

Mécanique analytique — corrigé 1

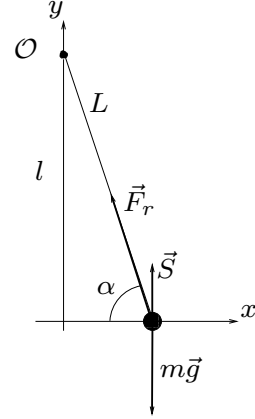
*Assistants : hugo.chkroun@epfl.ch, brenno.delucca@epfl.ch, garance.durr-legoupil-nicoud@epfl.ch
fanny.eustachon@epfl.ch, solange.flatt@epfl.ch, shiling.liang@epfl.ch
adelade.mohr@epfl.ch, alexandra.shelest@epfl.ch, adrian.woyke@epfl.ch*

Exercice 1 : Newton & approximations

Pour commencer, voyons quelles sont les dimensions des grandeurs que nous allons manipuler. Le déplacement x s'exprime en mètres, ainsi que les longueurs au repos l_0 et hauteur du point d'ancrage l . La masse m est exprimée en kilogrammes et la constante du ressort k en Newton par mètre, soit en kilogrammes par seconde carrée. Nous voulons maintenant savoir quelle forme peut prendre la fréquence d'oscillation ω . Cette dernière s'exprime en Herz, soit en s^{-1} . La forme la plus générale est donc

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} f\left(\frac{l}{l_0}\right) \quad (1)$$

où f est une fonction arbitraire de son argument. Si le fil était caractérisé par une longueur typique R , la fonction f pourrait aussi dépendre de l/R .



- a) Les forces en présence sont $\vec{F}_r = k(L - l_0) \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ et $\vec{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ S \end{pmatrix}$. De plus, en regardant le dessin ci-contre, on a $\sin \alpha = \frac{l}{L}$ et $\cos \alpha = \frac{x}{L}$, si bien que les équations du mouvement $m\vec{a} = \vec{F}_r + \vec{S} + m\vec{g}$ donnent

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= -k(1 - \frac{l_0}{L})x \\ 0 &= k(1 - \frac{l_0}{L})l + S - mg \end{cases}$$

La seconde équation donne S en fonction de x (n'oubliez pas que $L = L(x) = \sqrt{x^2 + l^2}$ et que comme l'anneau est astreint à se déplacer sur le fil, S peut aussi bien être négatif que positif). La dynamique du système est donc contenue dans la projection selon x des équations du mouvement.

- b) Les points d'équilibre s'obtiennent en cherchant les zéros de la force, que l'on notera x^* . La force selon x est donnée par $F_x = -k \left(1 - \frac{l_0}{L}\right) x$. Le premier zéro est trivial : il s'agit de $x_1^* = 0$. Deux autres zéros existent uniquement dans le cas où $l_0 > l$: ils sont obtenus en annulant le terme $1 - \frac{l_0}{L}$ et sont donnés par $x_{2/3}^* = \pm \sqrt{l_0^2 - l^2}$.
- c) Etudions la stabilité de $x_1^* = 0$ en faisant l'approximation de petits déplacements : $x = x_1^* + \delta_1 = \delta_1$. La force selon x est alors donnée par

$$F_x = -k \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{\delta_1^2 + l^2}}\right) \delta_1 = -k \left(1 - \frac{l_0}{l}\right) \delta_1 + \mathcal{O}(\delta_1^3) \quad (2)$$

On voit donc que si $l_0 < l$ le point x_1^* est stable puisque la force F_x est une force de rappel (elle est dirigée dans la direction opposée à δ_1). Avec les valeurs numériques données on obtient

donc que le point d'équilibre x_1^* n'est stable que pour $l_0 = 50$ cm. Dans l'approximation de petits déplacements, la projection selon x des équations du mouvement est l'équation d'un oscillateur harmonique. Sa solution est de la forme

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

où $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{l_0}{l}\right)} = 1.29$ Hz ; on retrouve donc la forme prédite pour ω dans l'équation (1).

