



Exercices du cours

PHYSIQUE GÉNÉRALE: ÉLECTROMAGNÉTISME

(PHYS-201c)

2024-2025

Giovanni Boero

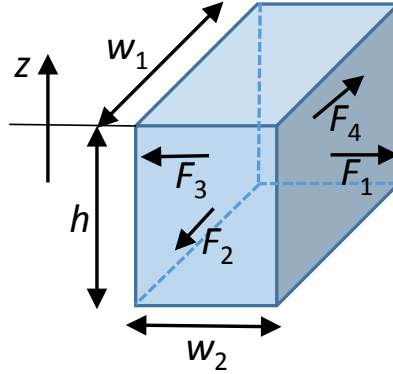
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL)

CH-1015 Lausanne, Switzerland

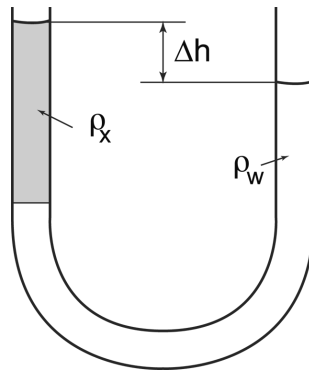
giovanni.boero@epfl.ch

Exercice 1.1

Un aquarium de longueur $w_1=0.80$ m, de largeur $w_2=0.4$ m et de hauteur $h=0.6$ m est entièrement rempli d'eau (densité $\rho_0=1000$ kg/m³). On suppose que l'eau est un fluide incompressible et on néglige la variation de la pression atmosphérique P_{atm} sur la hauteur de l'aquarium. Calculez la force qui agit sur chacune des quatre parois latérales de l'aquarium.

**Exercice 1.2**

On introduit de l'eau dans un tube en U, ouvert à ses extrémités, de section $S = 1$ cm². La densité de l'eau est $\rho_w=1000$ kg/m³. Après, d'un côté du tube, on introduit 100 ml d'huile ayant une densité $\rho_x = 0.8\rho_w$. Trouver la différence de niveau Δh entre les deux surfaces libres.

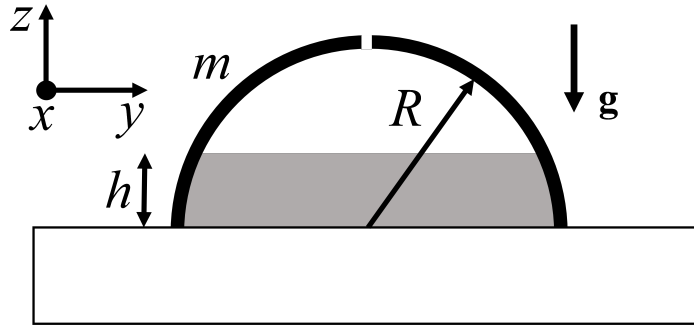


Exercice 1.3

Une cloche hémisphérique, de rayon R et masse m , est posée sur une surface lisse horizontale. Grâce à une ouverture au sommet de la cloche, on verse gentiment un liquide de densité ρ jusqu'à un niveau h .

En supposant que la pression atmosphérique P_{atm} est uniforme autour de la coque hémisphérique, déterminer:

- La force de pression totale $\mathbf{F}_P = (F_{Px}, F_{Py}, F_{Pz})$ agissant sur la cloche (en fonction de h , g , et ρ).
- Le niveau h auquel la cloche se soulève (en fonction de m et ρ).

