

Mécanique analytique — corrigé 10

*Assistants : hugo.chkroun@epfl.ch, brenno.delucca@epfl.ch, garance.durr-legoupil-nicoud@epfl.ch
fanny.eustachon@epfl.ch, solange.flatt@epfl.ch, shiling.liang@epfl.ch
adelaide.mohr@epfl.ch, alexandra.shelest@epfl.ch, adrian.woyke@epfl.ch*

Exercice 1 : Exercice complet

- a) Le hamiltonien a dimension d'énergie, soit ML^2T^{-2} . L'impulsion est donc en MLT^{-1} . La position étant en L , on trouve que $[\lambda] = \text{T}^{-1}$.
- b) On veut $T = \frac{1}{2}P^2$, pour ce faire on complète le carré dans le hamiltonien de base :

$$\frac{p^2}{2m} + \lambda pq = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{\sqrt{m}} + \lambda\sqrt{m}q \right)^2 - \frac{m\lambda^2}{2}q^2 \quad (1)$$

et donc :

$$P = \frac{p}{\sqrt{m}} + \lambda\sqrt{m}q \quad (2)$$

- c) La transformation est assez simple, on peut donc essayer de trouver la nouvelle coordonnée à la main. Cherchons une nouvelle coordonnée qui ne dépende que de q , afin de ne pas réintroduire de mélange PQ . On peut par exemple tenter avec $Q = Nq$, où N est une normalisation à fixer.

Utilisons les crochets de Poisson. La seule combinaison non-triviale est quand on prend la partie qui dépend de p dans P :

$$\{Q, P\}_{q,p} = \frac{N}{\sqrt{m}} \{q, p\} = 1 \quad \Rightarrow \quad N = \sqrt{m} \quad (3)$$

et donc :

$$Q = \sqrt{m}q \quad (4)$$

Le nouvel hamiltonien devient :

$$K(P, Q) = \frac{P^2}{2} - \frac{\lambda^2 Q^2}{2} + V(Q/\sqrt{m}) \quad (5)$$

Il est, comme demandé, indépendant du temps, et donc $K = E$ est conservé.

Remarque : On peut également utiliser une fonction génératrice. Comme on cherche la forme de $Q(q, p)$ on partira sur une fonction de type F_2 ou F_4 . La transformation de type F_2 donne directement la solution ci-dessus. Pour une transformation de type F_4 :

$$q = \frac{P}{\lambda\sqrt{m}} - \frac{p}{\lambda m} = -\frac{\partial F_4}{\partial p} \quad (6)$$

d'où

$$F_4 = \frac{p^2}{2\lambda m} - \frac{pP}{\lambda\sqrt{m}} + f(P) \quad (7)$$

où f est une fonction arbitraire de P , puis

$$Q = \frac{\partial F_4}{\partial P} = -\frac{p}{\lambda\sqrt{m}} + f'(P) \quad (8)$$

Mais nous voulons que Q ne dépende que de q pour ne pas réintroduire de couplage P, Q . Comme $P = \frac{p}{\sqrt{m}} + \lambda\sqrt{m}q$, un choix simple est f tel que $f'(P) = \frac{1}{\lambda}P$ soit $f(P) = \frac{1}{2\lambda}P^2$. On a finalement :

$$Q = \frac{\partial F_4}{\partial P} = -\frac{p}{\lambda\sqrt{m}} + \frac{1}{\lambda}P = \sqrt{m}q \quad (9)$$

comme ci-dessus.