Dans le cas où $l_0 > l$ nous avons 3 points d'équilibre : $x_1^* = 0$ et $x_{2/3}^* = \pm \sqrt{l_0^2 - l^2}$. Comme nous l'avons vu lors de l'analyse de l'équation (2), le point x_1^* est instable dans le cas où $l_0 > l$ puisque la force F_x est alors répulsive. Il nous reste à étudier les points $x_{2/3}^*$. Nous n'allons étudier que le point x_2^* , le point x_3^* ayant les mêmes propriétés par symétrie du système. Commençons par faire l'approximation de petits déplacements : $x = x_2^* + \delta_2$. La force F_x est alors donnée par

$$F_x = -k \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{(x_2^* + \delta_2)^2 + l^2}}\right) (x_2^* + \delta_2) \simeq -k \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\delta_2}{l_0} \sqrt{1 - \frac{l^2}{l_0^2}}}}\right) \left(\sqrt{l_0^2 - l^2} + \delta_2\right)$$

où l'on a négligé le terme en δ_2^2 et quelque peu réarrangé les termes. En utilisant successivement les développements de Taylor de la racine puis de la série géométrique on obtient

$$F_x \simeq -k \left(1 - \frac{l^2}{l_0^2}\right) \delta_2 + \mathcal{O}(\delta_2^2)$$

Notez que dans ce développement-ci, tous les ordres en δ_2 apparaissent. Il s'agit à nouveau d'une force de rappel. On en conclut que dans le cas $l_0 > l$ les points d'équilibre $x_{2/3}^*$ sont stables. Dans ce cas-ci la fréquence de l'oscillateur harmonique autour des points d'équilibre $x_{2/3}^*$ est $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{l^2}{l_0^2}\right)} = 1.36$ Hz.

- d) Voyons maintenant comment estimer l'ordre de grandeur du rayon de validité de l'approximation de petits déplacements. Pour ce faire, nous allons calculer le terme suivant en δ_1 de la force F_x et le comparer au premier. Lorsque le terme en δ_1^3 a la même valeur que celui en δ_1 l'approximation n'est plus valide. Le rayon de validité est la valeur maximale de δ_1 pour laquelle l'approximation est valide. On obtient en utilisant successivement le développement de Taylor de la racine puis celui de la série géométrique

$$F_x = -k \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{\delta_1^2 + l^2}}\right) \delta_1 = -k \left(1 - \frac{l_0}{l}\right) \delta_1 - k \frac{l_0}{2l^3} \delta_1^3 + \mathcal{O}(\delta_1^5)$$

Notez que ce développement ne contient que les ordres impairs en δ_1 (explication : le potentiel possédant une symétrie de parité, les équations du mouvement ne peuvent qu'obtenir des puissances impaires dans leur développement ; si vous n'êtes pas à l'aise avec cette explication, relisez-la quand vous aurez bien compris les équations d'Euler-Lagrange). En imposant l'égalité des deux premiers termes du développement ci-dessus (choix contenant une part d'arbitraire) on a :

$$k \left(1 - \frac{l_0}{l}\right) \bar{\delta}_1 = k \frac{l_0}{2l^3} \bar{\delta}_1^3 \quad \rightarrow \quad \bar{\delta}_1 = l \sqrt{2 \left(\frac{l}{l_0} - 1\right)}$$

Avec les valeurs numériques données, on obtient un rayon de validité $\bar{\delta}_1 = 1.41$ m.

Approche alternative

En employant un raisonnement de physicien, il est possible d'acquérir une bonne intuition du problème, de s'économiser de nombreux calculs ou de vérifier la pertinence de ces derniers (gardez néanmoins à l'esprit que l'intuition peut parfois être trompeuse ; il faut donc savoir à la fois manier le formalisme et développer son intuition). On reprend comme point de départ l'équation de Newton, dont on écrit la dépendance complète en x .

a) La force est

$$m\ddot{x} = -k \left(1 - \frac{l_0}{L}\right) x = -kx + kl_0 \frac{x}{\sqrt{x^2 + l^2}} \equiv f(x)$$

On rappelle que le mouvement selon l'axe y est nul. Ainsi, toute la dynamique a lieu sur l'axe x .

b) Pour trouver les points d'équilibre, au lieu de trouver les racines (les zéros) de $f(x)$, on réfléchit.

