pas symplectique.

Les crochets de Poisson d'une transformation canonique respectent :

$$\{Q_i, Q_j\} = 0 \qquad \{P_i, P_j\} = 0 \qquad \{Q_i, P_j\} = \delta_{i,j}$$

Il vient :

$$\{Q_1, Q_1\} = 0 \quad \text{Trivial}$$

$$\{Q_2, Q_2\} = 0 \quad \text{Trivial}$$

$$\{P_1, P_1\} = 0 \quad \text{Trivial}$$

$$\{P_2, P_2\} = 0 \quad \text{Trivial}$$

$$\{Q_1, Q_2\} = \frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial p_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1} + \frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial p_2} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_2} = 0 - 0 + 0 - 0 = 0$$

$$\{P_1, P_2\} = \frac{\partial P_1}{\partial q_1}\frac{\partial P_2}{\partial p_1} - \frac{\partial P_1}{\partial p_1}\frac{\partial P_2}{\partial q_1} + \frac{\partial P_1}{\partial q_2}\frac{\partial P_2}{\partial p_2} - \frac{\partial P_1}{\partial p_2}\frac{\partial P_2}{\partial q_2} = 0 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1} - 0 = 0$$

$$\{Q_1, P_1\} = \frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial P_1}{\partial p_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_1}\frac{\partial P_1}{\partial q_1} + \frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial P_1}{\partial p_2} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_2}\frac{\partial P_1}{\partial q_2} = 4 - 0 + 0 - 0 = 4$$

$$\{Q_2, P_2\} = \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial P_2}{\partial p_1} - \frac{\partial Q_2}{\partial p_1}\frac{\partial P_2}{\partial q_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\frac{\partial P_2}{\partial p_2} - \frac{\partial Q_2}{\partial p_2}\frac{\partial P_2}{\partial q_2} = 0 - 0 + 1 - 0 = 1$$

$$\{Q_1, P_2\} = \frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial P_2}{\partial p_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_1}\frac{\partial P_2}{\partial q_1} + \frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial P_2}{\partial p_2} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_2}\frac{\partial P_2}{\partial q_2} = 0 - 0 + 0 - 0 = 0$$

$$\{Q_2, P_1\} = \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial P_1}{\partial p_1} - \frac{\partial Q_2}{\partial p_1}\frac{\partial P_1}{\partial q_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\frac{\partial P_1}{\partial p_2} - \frac{\partial Q_2}{\partial p_2}\frac{\partial P_1}{\partial q_2} = 0 - 0 + 0 - 0 = 0$$

On voit donc que puisque $\{Q_1, P_1\} = 4$, la transformation n'est pas canonique.
Pour monter que la transformation n'est pas canonique à l'aide de la formulation matricielle, notons la matrice Jacobienne de la transformation M et la matrice J :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} & \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} & \frac{\partial Q_2}{\partial p_1} & \frac{\partial Q_2}{\partial p_2} \\ \frac{\partial P_1}{\partial q_1} & \frac{\partial P_1}{\partial q_2} & \frac{\partial P_1}{\partial p_1} & \frac{\partial P_1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial P_2}{\partial q_1} & \frac{\partial P_2}{\partial q_2} & \frac{\partial P_2}{\partial p_1} & \frac{\partial P_2}{\partial p_2} \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour que la transformation soit canonique, on doit avoir $M^T J M = J$. Il vient

$$M^T J M = \begin{pmatrix} -4q_1 & 0 & \frac{p_1 - q_2}{q_1^2} & 1 \\ 0 & -1 & \frac{1}{q_1} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{q_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{p_1 - q_2}{q_1^2} & \frac{1}{q_1} & -\frac{1}{q_1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq J$$

On voit donc que la transformation n'est pas canonique.

b) **Modifiez la transformation pour la rendre canonique.**
En observant les crochets de Poisson, on voit que seul $\{Q_1, P_1\}$ ne respecte pas les relations canoniques. On va donc modifier Q_1 et P_1 pour les rendre canoniques. Avec

$$Q_1 = -q_1^2$$

$$P_1 = \frac{q_2 - p_1}{2q_1}$$

On voit que les crochets de Poisson sont tous canoniques, et que maintenant $M^T JM = J$. La transformation est donc bien canonique avec ce changement.