Remarque 2 : On peut se demander pourquoi on ne fait pas la transformation

$$\frac{P^2}{2} = \frac{p^2}{2m} + \lambda pq \quad (10)$$

à la place de compléter le carré. Cette transformation est beaucoup plus complexe (non linéaire) et il est impossible (ou très difficile) de construire une transformation canonique où Q ne dépend que de q .

d) Pour un système avec un potentiel $W(Q)$ on peut avoir les cas suivants :

- i. $\lim_{Q \rightarrow \pm\infty} W(Q) = +\infty$: le système restera toujours dans une région finie de l'espace qui sera bornée par les points satisfaisant $W(Q) = E$.
- ii. $\lim_{Q \rightarrow \pm\infty} W(Q) = -\infty$: le système sera instable au moins vers les bords. Mais il se peut qu'on trouve une région stable à l'intérieur.
- iii. $\lim_{Q \rightarrow \pm\infty} W(Q) = C_{\pm}$: il y a deux régimes. Si $E < \min(C_{\pm})$, alors le système restera enfermé quelque part entre les points $W(Q) = E$. Dans le cas contraire, il va se passer quelque chose pour Q fini, mais asymptotiquement le système devient libre. Pour $E = \min(C_{\pm})$ le système va s'arrêter à l'infini.
- iv. On trouve évidemment aussi toutes les combinaisons des cas ci-dessus.

Donc dans notre cas ce sont les limites $\lim_{Q \rightarrow \pm\infty} V(Q/\sqrt{m}) - \frac{\lambda^2}{2}Q^2$ qui vont déterminer le régime dans lequel on peut se trouver.

e) Le potentiel devient :

$$W(Q) = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\kappa}{m} - \lambda^2 \right)}_{\xi} Q^2 \quad (11)$$

i. Les équations de Hamilton sont dans ce cas :

$$\begin{cases} \dot{p} &= -\kappa q - \lambda p \\ \dot{q} &= \frac{p}{m} + \lambda q \end{cases} \quad (12)$$

- ii. Si $\xi < 0$, alors le système est instable, alors que pour $\xi > 0$ il est stable et va se déplacer entre les points $\bar{Q}_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{2E}{\xi}}$.
- iii. De façon générique les équations de Hamilton sont :

$$\begin{cases} \dot{P} &= -W'(Q) \\ \dot{Q} &= P \end{cases} \quad (13)$$

Mais on peut intégrer une de ces équations en utilisant la conservation de l'énergie qui implique :

$$\frac{P^2}{2} + W(Q) = E \quad \Rightarrow \quad P = \eta \sqrt{2[E - W(Q)]}, \quad \eta = \text{sign}(P) = \pm 1 \quad (14)$$

En insérant cette information dans la seconde équation et en séparant les variables on obtient ($\eta^2 = 1$) :

$$\boxed{dt = \frac{\eta dQ}{\sqrt{2E - 2W(Q)}}} \quad (15)$$

Dans notre cas :

$$dt = \frac{\eta dQ}{\sqrt{2E - \xi Q^2}} \quad (16)$$

On commence par travailler un peu l'expression pour avoir une forme simple.

Pour $E > 0$, on a

$$dt = \frac{\eta}{\sqrt{2E}} \frac{dQ}{\sqrt{1 - \frac{\xi}{2E} Q^2}} = \frac{\eta}{\sqrt{|\xi|}} \frac{d\tilde{Q}}{\sqrt{1 \mp \tilde{Q}^2}} \quad (17)$$

avec le signe $\mp = -\text{sign}(\xi)$, et $\tilde{Q} = \sqrt{\frac{|\xi|}{2E}} Q$. A présent il faut différencier les cas :

— $\xi > 0$: l'intégrale ci-dessus donne $\arcsin(\tilde{Q})$ et donc :

$$\begin{cases} Q(t) &= \sqrt{\frac{2E}{\xi}} \sin [\sqrt{\xi}(t - t_0) + \phi_0] \\ P(t) &= \sqrt{2E} \cos [\sqrt{\xi}(t - t_0) + \phi_0] \end{cases} \quad (18)$$

où $\phi_0 \in]-\pi, \pi]$ est choisi de sorte à ce que $\sin(\phi_0) = Q(0)\sqrt{\xi/(2E)}$ et $\cos(\phi_0) = P(0)/\sqrt{2E}$. On reste effectivement dans une région finie de l'espace.

