

Mécanique analytique — corrigé 0

*Assistants : hugo.chkroun@epfl.ch, brenno.delucca@epfl.ch, garance.durr-legoupil-nicoud@epfl.ch
fanny.eustachon@epfl.ch, solange.flatt@epfl.ch, shiling.liang@epfl.ch
adelade.mohr@epfl.ch, alexandra.shelest@epfl.ch, adrian.woyke@epfl.ch*

Cette série 0 consistant essentiellement de révisions, on ne donnera ici que les solutions, en général sans la démonstration. Si vous avez des soucis avec ces calculs, reprenez d'abord vos cours de mathématiques.

Exercice 1 : Fonctions de plusieurs variables

- a) Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, qui à (x, y) associe $f(x, y)$. Sa différentielle est

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (1)$$

- b) Si à présent y n'est plus une variable indépendante de x , mais une fonction $y : x \rightarrow y(x)$, la fonction que l'on considère est différente. Appelons-la $\tilde{f}$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ désormais, qui à x associe $\tilde{f}(x) = f(x, y(x))$. En vertu de la loi de composition des dérivées, le calcul de la dérivée de cette fonction est donné par :

$$\frac{d\tilde{f}}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \quad (2)$$

Par un léger abus de langage/notation, on notera aussi df/dx cette quantité, que l'on nommera dérivée totale de f par rapport x . On notera que cette quantité diffère de la dérivée partielle $\partial f/\partial x$, et que la définition d'une telle dérivée totale n'a de sens que si y est définie explicitement comme dépendant de x (et alors la dérivée totale de f par rapport à x n'est autre que la dérivée usuelle de $\tilde{f}(x) = f(x, y(x))$ par rapport à x). L'abus de langage qui consiste à ajouter la notion de dérivée totale aux notions usuelles de dérivée et de dérivées partielles provient du raccourci qui consiste à employer une même notation pour une lettre muette y (variable indépendante de x) et la fonction $y : x \mapsto y(x)$, ou le même symbole pour les fonction f (à deux variables) et $\tilde{f}$ (à une variable). Cet abus de langage est néanmoins standard, et c'est pourquoi un exercice est utile à propos de cette notion. En cas de doute dans vos calculs, n'hésitez pas à revenir sur ce type de distinction entre f et $\tilde{f}$. Enfin, pour répondre à la question de l'énoncé, et en vertu de cette définition d'une dérivée totale, la différentielle ("totale") de f par rapport à x s'écrit alors

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) dx. \quad (3)$$

On notera qu'il n'apparaît ici plus qu'un déplacement infinitésimal dx , ce qui s'interprète en remarquant que le déplacement dy est contraint par la forme de $y(x)$ (au lieu d'être un déplacement indépendant) et qu'en fait il s'agit de la variation infinitésimale d'une fonction $\tilde{f}$ à un seul paramètre.

- c) A la lumière de la question précédente, il s'agit de comprendre la chose suivante : l'énoncé définit en fait une fonction

$$g : (x_1, x_2, x_3) \mapsto g(x_1, x_2, x_3) \quad (4)$$

de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, qui a pour dérivées partielles $\partial_1 g = \partial g / \partial x_1$, $\partial_2 g = \partial g / \partial x_2$ et $\partial_3 g = \partial g / \partial x_3$, et une fonction

$$\tilde{g} : t \mapsto \tilde{g}(t) = g(x(t), y(x(t), t), \dot{y}(x(t), t)), \quad (5)$$

où $x : t \mapsto x(t)$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et y est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de dérivée partielles $\partial_1 y$ et $\partial_2 y$. La dérivée totale $\dot{y} = dy/dt$ est définie comme la dérivée usuelle de $\tilde{y} : t \mapsto \tilde{y}(t) = y(x(t), t)$, c'est-à-dire $d\tilde{y}/dt = \dot{\tilde{y}}$. Cette dernière est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\dot{\tilde{y}} : t \mapsto \dot{\tilde{y}}(t) = \partial_1 y(x(t), t) \frac{dx}{dt} + \partial_2 y(x(t), t). \quad (6)$$