c) **Trouvez une fonction génératrice de type $F_2(q_1, q_2, P_1, P_2)$ qui génère la transformation modifiée au point b).**

Nous avons que :

$$p_1 = \frac{\partial F_2}{\partial q_1} \qquad p_2 = \frac{\partial F_2}{\partial q_2} \qquad Q_1 = \frac{\partial F_2}{\partial P_1} \qquad Q_2 = \frac{\partial F_2}{\partial P_1}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{\partial F_2}{\partial q_1} = q_2 - 2q_1 P_1 \to F_2 = q_1 q_2 - q_1^2 P_1 + f^\alpha(q_2, P_1, P_2) \\
p_2 &= \frac{\partial F_2}{\partial q_2} = q_1 - P_2 \to F_2 = q_1 q_2 - q_2 P_2 + f\beta(q_1, P_1, P_2) \\
Q_1 &= \frac{\partial F_2}{\partial P_1} = -q_1^2 \to F_2 = -q_1^2 P_1 + f^\gamma(q_1, q_2, P_2) \\
Q_2 &= \frac{\partial F_2}{\partial P_2} = -q_2 \to F_2 = -q_2 P_2 + f^\delta(q_1, q_2, P_1)
\end{aligned} \tag{3}$$

D'où l'on tire

$$F_2(q_1, q_2, P_1, P_2) = q_1 q_2 - q_1^2 P_1 - q_2 P_2$$

Exercice 3 : Quantités conservées

a) **Ecrivez le Lagrangien du système en coordonnées cylindriques.**
Le Lagrangien en coordonnées cylindriques s'écrit :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(r_1^2\dot{\theta_1}^2 + r_2^2\dot{\theta_2}^2 + \dot{z_1}^2 + \dot{z_2}^2\right) - \frac{1}{2}k\left(r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + z_1^2 + z_2^2 - 2z_1 z_2\right)$$

b) **En sachant que le cercle 1 bouge en suivant une loi horaire $z_1(t)$ imposée par l'extérieur, écrivez les équations d'Euler-Lagrange.**
On obtient :

$$\begin{aligned}
&m r_1^2 \ddot{\theta_1} + k r_1 r_2 sin(\theta_1 - \theta_2) = 0 \\
&m r_2^2 \ddot{\theta_2} - k r_1 r_2 sin(\theta_1 - \theta_2) = 0 \\
&m \ddot{z}_2 + k(z_2 - z_1(t)) = 0
\end{aligned} \tag{4}$$

c) **Trouvez une quantité conservée dans le cas du point b).**
Par le théorème de Noether, on obtient :

$$m r_1^2 \dot{\theta_1} + m r_2^2 \dot{\theta_2} = L_z = \text{const.}$$

Le moment cinétique le long de l'axe z est donc conservé.

d) **On considère maintenant le cas différent où la position moyenne des deux cercles $z_m = \frac{z_1+z_2}{2}$ suit une loi horaire imposée par l'extérieur $z_m(t)$. Quelles sont maintenant les quantités conservées ?**

Par le même argument qu'au point c) (Théorème de Noether), le moment cinétique L_z est toujours conservé dans cette situations.
Pour trouver la seconde quantité conservée, considérons le changement de variables suivant :

$$z_{cm} = \frac{z_1 + z_2}{2} \qquad d = \frac{z_1 - z_2}{2}$$

Le Lagrangien prend maintenant la forme

$$\mathcal{L} = \left[\frac{1}{2}m\left(r_1^2\dot{\theta_1}^2 + r_2^2\dot{\theta_2}^2 + 2\dot{d}^2\right) - \frac{1}{2}k\left(r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + 4d^2\right)\right] + m\dot{z}_{cm}^2 = \mathcal{L}_1(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, d, \dot{d}) + \mathcal{L}_2(t)$$

On voit donc que le Lagrangien total se sépare en deux sous-Lagrangiens non-interagissants : Le premier étant indépendant du temps, la fonction hamiltonienne qui y est associée est conservée :

$$h_1(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, d, \dot{d}) = \frac{1}{2}m\left(r_1^2\dot{\theta_1}^2 + r_2^2\dot{\theta_2}^2 + 2\dot{d}^2\right) + \frac{1}{2}k\left(r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + 4d^2\right)$$

Fin du corrigé