— La force est dirigée le long du ressort. Lorsque le ressort est à la verticale, la force n'a aucune projection selon l'axe x . Puisque de toutes façons l'accélération selon y est nulle, on est dans un cas où la masse n'a d'accélération ni selon y , ni selon x . En conclusion, le premier point d'équilibre est

$$x_1 = 0$$

— La force provient de l'élongation du ressort. Lorsque celui-ci est au repos, aucune force n'agit sur la masse, ce qui constitue un point d'équilibre. On remarque qu'afin que le ressort puisse être au repos, il faut qu'il soit plus long que l , autrement dit $l_0 \geq l$. Si cette condition est remplie, la position de repos est

$$x_{2,3} = \pm \sqrt{l_0^2 - l^2}$$

On remarque que x_1 existe indépendamment de l'inégalité entre l et l_0 , ce qui n'est pas vrai pour $x_{2,3}$.

c) On adopte une autre approche, fondée sur des considérations énergétiques. Les forces projetées selon y ne fournissent pas de travail, puisque le déplacement selon y est nul. Par ailleurs, la projection des forces selon x est conservative, ce qui veut dire que i) cette force dérive d'un potentiel $V(x)$ et ii) l'énergie mécanique totale $E = T + V$ est conservée. Ici on a noté T l'énergie cinétique de l'anneau, qui satisfait $T \geq 0$. L'énergie potentielle de la masse se trouve facilement

$$V(x) \equiv - \int^x f(x') dx' = k \frac{x^2}{2} - kl_0 \sqrt{x^2 + l^2} + C$$

Il s'agit de trouver les extrema de cette fonction et de dire s'il s'agit de minima (point d'équilibre stable) ou de maxima (point d'équilibre instable). Les extrema sont précisément les points d'équilibre car ils sont caractérisés par $\frac{d}{dx} V(x) = f(x) = 0$.

Dans ce cas, l'analyse du potentiel suffit à caractériser les équilibres. Si V admet un minimum local en x_e , alors il existe un voisinage de x_e où l'énergie potentielle ne peut qu'augmenter par rapport à la valeur $V(x_e)$. Comme le système est conservatif, l'énergie cinétique $T = E - V(x)$

ne peut que diminuer dans ce voisinage par rapport à la valeur $T(x_e) = E - V(x_e)$ admise en $x = x_e$. Si l'énergie du système est $E = V(x_e)$, alors l'anneau initialement placé en x_e est contraint de rester immobile en x_e , car tout déplacement ($x \neq x_e$) rendrait strictement négative l'énergie cinétique $T(x) = E - V(x) \leq E - V(x_e) = 0$. Si $E = V(x_e) + \epsilon$ où $\epsilon > 0$ est une quantité infinitésimale, alors l'anneau se déplace autour de x_e , mais seulement dans une région bornée (de taille infinitésimale) où $T \geq 0$. Ceci caractérise un équilibre stable. On remarquera que l'augmentation ϵ de l'énergie correspond à l'expérience de pensée où l'on perturbe l'anneau au repos à la position d'équilibre x_e soit en déplaçant légèrement par rapport à x_e (et en le relâchant à vitesse nulle), soit en lui communiquant une petite impulsion en x_e . Enfin, dans le cas où $V(x_e)$ n'est pas un minimum local de V (mais par exemple un maximum local), la trajectoire de l'anneau d'énergie $V(x_e) + \epsilon$ n'est pas bornée par la positivité de T à une région infinitésimale autour de x_e , et l'équilibre est donc instable. Nous aurons l'occasion de revenir sur ces considérations plus tard dans le cours, lorsque nous étudierons les portraits de phase. Qualifions donc maintenant les extrema de $V(x)$.

Méthode 'mathématique'

On remarque que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = +\infty$.