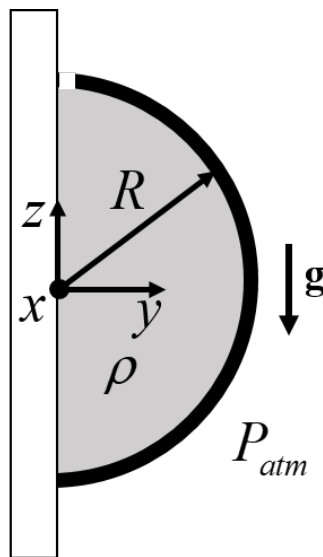


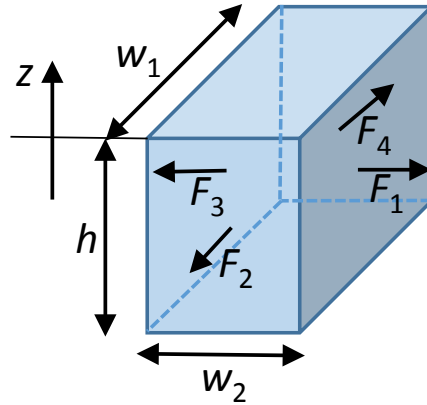
Note:

$$\int \cos \theta \sin \theta d\theta = -\frac{1}{2}(1 - \sin^2 \theta); \int \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = \frac{\sin^3 \theta}{3}$$

Exercice 1.4

Une coque hémisphérique de rayon R , d'épaisseur et de masse négligeables, est appuyée contre une paroi verticale lisse. La coque hémisphérique est entièrement remplie d'eau à travers un très petit trou à son sommet (c'est-à-dire en $(0, 0, R)$). La densité de l'eau est ρ . Déterminez la force minimale $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ qui doit être appliquée à la coquille pour la maintenir en place, en supposant que la pression atmosphérique P_{atm} est uniforme autour de la coque hémisphérique.



Exercice 1.1

A l'équilibre la pression dans l'aquarium est:

$$P(z) = P_{atm} - \rho_0 g z$$

où P_{atm} est la pression atmosphérique à l'extérieur de l'aquarium. P_{atm} agit sur les deux surfaces de chaque paroi, donc la force de pression agissant sur chaque élément de surface infinitésimal ds_i de la paroi S_i est:

$$dF_i = (-P_{atm} + P_{atm} - \rho_0 g z) ds_i = -\rho_0 g z ds_i \quad (1)$$

La force totale sur la paroi S_i est:

$$F_i = \int_{S_i} -\rho_0 g z ds_i = w_i \int_{-h}^0 -\rho_0 g z dz = \frac{1}{2} \rho_0 g w_i h^2 .$$

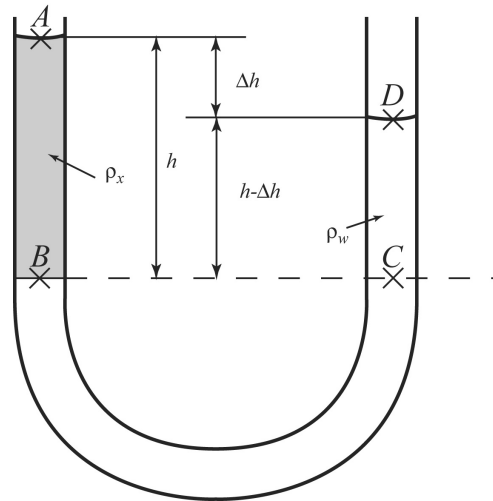
Application numérique:

$$w_1 = 0.8 \text{ m}, w_2 = 0.4 \text{ m et } h = 0.6 \text{ m} \implies$$

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_3| = 1.4 \times 10^3 \text{ N}$$

$$|\vec{F}_2| = |\vec{F}_4| = 0.7 \times 10^3 \text{ N}$$

Exercice 1.2



Le système est à l'équilibre et le tube est ouvert à ses extrémités, donc:

$$\begin{aligned}P_A &= P_D = P_{\text{atm}} \\P_B &= P_C\end{aligned}$$

La loi de la variation de pression dans le cas statique nous permet de poser:

$$\begin{aligned}P_B &= P_A + \rho_x g h \\P_C &= P_D + \rho_w g (h - \Delta h)\end{aligned}$$

En combinant ces équations, on trouve:

