Mécanique Analytique 2018-2019

La calculatrice n'est pas autorisée .

Ne pas écrire au crayon : les parties écrites au crayon ne seront pas corrigées.

Exercice 1 (10 points)

Une particule de masse m est contrainte à se déplacer sur un cercle de rayon r dont le centre compris dans le plan xy est à une distance R de l'origine, $R>r$ (Fig.1) . Le cercle appartient à un plan vertical contenant l'axe z et tournant autour de celui-ci selon un loi $\varphi(t)$ donnée. Aucune force externe ne s'applique sur la particule (en particulier, la gravité est négligée) .

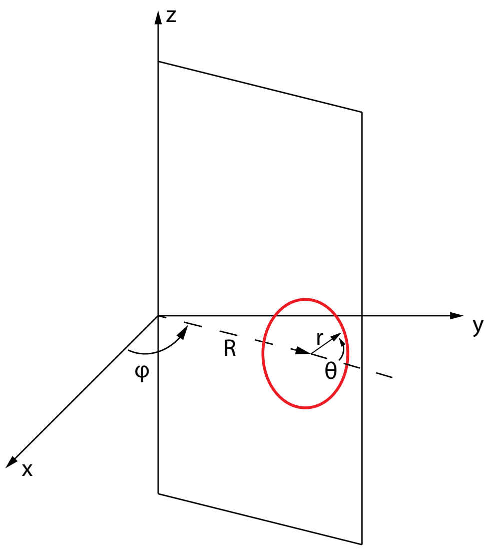

Fig.1

1.a) Combien de degrés de liberté le système possède-t-il?

1.b) Écrire le Lagrangien du système et l'équation de Lagrange correspondante en considérant que $\varphi(t)=\omega_0 t$.

1.c) Trouver les positions d'équilibre mécanique. Dire si elles sont stables ou instables. Pour la position d'équilibre stable, déterminer la fréquence ω des petites oscillations.

1.d) Existe-t-il une ou plusieurs quantité(s) conservée(s) ? Si oui, préciser laquelle/lesquelles ?

1.e) Écrire l'Hamiltonien du système.

1.f) Dessiner le portrait de phase du système.

1.g) Écrire la formule *I(E)* (*E* est l'énergie du système et *I* la variable action) qui est à la base de la transformation vers les variables action-angle. Il s'agit d'une intégrale qu'on ne peut pas résoudre exactement, donc il faut seulement l'écrire.

1.h) (Très calculatoire) Dans la limite des petites oscillations, calculer l'intégrale et montrer que la fréquence obtenue est la même qu'au point (1.c). (Conseil : développer aussi le point de rebroussement pour les petites oscillations).

Exercice 2 (5 points)

Un système est décrit par une coordonnée généralisée q et son impulsion conjuguée p. Une transformation mène à deux nouvelles variables, Q et P. Les deux relations suivantes sont données

$$p = qP + \eta P^2 + \lambda t \qquad Q = \frac{1}{2}q^2 + qP$$

où, bien évidemment, t est le temps.

2.a) Quelle est la valeur de η telle que la transformation est canonique ?

2.b) Déterminer la fonction de type $F_2(q, P, t)$ qui engendre la transformation.

Rappel :

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} \qquad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$$

2.c) La transformation canonique permet de passer de l'Hamiltonien d'origine $H(q, p, t)$ à un nouvel Hamiltonien $K(Q, P, t) = 0$. Déterminer la forme de l'Hamiltonien d'origine, $H(q, p, t)$.

2.d) Écrire les équations de Hamilton pour q et p et les résoudre.

Exercice 3 (5 points)

Une particule sphérique se déplace dans un tube droit rempli d'eau. On considère son déplacement comme unidimensionnel et celui-ci est freiné par la force de frottement visqueux :

$$f_v = -\gamma v$$

où v est la vitesse de la particule et γ est le coefficient de friction.

La particule est également soumise à une force externe $f(t)$ dont la forme temporelle est connue mais, pour l'instant, pas spécifiée.

3.a) Écrire l'expression de l'énergie dissipée à cause du frottement entre $t=0$ et $t=T$ (rappel : l'énergie dissipée par unité de temps est la puissance, qui dépend de la force et de la vitesse). Attention au signe : l'énergie dissipée est positive.

3.b) Écrire l'expression du travail de la force externe entre $t=0$ et $t=T$ (suivre la même démarche qu'au point 3.a).

3.c) La particule possède un moteur qui lui permet de réguler sa vitesse à chaque instant. Déterminer la vitesse $v(t)$ telle que l'énergie dissipée par le frottement entre $t=0$ et $t=T$ est minimisée. On considérera le travail de la force externe égal à W.

3.d) Supposons désormais que la force $f(t)=f_0$ est constante au cours du temps. Combien de façons y a-t-il pour résoudre le problème variationnel posé au point (3.c) ? Les montrer.