- Pour $l_0 \leq l$
 - Puisque dans ce cas, $x_{2,3}$ n'existent pas, il n'y a qu'un seul extremum et c'est x_1 . Compte tenu de la limite, il s'agit forcément d'un minimum.
- Pour $l_0 \geq l$
 - Dans ce cas, les 3 extrema existent. On sait que $x_1 = 0$, et de plus que c'est le centre de symétrie de $V(x)$. Compte tenu de la limite et du fait que $x_2 > x_1$, x_2 ne peut être qu'un minimum, autrement la fonction ne peut pas croître vers $+\infty$. Par symétrie le même argument est valable pour x_3 . Puisque la fonction est continue, x_1 est forcément un maximum.

	$l_0 \geq l$	$l_0 < l$
x_1	instable	stable
$x_{2,3}$	stable	$\emptyset$

Arguments physiques

Ici, on réfléchit *avec les mains*.

Si au repos le ressort est plus court que l , il est constamment en élongation. Ainsi, il va constamment exercer une force qui tend à le ramener à son état de repos. Si l'on essaye de l'éloigner de $x_1 = 0$, il va toujours exercer une force qui le ramène vers x_1 . Donc, x_1 est un point d'équilibre stable.

Si au repos le ressort est plus long que l , il est en compression dans l'intervalle $I = [x_3, x_2]$, et en élongation dans $\mathbb{R}/I$. Ceci veut dire que dans l'intervalle I , le ressort va exercer une force qui lui permettra de s'allonger pour atteindre sa position de repos. En particulier, si on le place sur $x_1 \in I$, il sera en équilibre, mais une perturbation quelconque va automatiquement le faire aller vers x_2 ou x_3 à cause de la force d'allongement qu'il exercera une fois perturbé.

En ceci, x_1 est un point d'équilibre instable. En revanche, de part et d'autre de x_2 resp. x_3 , le ressort passe d'un régime comprimé qui tend à le faire aller vers x_2 resp. x_3 à un régime étiré qui tend à le ramener vers x_2 resp. x_3 . Ainsi, ces deux points d'équilibre sont stables.

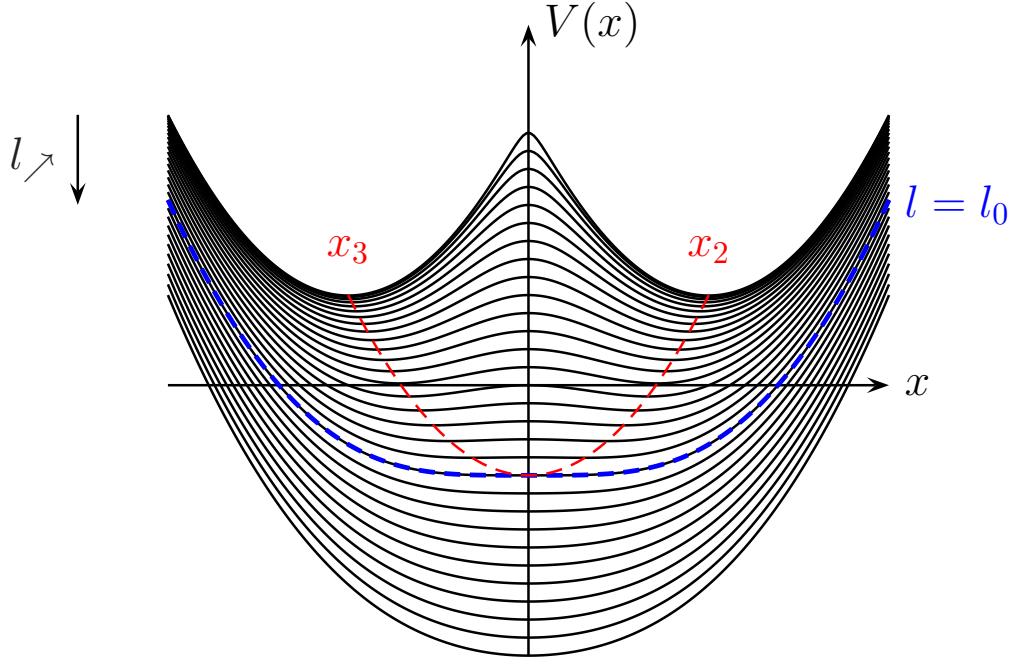


FIGURE 1 – Graphe de $V(x)$ pour des valeurs $l \in [l_0 - 2, l_0 + 1]$. Ici $l_0 = 2$. Garder l fixe et faire varier l_0 serait mieux conceptuellement, mais le graphe serait moins parlant.