— $\xi < 0$: l'intégrale ci-dessus donne $\text{arcsinh}(\tilde{Q})$ et donc :

$$\begin{cases} Q(t) &= \sqrt{-\frac{2E}{\xi}} \sinh [\eta_P \sqrt{-\xi}(t - t_0) + \phi_0] \\ P(t) &= \eta_P \sqrt{2E} \cosh [\eta_P \sqrt{-\xi}(t - t_0) + \phi_0] \end{cases} \quad (19)$$

où $\phi_0 = \text{arcsinh}(Q(0)\sqrt{-\xi/(2E)})$ et $\eta_P = \text{sign}(P(0))$. Le système, s'il est mis en mouvement ($E > 0$ pour $Q(0) = 0$), s'écartera exponentiellement vite de la région centrale.

— $\xi = 0$: cas trivial dans lequel on obtient

$$\begin{cases} Q(t) &= \eta_P \sqrt{2E}(t - t_0) + Q(0) \\ P(t) &= \eta_P \sqrt{2E} \end{cases} \quad (20)$$

où $\eta_P = \text{sign}(P(0))$. Le système suit une évolution libre.

Pour $E < 0$, seul le cas de figure $\xi < 0$ est possible, puisque $E = P^2/2 + \xi Q^2/2$. On écrit alors

$$dt = \frac{\eta}{\sqrt{-2E}} \frac{dQ}{\sqrt{\frac{\xi}{2E}Q^2 - 1}} = \frac{\eta}{\sqrt{-\xi}} \frac{d\tilde{Q}}{\sqrt{\tilde{Q}^2 - 1}} \quad (21)$$

avec $\tilde{Q} = \sqrt{\xi/(2E)}Q$, et l'intégration conduit à

$$\begin{cases} Q(t) &= \eta_Q \sqrt{\frac{2E}{\xi}} \cosh [\eta_Q \eta_P \sqrt{-\xi}(t - t_0) + \phi_0] \\ P(t) &= \eta_P \sqrt{-2E} \sinh [\eta_Q \eta_P \sqrt{-\xi}(t - t_0) + \phi_0] \end{cases} \quad (22)$$

où $\eta_Q = \text{sign}(Q(0))$, $\eta_P = \text{sign}(P(0))$ et $\phi_0 = \text{arccosh}(|Q(0)|\sqrt{\xi/(2E)})$. Comme précédemment pour $\xi < 0$, le système s'écarte exponentiellement de la région initiale/centrale. Pour $E = 0$, on peut avoir $\xi = 0$, et alors $P = 0$ et $Q = Q(0)$, ou alors $\xi < 0$. Dans ce dernier cas, on trouve

$$dt = \frac{\eta}{\sqrt{-\xi}} \frac{dQ}{|Q|}, \quad (23)$$

d'où

$$\begin{cases} Q(t) &= Q(0) \exp [\eta_Q \eta_P \sqrt{-\xi}(t - t_0)] \\ P(t) &= \eta_P \sqrt{-\xi} Q(0) \exp [\eta_Q \eta_P \sqrt{-\xi}(t - t_0)] \end{cases} \quad (24)$$

où $\eta_Q = \text{sign}(Q(0))$ et $\eta_P = \text{sign}(P(0))$. On trouve donc encore le même comportement en fonction de la valeur de ξ .

Remarque 1 : pour illustrer toutes les dynamiques possibles en fonction des conditions initiales, nous avons discuté ici tous les cas de figure possibles pour les signes de E , de $Q(0)$ et de $P(0)$; dans la discussion d'un équilibre, on s'intéresse aux déplacements autour d'un extremum du potentiel; il suffirait ici d'étudier le cas $E > W(0) = 0$ et, par exemple, $Q(0) = 0$ et $P(0) > 0$; les résultats obtenus ci-dessus se transposent directement à ce cas de figure avec $\phi_0 = 0$ et $\eta_P = +1$.

