Examen Mécanique Analytique 2020

Paolo De Los Rios

5 août 2020

Règles

La durée de l'examen est de 3h00. L'examen comporte trois exercices indépendants. Épreuve sans document ni calculatrice. Toute réponse appelle une justification, même succincte. Les parties écrites au crayon ne seront pas corrigées. Écrire nom, prénom et numéro SCIPER sur chaque feuille. Signer la feuille de présence au moment de rendre le travail.

Exercice 1: (15 points)

Deux particules de masse m_1 et m_2 sont soumises à deux contraintes:

- Elles doivent bouger sur la surface d'une sphère de rayon R, centrée à l'origine
- Elles appartiennent à un plan contenant l'axe z et définit par $\varphi = \varphi(t)$, une fonction du temps donnée (le plan bleu dans la figure ci-dessous).

Elles interagissent par le biais d'un potentiel

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{2}k(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2$$

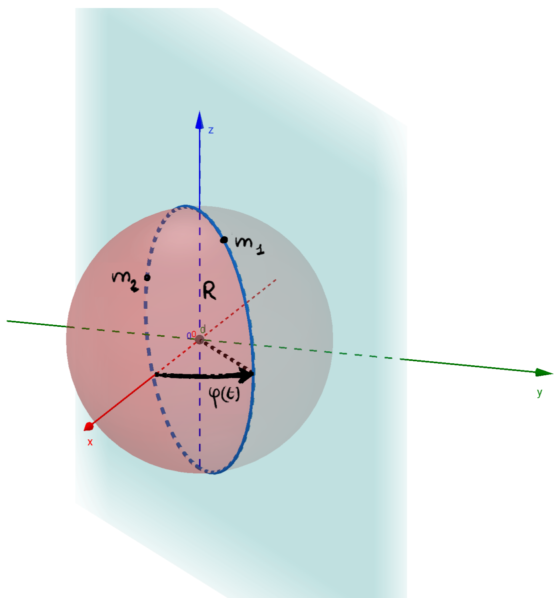


Figure 1

a) Combien de degrés de liberté le système possède-t-il?

b) Y a-t-il des quantités conservées? Si oui, lesquelles?

c) Écrire le Lagrangien du système et les équations de Lagrange.

d) Calculer l'Hamiltonien du système

e) Trouver le potentiel efficace

Rappel:

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$$
$$\sin a \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$

À présent, on élimine la deuxième particule, et le potentiel correspondant. Avec une seule particule, on fixe $\varphi(t) = \omega_0 t$ et on ajoute le potentiel

$$V(\theta) = \frac{V_0}{\sin^2(\theta)}$$

L'angle θ corresponds à l'angle que fait la particule avec l'axe z dans le plan défini par $\varphi(t)$.

f) Montrer que, dans ce cas-là, le Lagrangien devient

$$L(\theta, \dot{\theta}, t) = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \omega_0^2 \sin^2 \theta) - \frac{V_0}{\sin^2 \theta}$$

Donner également l'Hamiltonien et le potentiel efficace du système.

g) Trouver le/les points d'équilibre et en discuter la stabilité.

h) Calculer la fréquence (ou mode) propre de petites oscillations.

i) Dessiner le portrait de phase.

j) Donner l'expression permettant de calculer la variable d'action, **sans la calculer**, et expliquer comment vous feriez pour calculer la période d'oscillation de la particule.

Exercice 2: (5 points)

Un système est décrit par les coordonnées généralisées q_1 et q_2 et ses impulsions conjuguées p_1 et p_2. Une transformation mène à un nouvel ensemble de coordonnées et impulsions Q_1, Q_2, P_1 et P_2.

$$P_1 = \frac{p_1}{2Aq_1p_2 + 1} \qquad Q_1 = Aq_1^2 p_2 + q_1$$

$$P_2 = p_2 \qquad Q_2 = q_2 + Aq_1^2 \frac{p_1}{2Aq_1p_2 + 1}$$

a) La transformation est-elle canonique?

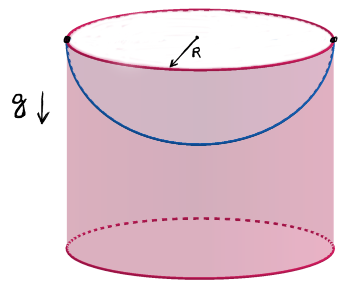
b) Si oui, trouver la fonction génératrice $F_2(q_1, q_2, P_1, P_2, t)$ qui engendre cette transformation. On rappelle que

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \qquad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$$

c) Déterminer la dimension de A par rapport à celles de q_1, q_2, P_1 et P_2.

Exercice 3: (4 points)

Une corde de longueur L est attachée sur **l'extérieur** d'un cylindre, de rayon R, comme sur la figure ci-dessous. Les deux extrémités sont attachées aux côtés opposés d'un diamètre et à hauteur z=0. La corde a une masse linéique μ et est soumise à la gravité g. Déterminer la forme optimal de $z(\varphi)$.



Indication: On cherche seulement la forme générale de la fonction sans en déterminer les constantes.

Rappel:
$\operatorname{arccosh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
$\operatorname{arcsinh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$\operatorname{arctanh}'(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$