Pour le reste de l'exercice, il faut procéder comme ci-dessus : faire un développement limité au premier ordre de $f(x)$ autour des points d'équilibre stables pour avoir l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique. Pour le rayon de validité, il faudra évaluer la correction du troisième ordre au premier ordre pour trouver le rayon de validité.

Exercice 2 : Champ de force

- a) Dans cet exercice, on utilise les résultats suivants (que vous trouverez dans certaines tables ou que vous pouvez prouver très facilement), valables pour toute fonction f et tout champ de vecteurs $\vec{g}$ et $\vec{h}$:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (f\vec{g}) &= \vec{g} \cdot \vec{\nabla} f + f \vec{\nabla} \cdot \vec{g}, & \vec{\nabla} \cdot (\vec{g} \times \vec{h}) &= \vec{h} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{g}) - \vec{g} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{h}), \\ \vec{\nabla} \times (f\vec{g}) &= (\vec{\nabla} f) \times \vec{g} + f \vec{\nabla} \times \vec{g}, & \vec{\nabla} \times (\vec{g} \times \vec{h}) &= (\vec{h} \cdot \vec{\nabla})\vec{g} + \vec{g}(\vec{\nabla} \cdot \vec{h}) - (\vec{g} \cdot \vec{\nabla})\vec{h} - \vec{h}(\vec{\nabla} \cdot \vec{g}). \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

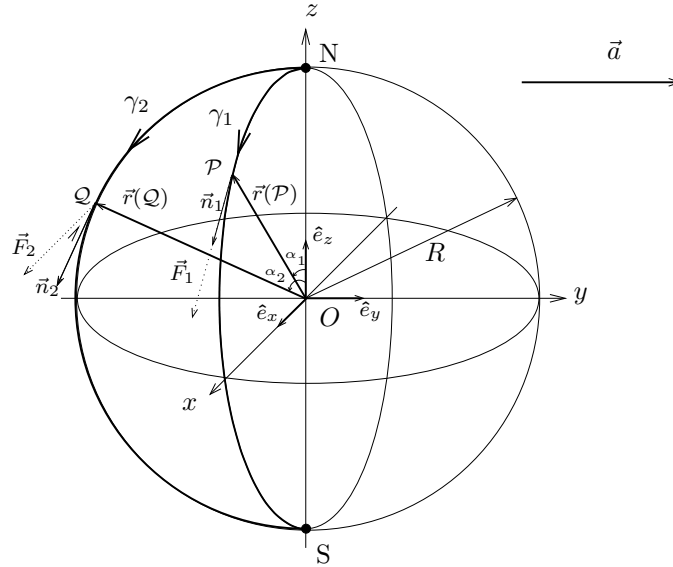
$$\vec{\nabla} r = \frac{\vec{r}}{r}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3, \quad \vec{\nabla} \times \vec{r} = \vec{0}.$$