Par composition des dérivées, on a

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{g}}{dt} &= \partial_1 g \frac{dx}{dt} + \partial_2 g \frac{d\tilde{y}}{dt} + \partial_3 g \frac{d\dot{\tilde{y}}}{dt} \\ &= \partial_1 g \frac{dx}{dt} + \partial_2 g \frac{d\tilde{y}}{dt} + \partial_3 g \frac{d^2 \tilde{y}}{dt^2} \\ &= \partial_1 g \frac{dx}{dt} + \partial_2 g \left(\partial_1 y \frac{dx}{dt} + \partial_2 y \right) + \partial_3 g \left(\partial_1^2 y \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + 2\partial_{12} y \frac{dx}{dt} + \partial_2^2 y + \partial_1 y \frac{d^2 x}{dt^2} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Par économie de notation (ou abus, selon le point de vue), on note ceci

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial y}{\partial t} \right) + \frac{\partial g}{\partial \dot{y}} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + 2\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial y}{\partial x} \frac{d^2 x}{dt^2} \right). \quad (8)$$

Si x ne dépend pas de t , la dérivée de x par rapport t s'annule : $dx/dt = 0$, d'où

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (9)$$

Comme g dépend explicitement de x , y et $\dot{y}$, mais seulement implicitement de t , par contre, on obtient

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 0. \quad (10)$$

Si x dépend explicitement de t , alors la dérivée partielle $\partial g / \partial t$ est encore nulle (car g ne dépend qu'implicitement de t), mais la dérivée totale voit apparaître les termes supplémentaires de l'équation (8).

Remarque : vous allez voir dans le cours des exemples de fonctions avec lesquelles on travaillera tantôt dans l'espace abstrait, tantôt dans une restriction de cette espace paramétrée par le temps (voir cours sur le lagrangien).

- d) La fonction $\mathcal{L}$ considérée ici s'appelle un Lagrangien. Nous allons voir au cours du semestre que cet objet est à la base d'une nouvelle formulation de la mécanique classique. Dans cet exercice, il s'agit simplement de se familiariser avec la dérivation par rapport à ses différents arguments. Comme vu précédemment, la fonction $\mathcal{L}$ dépend de q et de sa dérivée $\dot{q}$. Lors des dérivations partielles, ses deux variables sont à considérer comme indépendantes. Il vient

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\ddot{q}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -kq$$

et donc

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = m\ddot{q} + kq = 0$$

que l'on peut ré-écrire

$$\ddot{q} + \frac{k}{m}q = \ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

où l'on reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique.

Exercice 2 : Systèmes de coordonnées divers

1. Nous rappelons ici que pour une masse ponctuelle, l'énergie cinétique est définie par

$$E_{Cin} = \frac{1}{2}mv^2$$

où v est la norme du vecteur vitesse $\mathbf{v}$ de la masse. L'énergie potentielle de gravitation prend (pour des objets sur la surface de la terre) la forme bien connue

$$E_{Pot,G} = mgh$$

où l'on prendra bien soin de donner le bon signe à h .

A) L'énergie totale du système est composée des énergies des deux masses m_1 et m_2 . Traitons d'abord la masse m_1 . Sa vitesse étant horizontale selon x , son énergie cinétique vaut

$$E_{Cin,1} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

La masse étant contrainte à se déplacer sur une droite horizontale, son énergie potentielle sera constante

$$E_{Pot,1} = C$$

Pour calculer l'énergie cinétique de m_2 , il faut d'abord exprimer sa vitesse vectorielle en fonction des coordonnées x et θ . Calculons d'abord les coordonnées cartésiennes x_2 et y_2 de sa position en fonction de x et θ .

$$x_2 = x + L \sin \theta$$

$$y_2 = -L \cos \theta$$

Sa vitesse en coordonnées cartésiennes sera donc donnée par

$$v_2^x = \frac{d}{dt}x_2 = \dot{x} + \dot{\theta}L \cos \theta$$

$$v_2^y = \frac{d}{dt}y_2 = \dot{\theta}L \sin \theta$$

Le carré de la norme de la vitesse prend donc la forme

$$\mathbf{v}_2^2 = (v_2^x)^2 + (v_2^y)^2 = \dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}L \cos \theta + \dot{\theta}^2 L^2 \cos^2 \theta + \dot{\theta}^2 L^2 \sin^2 \theta = \dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}L \cos \theta + \dot{\theta}^2 L^2$$

et son énergie cinétique

$$E_{Cin,2} = \frac{m_2 \dot{x}^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\theta}^2 L^2}{2} + m_2 \dot{x}\dot{\theta}L \cos \theta$$