Remarque 2 : la discussion (un peu fastidieuse) des signes dans les résultats ci-dessus recouvre une réalité physique simple; dans le cas $E > 0$ et $\xi < 0$, par exemple, la particule est en présence d'une barrière de potentiel en $Q = 0$, mais son énergie est supérieure à la hauteur de cette barrière de potentiel, ce qui lui permet, le cas échéant, de franchir la barrière; si la position et la vitesse initiales sont de même signe, alors la particule s'écarte simplement de cette barrière jusqu'à l'infini; si par contre la position et la vitesse initiales sont de signes opposés, la particule s'approche du sommet de la barrière, franchit cette dernière et s'en écarte à l'infini de l'autre côté; ceci se traduit par un changement de signe de Q au cours du temps [cf. Eq. (19), $\text{sign}(\sinh(x)) = \text{sign}(x)$];

le signe de P reste au contraire constant [$\text{sign}(\cosh(x)) > 0$] et le passage au-dessus de la barrière se traduit simplement une diminution temporaire de l'impulsion [minimum lorsque $\eta_P \sqrt{-\xi}(t - t_0) + \phi_0$ et Q changent de signe]; dans le cas $E < 0$ et $\xi < 0$, la particule n'a pas l'énergie suffisante pour franchir la barrière; quels que soient les signes de $Q(0)$ et $P(0)$, le signe de Q reste inchangé; le signe de P change éventuellement [réflexion par la barrière], mais devient toujours égal à celui de Q dans la limite $t \rightarrow +\infty$, ce qui traduit le fait que la particule s'écarte de la barrière aux temps longs.

iv. En inversant la transformation on trouve :

$$\begin{cases} q &= \frac{Q}{\sqrt{m}} \\ p &= \sqrt{m}(P - \lambda Q) \end{cases} \quad (25)$$

On se limite ici à la discussion du cas $E > 0$, $Q(0) = 0$ et $P(0) > 0$; on dénote par les indices $+$, $-$ et 0 les cas de figure $\xi > 0$, $\xi < 0$ et $\xi = 0$. Sur la base des résultats ci-dessus pour $Q(t)$ et $P(t)$, avec $\phi_0 = 0$ et $\eta_P = +1$, on trouve alors

$$\begin{cases} q_+(t) &= \sqrt{\frac{2E}{m\xi}} \sin [\sqrt{\xi}(t - t_0)] \\ p_+(t) &= \sqrt{2Em} \left\{ \cos [\sqrt{\xi}(t - t_0)] - \frac{\lambda}{\sqrt{\xi}} \sin [\sqrt{\xi}(t - t_0)] \right\} \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} q_-(t) &= \sqrt{-\frac{2E}{m\xi}} \sinh [\sqrt{-\xi}(t - t_0)] \\ p_-(t) &= \sqrt{2Em} \left\{ \cosh [\sqrt{-\xi}(t - t_0)] - \frac{\lambda}{\sqrt{-\xi}} \sinh [\sqrt{-\xi}(t - t_0)] \right\} \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} q_0(t) &= \sqrt{\frac{2E}{m}}(t - t_0) \\ p_0(t) &= \sqrt{2Em} \{1 - \lambda(t - t_0)\} \end{cases} \quad (28)$$

f) i. Le potentiel pour Q devient :

$$W(Q) = -\frac{1}{2}\lambda^2 Q^2 \left[1 - \frac{Q^4}{Q^4 + \bar{\alpha}^4} \right] \quad , \quad \bar{\alpha} = \alpha\sqrt{m} \quad (29)$$

Pour estimer l'apparence on sait que :

- $W(Q) \leq 0$
- $W(Q) = W(-Q)$
- $W(0) = 0$
- $W(\pm\infty) = 0$

ce qui conduit à :

Il possède un minimum dégénéré $W(\bar{Q}) = W_{\min}$, et atteint au maximum 0 en $Q = \{0, \pm\infty\}$. Les différents régimes sont donc :

- $E < W_{\min}$: pas possible.
- $W_{\min} < E < 0$: état lié, le système restera dans un des minimum.
- $0 < E$: le système va s'échapper et devenir asymptotiquement libre.