A l'aide de tout cela, il vient, $\forall r > 0$:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_1 &= \left(\vec{\nabla} \frac{1}{r^2} \right) \cdot (\vec{a} \times \vec{r}) + \frac{1}{r^2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{r}) = -\frac{2}{r^4} \vec{r} \cdot (\vec{a} \times \vec{r}) - \frac{1}{r^2} \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{r}) = 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{F}_1 &= \left(\vec{\nabla} \frac{1}{r^2} \right) \times (\vec{a} \times \vec{r}) + \frac{1}{r^2} \vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{r}) = -\frac{2}{r^4} \vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{r}) + \frac{1}{r^2} \left((\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} \right) \\ &= -\frac{2}{r^4} (r^2 \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{r}) + \frac{2}{r^2} \vec{a} = \frac{2(\vec{a} \cdot \vec{r})}{r^4} \vec{r}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_2 &= \alpha \left(\left(\vec{\nabla} \frac{1}{r^3} \right) \cdot \vec{r} + \frac{1}{r^3} \vec{\nabla} \cdot \vec{r} \right) = \alpha \left(-\frac{3}{r^5} \vec{r} \cdot \vec{r} + \frac{3}{r^3} \right) = 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{F}_2 &= \alpha \left(\left(\vec{\nabla} \frac{1}{r^3} \right) \times \vec{r} + \frac{1}{r^3} \vec{\nabla} \times \vec{r} \right) = \alpha \left(-\frac{3}{r^5} \vec{r} \times \vec{r} \right) = 0.\end{aligned}$$

Nous avons également utilisé que le vecteur $\vec{a} \times \vec{r}$ est orthogonal à $\vec{r}$ d'où $\vec{r} \cdot (\vec{a} \times \vec{r}) = 0$. Aussi, dans le calcul du rotationnel de $\vec{F}_1$, on a $(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} = \vec{a}$. En effet, l'opérateur $\vec{a} \cdot \vec{\nabla} = \sum_i a_i \partial_i$ et $\partial_i \vec{r} = \hat{e}_i$ (par exemple $\frac{\partial}{\partial x} \vec{r} = \hat{e}_x$).

- b) D'après les résultats ci-dessus, $\vec{F}_1$ n'est pas conservatif alors que $\vec{F}_2$ l'est, avec $V_2 = \frac{\alpha}{r}$.
- c) Tout d'abord, comme $\vec{F}_2$ est un champ de vecteurs conservatif, le travail de $\vec{F}_2$ le long de γ_1 et de γ_2 est le même et il est donné par la différence de potentiel entre le point de départ et le point d'arrivée. Comme N et S sont à la même distance $r = R$ de O et que V_2 ne dépend que de r , cette différence de potentiel est nulle et donc le travail également : $W(\vec{F}_2, \gamma_1) = W(\vec{F}_2, \gamma_2) = 0$.



Pour le travail de $\vec{F}_1$, considérons les deux chemins séparément. Le long de γ_1 , paramétrisé par α_1 , le vecteur $\vec{F}_1$ est donné par $\vec{F}_1 = \frac{a}{R} \vec{n}_1$, où $\vec{n}_1$ est le vecteur unitaire tangent à γ_1 . Ainsi $\vec{F}_1 \cdot \vec{n}_1 = \frac{a}{R}$ et le travail est

$$W(\vec{F}_1, \gamma_1) = \int_0^\pi R d\alpha_1 \vec{F}_1 \cdot \vec{n}_1 = \pi a.$$

Le long de γ_2 , paramétré par α_2 , le vecteur $\vec{F}_1$ est donné par $\vec{F}_1 = \frac{a}{R} \cos(\alpha_2) \hat{e}_x$. Ainsi $\vec{F}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ et le travail est nul : $W(\vec{F}_1, \gamma_2) = 0$.

Complément : analyse vectorielle et tenseur ϵ_{ijk}

Nous détaillons ici sur l'exemple du champ de force $\vec{F}_1$ comment s'emploient la convention d'Einstein (pour les indices répétés) et le tenseur antisymétrique ϵ_{ijk} . Ces deux outils simplifient souvent grandement l'écriture des calculs.

Chaque vecteur $\vec{v}$ de l'espace géométrique tridimensionnel peut être exprimé dans la base ortho-normée $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$ comme

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \hat{e}_i,$$

et le produit scalaire de deux vecteurs s'écrit alors

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 v_i w_j (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 v_i w_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^3 v_i w_i$$