L'énergie potentielle de gravitation de m_2 est donnée par mgh , où l'on doit être attentif à définir correctement le signe de h . Puisque nous savons que le minimum de l'énergie potentielle gravitationnelle se trouve lorsque la masse est au plus bas, autrement dit en $\theta = 0$, il vient

$$E_{Pot,2} = -mgL \cos \theta$$

Finalement, l'énergie totale est donc donnée par :

$$E_{Tot} = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2 \dot{\theta}^2 L^2}{2} + m_2 \dot{x}\dot{\theta}L \cos \theta - mgL \cos \theta$$

où l'on a fixé la constante (arbitraire) C à zéro.

B Nous allons procéder de façon similaire au point précédent, à savoir, d'abord écrire les positions cartésiennes des masses en fonction des variables du problème, puis dériver et calculer les énergies. Avec un peu d'entraînement, ces étapes deviendront automatiques, mais il est important de savoir comment effectuer ces calculs de base si l'on se trouve confronté à un problème pour lequel il n'est pas immédiatement facile d'écrire un terme cinétique.

Pour m_1 , on a

$$x_1 = L \sin \alpha$$

$$y_1 = -L \cos \alpha$$

$$v_1^x = \frac{d}{dt}x_1 = \dot{\alpha}L \cos \alpha$$

$$v_1^y = \frac{d}{dt}y_1 = \dot{\alpha}L \sin \alpha$$

Et donc

$$E_{Cin,1} = \frac{1}{2}m_1L^2\dot{\alpha}^2$$

On reconnait ici la relation entre la vitesse angulaire $\dot{\alpha}$ et la vitesse tangentielle d'un mouvement circulaire $v_T = \dot{\alpha}L$.

L'énergie potentielle de m_1 a été calculée au point **A**) est vaut

$$E_{Pot,1} = -m_1gL \cos \alpha$$

Pour m_2 , on obtient

$$x_2 = L \sin \alpha + l \sin(\alpha + \beta)$$

$$y_2 = -L \cos \alpha - l \cos(\alpha + \beta)$$

$$v_2^x = \frac{d}{dt}x_2 = \dot{\alpha}L \cos \alpha + (\dot{\alpha} + \dot{\beta})l \cos(\alpha + \beta)$$

$$v_2^y = \frac{d}{dt}y_2 = \dot{\alpha}L \sin \alpha + (\dot{\alpha} + \dot{\beta})l \sin(\alpha + \beta)$$

$$E_{Cin,2} = \frac{1}{2}m_2 \left(\dot{\alpha}^2L^2 + (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2l^2 + 2\dot{\alpha}(\dot{\alpha} + \dot{\beta})Ll \underbrace{(\cos \alpha \cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin(\alpha + \beta))}_{=\cos \beta} \right)$$

$$E_{Pot,2} = -m_2g(L \cos \alpha + l \cos(\alpha + \beta))$$

Et l'on obtient finalement :

$$E_{Tot} = \frac{m_1 + m_2}{2}L^2\dot{\alpha}^2 + \frac{(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2l^2m_2}{2} + m_2\dot{\alpha}(\dot{\alpha} + \dot{\beta})Ll \cos \beta \quad (11)$$

$$- (m_1 + m_2)gL \cos \alpha - m_2gl \cos(\alpha + \beta) \quad (12)$$

2. Commençons par considérer l'équation de Newton

$$\sum_i \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}. \quad (13)$$

où $\mathbf{F}_i$ dénote une force externe. Il y a deux forces externes : La force de rappel du ressort $\mathbf{F}_r = -k\sqrt{R^2 + z^2}\hat{\mathbf{e}}_r$ et la réaction du cylindre **T**. Nous savons que la force de réaction est

toujours normale à la surface qui la génère $\mathbf{T} = T\hat{\mathbf{e}}_\rho$. Si θ est l'angle entre la direction du ressort et l'axe central du ressort, le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{e}}_r$ s'écrit

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_z + \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\rho = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \hat{\mathbf{e}}_z + \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \hat{\mathbf{e}}_\rho. \quad (14)$$