ii. Il faut commencer par trouver la position d'équilibre. La dérivée est donnée par :

$$W'(Q) = \frac{\lambda^2 \bar{\alpha}^4 Q}{(Q^4 + \bar{\alpha}^4)^2} (Q^4 - \bar{\alpha}^4) \quad (30)$$

et donc :

$$\bar{Q} = \pm \bar{\alpha} \quad , \quad W_{\min} = -\frac{1}{4} \lambda^2 \bar{\alpha}^2 \quad (31)$$

Pour la fréquence d'oscillation, on a besoin de la deuxième dérivée. On a une dépendance du type : $W'(Q) = F(Q)(Q^4 - \bar{\alpha}^4)$; la deuxième dérivée en $Q = \bar{\alpha}$ sera donc donnée par $W''(\bar{\alpha}) = 4F(\bar{\alpha})\bar{\alpha}^3$:

$$W''(\bar{\alpha}) = \lambda^2 \quad (32)$$

Les oscillations autour de la position d'équilibre sont décrites par $\tilde{Q} = Q - \bar{Q}$, $\tilde{P} = P$:

$$K(\tilde{P}, \tilde{Q}) = \frac{1}{2} \tilde{P}^2 + \frac{1}{2} \lambda^2 \tilde{Q}^2 - \frac{1}{4} \lambda^2 \bar{\alpha}^2 \quad (33)$$

on se retrouve donc dans la même situation qu'en dessus avec les substitutions $\xi \rightarrow \lambda^2$, $E \rightarrow E + \frac{1}{4} \lambda^2 \bar{\alpha}^2$, i.e. :

$$\begin{cases} Q_{\text{osc.}}(t) &= \bar{\alpha} + \sqrt{\frac{2E}{\lambda^2} + \frac{1}{2} \bar{\alpha}^2} \sin[\lambda(t - t_0)] \\ P_{\text{osc.}}(t) &= \sqrt{2E + \frac{1}{2} \lambda^2 \bar{\alpha}^2} \cos[\lambda(t - t_0)] \end{cases} \quad (34)$$

iii. Asymptotiquement le potentiel est nul :

$$W(\pm\infty) = 0 \quad (35)$$

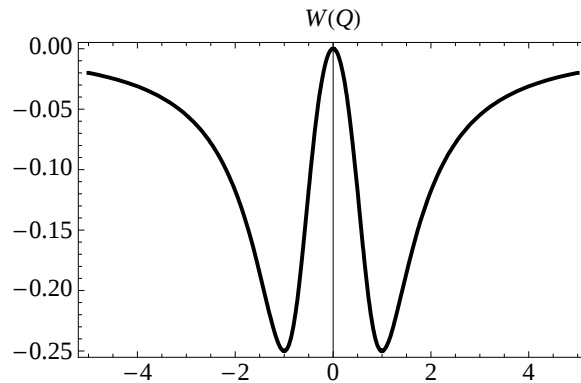


FIGURE 1 – $W(Q)$ pour $\lambda = \alpha = 1$

On retombe donc dans le troisième cas étudié précédemment :

$$\begin{cases} Q_{\text{libre}}(t) &= \sqrt{2E}(t - t_0) \\ P_{\text{libre}}(t) &= \sqrt{2E} \end{cases} \quad (36)$$

iv. Dans le cas oscillatoire :

$$\begin{cases} q_{\text{osc.}}(t) &= \alpha + \sqrt{\frac{2E}{\lambda^2 m} + \frac{1}{2}\alpha^2} \sin[\lambda(t - t_0)] \\ p_{\text{osc.}}(t) &= -\lambda\alpha m + \sqrt{2Em + \frac{1}{2}\lambda^2\alpha^2 m^2} \{\cos[\lambda(t - t_0)] - \sin[\lambda(t - t_0)]\} \end{cases} \quad (37)$$

Dans le cas libre :

$$\begin{cases} q_0(t) &= \sqrt{\frac{2E}{m}}(t - t_0) \\ p_0(t) &= \sqrt{2Em} \{1 - \lambda(t - t_0)\} \end{cases} \quad (38)$$

A noter que les conditions d'applications sont $Q \rightarrow \pm\infty$, $P \rightarrow \mp\infty$.