Pour écrire le produit vectoriel de deux vecteurs sous la même forme, nous avons besoin d'introduire un nouvel objet : le tenseur antisymétrique ϵ_{ijk} . Il est défini comme : $\epsilon_{ijk} = 0$ si $i = j$ ou $j = k$ ou $i = k$ et si les trois indices sont distincts, $\epsilon_{ijk} = +1$ si (i, j, k) est une permutation paire de $(1, 2, 3)$ et $\epsilon_{ijk} = -1$ si (i, j, k) est une permutation impaire de $(1, 2, 3)$. Ainsi on a par exemple :

$$\epsilon_{111} = 0, \quad \epsilon_{123} = +1, \quad \epsilon_{132} = -1, \quad \epsilon_{231} = +1, \quad \epsilon_{213} = -1, \quad \text{etc.}$$

Le produit vectoriel de deux vecteurs s'écrit alors

$$\vec{v} \times \vec{w} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \hat{e}_i v_j w_k$$

L'opérateur nabla devient également $\vec{\nabla} = \sum_i \hat{e}_i \partial_i$. Pour raccourcir un peu l'écriture on introduit la notation d'Einstein qui consiste en ne pas écrire la somme sur les indices $i, j, \dots$ mais cette sommation est sous-entendue lorsqu'un indice $i, j, \dots$ apparaît deux fois dans un produit. Si un indice n'apparaît qu'une seule fois, il s'agit alors de la i -ième composante d'un vecteur, par exemple on écrira :

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_i w_i \quad \text{et} \quad (\vec{v} \times \vec{w})_i = \epsilon_{ijk} v_j w_k.$$

La notation d'Einstein permet d'écrire de manière compacte différents objets mathématiques, un objet sans indice non répété est un **scalaire** (comme α ou $v_i w_i$), un objet à un indice non répété est un **vecteur** (v_i désigne $\vec{v}$ et $\epsilon_{ijk} v_j w_k$ est $\vec{v} \times \vec{w}$), un objet à deux indices est une **matrice** (δ_{ij} est la matrice identité 3×3) et un objet à plus de deux indices est appelé **tenseur**.

Grâce aux deux identités suivantes, on peut démontrer facilement toutes les identités utilisées dans les calculs du point a) (dans tout ce qui suit, les composantes du vecteur $\vec{r}$ seront notées x_i) :

$$\partial_i x_j = \delta_{ij} \tag{3}$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km} \tag{4}$$

Ainsi on peut écrire

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} r)_i &= \partial_i \sqrt{x_j x_j} = \frac{1}{2} \frac{2x_j \delta_{ij}}{\sqrt{x_k x_k}} = \frac{x_i}{\sqrt{x_k x_k}} = \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)_i \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{r} &= \partial_i x_i = \delta_{ii} = 3 \\ (\vec{\nabla} \times \vec{r})_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j x_k = \epsilon_{ijk} \delta_{jk} = \epsilon_{ijj} = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Nous pouvons maintenant commencer les calculs. La composante i du vecteur $\vec{F}_1 = \vec{a} \times \frac{\vec{r}}{r^2}$ s'écrit $F_{1i} = \epsilon_{ijk} a_j \frac{x_k}{r^2}$. On a donc :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_1 &= \partial_i \left(\epsilon_{ijk} a_j x_k \frac{1}{r^2} \right) \\ &= \epsilon_{ijk} \left[(\partial_i a_j) \frac{x_k}{r^2} + \frac{a_j}{r^2} (\partial_i x_k) + a_j x_k \left(\partial_i \frac{1}{r^2} \right) \right] \\ &= \epsilon_{ijk} \left[0 + \frac{a_j}{r^2} \delta_{ik} - 2a_j x_k \left(\frac{x_i}{r^4} \right) \right] \\ &= 0\end{aligned}$$

Le deuxième terme de la somme est nul parce que $\epsilon_{ijk} \delta_{ik} = \epsilon_{iji} = 0$ par définition du tenseur totalement antisymétrique ϵ , et le troisième terme s'annule également pour raisons de symétrie :

$$\epsilon_{ijk} x_i x_k = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (x_i x_k + x_k x_i) = \frac{1}{2} (\epsilon_{ijk} + \epsilon_{kji}) x_i x_k = \frac{1}{2} (\epsilon_{ijk} - \epsilon_{ijk}) x_i x_k = 0$$