En utilisant la formule pour l'accélération en coordonnées cylindriques donnée, nous pouvons projeter la deuxième loi de Newton sur les trois axes et obtenir

$$\begin{aligned} -kR + T &= m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) \\ 0 &= m(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) \\ -kz &= m\ddot{z}, \end{aligned} \quad (15)$$

où la première équation correspond à la composante selon $\hat{\mathbf{e}}_\rho$, la seconde à la composante selon $\hat{\mathbf{e}}_\phi$ et la troisième à la composante selon $\hat{\mathbf{e}}_z$. Puisque la masse est contrainte à se déplacer sur la surface du cylindre, nous avons $\rho = R$, $\dot{\rho} = 0$ and $\ddot{\rho} = 0$. Ceci se traduit directement en

$$\begin{aligned} -kR + T &= -mR\dot{\phi}^2 \\ \ddot{\phi} &= 0 \\ -kz &= m\ddot{z}. \end{aligned} \quad (16)$$

En regardant la seconde équation de 16, nous pouvons voir que la vitesse angulaire $\omega_1 \equiv \dot{\phi}$ est constante dans le temps. En remplaçant cette condition dans la première équation, nous obtenons

$$T = kR - m\rho\omega_1^2. \quad (17)$$

Il y a une interprétation physique simple à cette dernière expression : Si la force du ressort est plus grande que la force centrifuge, la masse est tirée vers l'intérieur du cylindre, et la réaction du cylindre doit donc s'opposer à cette force centrale et est donc orientée vers l'extérieur (positif selon $\hat{\mathbf{e}}_\rho$). Au contraire, si la force centrifuge domine, le cylindre doit éviter que la masse s'échappe vers l'extérieur du cylindre, et pointera donc dans la même direction que la force de rappel du ressort (négatif selon $\hat{\mathbf{e}}_\rho$). Dans le cas particulier où la composante radiale de la force de rappel est exactement compensée par la force centrifuge, la force de soutien est nulle, et le système se comporte comme s'il n'y avait pas de cylindre.

Dans la troisième équation du système, nous reconnaissons l'équation de l'oscillateur harmonique.

$$z(t) = A \cos(\omega_r t) + B \sin(\omega_r t), \quad (18)$$

où $\omega_r = \sqrt{k/m}$ est la fréquence propre de l'oscillateur et A et B sont des constantes qui dépendent des conditions initiales. Le comportement du système dépend donc des valeurs relatives de ω_1 and ω_r . Si ω_1 est plus grand, la particule fait plus d'un tour horizontal pour chaque oscillation verticale, et la trajectoire ressemble à une hélice verticale. Si au contraire $\omega_r > \omega_1$, pour chaque tour horizontal, il y a plusieurs oscillations verticales, et la trajectoire ressemble à une sinusoïde enroulée sur un cylindre. Dans le cas $\omega_r = \omega_1$, les deux oscillations sont en phase, et la trajectoire est une ellipse fermée, avec de plus $T = 0$ comme vu plus haut.

Exercice supplémentaire 1 : Prérequis de Mathématiques et de Physique

1. Le calcul direct de la limite donne la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. En utilisant la règle de L'Hôpital, on dérive le numérateur et le dénominateur séparément et l'on prend ensuite la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^{3x} + e^{-x}}{1} = 4. \quad (19)$$

2. L'angle θ entre les deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ est défini par :

$$\theta = \arccos \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} \right),$$

avec

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 - 2 - 12 = -14,$$

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14},$$

$$\|\mathbf{b}\| = \sqrt{0 + 1 + 16} = \sqrt{17},$$

d'où

$$\theta = \arccos \left(\frac{-14}{\sqrt{14}\sqrt{17}} \right) \simeq 155.16^\circ.$$

3. Pour trouver les valeurs propres, nous devons résoudre le système linéaire d'équations

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0.$$

Explicitement, nous obtenons

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

D'où

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0; \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1.$$