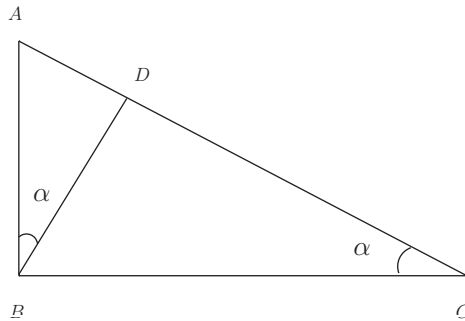
Rotationnel de $\vec{F}_1$:

$$\begin{aligned}\left[\vec{\nabla} \times \left(\vec{a} \times \frac{\vec{r}}{r^2} \right) \right]_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j F_{1k} = \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \partial_j \left(a_l \frac{x_m}{r^2} \right) \\ &= \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} \partial_j a_l \left(\frac{x_m}{r^2} \right) \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_l \left(\frac{\delta_{jm}}{r^2} - 2 \frac{x_m x_j}{r^4} \right) \\ &= \delta_{il} \delta_{jj} \frac{a_l}{r^2} - \delta_{il} \frac{a_l}{r^2} - 2 \delta_{il} \frac{a_l x_j x_j}{r^4} + 2 \delta_{im} \delta_{jl} \frac{a_l x_m x_j}{r^4} \\ &= 3 \frac{a_i}{r^2} - \frac{a_i}{r^2} - 2 \frac{a_i}{r^2} + 2 \frac{a_j x_i x_j}{r^4} \\ &= 2 \frac{(a_j x_j) x_i}{r^4} \\ \text{donc } \vec{\nabla} \times \left(\vec{a} \times \frac{\vec{r}}{r^2} \right) &= 2 \frac{(\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^4}\end{aligned}$$

où l'on a utilisé $\delta_{jm} \delta_{jm} = \delta_{jj} = 3$ (souvenez-vous que cette notation implique une sommation sur les indices j et m) et $\delta_{ij} x_i x_j = |\vec{r}|^2 = r^2$.

Exercice 3 : Pythagore

Dans un espace à courbure nulle, un triangle rectangle est entièrement caractérisé par l'un de ses côtés et l'un de ses angles, par exemple par son hypoténuse et son plus petit angle que nous appellerons α .



Considérons le triangle ABC . Puisqu'il est entièrement caractérisé par AC et α , la seule façon d'écrire AB et BC est $AB = AC \cdot f(\alpha)$ et $BC = AC \cdot g(\alpha)$ où f et g sont des fonctions arbitraires de l'angle α . Comme l'angle α se retrouve dans les triangles rectangles ABD et BCD on peut de la même manière écrire $AD = AB \cdot f(\alpha)$ et $CD = BC \cdot g(\alpha)$. En résolvant pour f et g , on obtient $(AB)^2 = AC \cdot AD$ et $(BC)^2 = AC \cdot CD$. Finalement $(AB)^2 + (BC)^2 = AC \cdot (AD + CD) = (AC)^2$.

Ce raisonnement est valable comme précisé dans un espace à courbure nulle. Si l'on prend un espace non-euclidien, une sphère pour fixer les idées, un triangle rectangle ne peut plus être précisé uniquement par un angle et une longueur. Prenons le cas de deux longitudes. Elles se croisent au Pôle Nord, mais sont parallèles à l'équateur. On a donc un triangle rectangle un peu particulier, avec deux angles droits ! Mais rectangle néanmoins. Cependant, impossible de savoir la longueur qui sépare les longitudes à l'équateur ! Cela dépend du rayon de courbure de la Terre.

Formulé autrement, il n'est pas suffisant d'avoir un angle et une longueur car pour un espace non-euclidien, la somme des angles d'un triangle ne fait pas 180° . La différence entre 180 et la somme totale est une fonction d'un rapport entre les longueurs caractéristiques du triangle et le rayon de courbure R de l'espace. Quand ce rayon de courbure devient grand ($\lim_{R \rightarrow +\infty}$), cette différence tend vers 0, retrouvant la rassurante loi euclidienne.