Le vecteur propre $\mathbf{v}$ associé à la valeur propre $i = 1, 2$ est trouvé en résolvant l'équation

$$A\mathbf{v} = \lambda_i \mathbf{v}.$$

qui donne pour $\lambda_1 = 2$,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 \\ 2v_2 \end{pmatrix}; \quad 2v_2 = -v_1; \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

et pour $\lambda_2 = -1$,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix}; \quad v_1 = v_2; \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Commençons par normaliser les deux vecteurs propres : $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1)$ and $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$. La transformation U pour passer de la base canonique $\{(1, 0), (0, 1)\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ à la base des

vecteurs propres de $A \{(-2, 1), (1, 1)\} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ trouvés dans le point 3 est la transformation inverse U^{-1} dont les colonnes sont formées par $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Pour calculer explicitement la matrice U , résolvons le système $UU^{-1} = \mathbb{1}$, d'où l'on obtient

$$U = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}.$$

Notons que puisque la matrice n'est pas symétrique, les vecteurs propres ne sont pas orthogonaux, et ne forment par conséquent pas une base orthogonale. Ceci a pour conséquence que la norme d'un vecteur $\mathbf{a} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2$ n'est pas donnée par la relation usuelle

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \neq a_1^2 + a_2^2. \quad (20)$$

En appliquant la transformation (changement de base) U à la matrice initiale A , nous obtenons une matrice diagonale A' avec les valeurs propres sur la diagonale

$$A' = UAU^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Ici, pas de difficultés particulières. Les solutions de ces deux équations différentielles sont

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y^2x^3, \quad \frac{dy}{y^2} = x^3dx, \quad \int \frac{dy}{y^2} = \int x^3dx, \quad \frac{-1}{y} = \frac{x^4}{4} + C. \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{y(x^2 - 1)}{y + 1} \text{ pour } y \neq -1, \quad dy \frac{y + 1}{y} = (x^2 - 1)dx, \quad \int dy \left(1 + \frac{1}{y}\right) = \int (x^2 - 1)dx, \\ y + \ln(|y|) &= \frac{x^3}{3} - x + C. \end{aligned}$$

Notez que pour la deuxième équation, il n'est pas possible d'écrire explicitement $y = f(x)$, nous nous contentons donc d'une solution sous forme implicite.

6. Le moment d'inertie autour de l'axe principal z perpendiculaire à l'anneau et passant par son centre est donné par

$$I_z = \int R^2 dm.$$

L'anneau a une densité linéaire constante $\tau = \frac{dm}{dl}$ et l'élément infinitésimal de longueur est donné par $dl = R d\theta$. Nous avons donc $dm = \tau dl = \tau R d\theta$ et l'intégrale s'écrit donc

$$I_z = \int_0^{2\pi} R^2 \tau R d\theta = 2\pi R^3 \tau.$$

En notant la masse totale de l'anneau $M = 2\pi R \tau$, nous pouvons écrire

$$I_z = MR^2$$

7. Pour calculer le moment d'inertie par rapport à un axe parallèle à un axe principal d'inertie et à une distance d , nous utilisons le théorème de Steiner

$$I'_z = I_z + Md^2.$$

où d est la distance entre les deux axes parallèles, qui vaut ici R . Nous obtenons

$$I'_z = MR^2 + MR^2 = 2MR^2.$$

8. Nous pouvons utiliser soit les théorèmes de Newton, soit la loi de Gauss pour démontrer que le champ gravitationnel à une distance $r < R$ à l'intérieur de la terre n'est généré que par la masse contenue dans une sphère de rayon r concentrique avec la terre. On peut démontrer par un calcul géométrique que toutes les contributions de la masse à l'extérieur de cette sphère s'annulent. Une masse ponctuelle m à une distance $r < R$ à l'intérieur de la terre ne ressentira donc que l'attraction effective d'une fraction de la masse de la terre. Pour déterminer la force ressentie par m , il faut donc d'abord calculer la fraction de masse contenue dans sphère de rayon r , i.e. $M(r)$.

L'accélération gravitationnelle à distance r du centre sera donc donnée par

$$g_e = \frac{-GM(r)}{r^2}.$$

En considérant la densité de la terre constante, la masse $M(r)$ est donnée par

$$M(r) = \rho V(r) = \rho \frac{4}{3} \pi r^3.$$

En tombant, la masse m est donc soumise à une accélération

$$g_e = \frac{-G\rho \frac{4}{3} \pi r^3}{r^2} = -G\rho \frac{4}{3} \pi r.$$

On observe là une force de rappel, avec constante de rappel $k = G\rho \frac{4}{3} \pi m$. L'équation du mouvement de m sera donc donnée par un oscillateur harmonique de fréquence $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$r(t) = R \cos \left(\sqrt{\frac{4}{3} G \rho \pi} t \right).$$