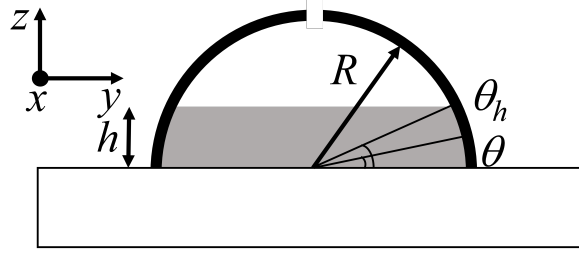
$$\begin{aligned}P_{\text{atm}} + \rho_x g h &= P_{\text{atm}} + \rho_w g (h - \Delta h) \\ \Rightarrow \rho_x h &= \rho_w (h - \Delta h) \\ \Rightarrow \Delta h &= h \left(1 - \frac{\rho_x}{\rho_w} \right) = 0.2h\end{aligned}$$

Remarque: La différence de hauteur Δh dépend du rapport entre la densité de l'huile et celle de l'eau (ρ_x/ρ_w) mais pas de leurs valeurs absolues ρ_x et ρ_w .

Application numérique:

$$S = 1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ et } V = Sh = 100 \text{ ml} = 10^{-4} \text{ m}^3 \Rightarrow h = V/S = 1 \text{ m} \Rightarrow \Delta h = 0.2 \text{ m}.$$

Exercice 1.3



La pression exercée par l'eau à l'intérieur est:

$$P_{int} = P_{atm} + \rho g (h - R \sin \theta)$$

La pression exercée par l'air à l'extérieur est:

$$P_{ext} = P_{atm}$$

donc la différence de pression agissant sur la surface de la coque hémisphérique est:

$$P_c = \rho g (h - R \sin \theta)$$

La force de pression $d\mathbf{F}_P$ agissant sur l'élément de surface ds de la coque hémisphérique est:

$$d\mathbf{F}_P = P_c ds$$

$$ds = R^2 \cos \theta d\theta d\varphi (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$$

Pour la symétrie du problème, la force de pression totale agissant sur la cloche est dirigée le long de l'axe z :

$$\mathbf{F}_P = F_{P,z} \hat{\mathbf{z}}$$

avec:

$$dF_{P,z} = d\mathbf{F}_P \cdot \hat{\mathbf{z}} = P_c R^2 \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi$$

donc:

$$\begin{aligned} F_{P,z} &= \int_0^{\theta_h} \int_0^{2\pi} P_c R^2 \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi \int_0^{\theta_h} P_c R^2 \cos \theta \sin \theta d\theta = \\ &= 2\pi R^2 \rho g \left[\int_0^{\theta_h} h \cos \theta \sin \theta d\theta - \int_0^{\theta_h} R \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \right] = \\ &= 2\pi R^2 \rho g \left[\frac{1}{2} h \sin^2 \theta_h - \frac{1}{3} R \sin^3 \theta_h \right] \end{aligned}$$

mais:

$$\sin \theta_h = \frac{h}{R}$$

donc:

$$F_{P,z} = \frac{1}{3}\pi\rho gh^3.$$

La cloche se soulève lorsque que la force due à la pression $F_{P,z}$ est supérieure à la force de gravité $F_{g,z}$, donc pour $F_{P,z} > mg$ et donc pour $h > \sqrt[3]{\frac{3m}{\pi\rho}}$.

Note: Puisque h ne peut pas être plus grand que R , afin de soulever la cloche sa masse m doit être inférieure à $\pi\rho R^3/3$ (obtenu à partir de $h = R = \sqrt[3]{3m/\pi\rho}$).

Méthode 2:

$$P_c = \rho g (h - z)$$

et

$$\sin \theta = \frac{z}{R} \quad d\theta = \frac{dz}{R \cos \theta}$$

donc:

$$\begin{aligned} dF_{P,z} &= d\mathbf{F}_P \cdot \hat{\mathbf{z}} = P_c R^2 \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = P_c R^2 \cos \theta \frac{z}{R} \frac{dz}{R \cos \theta} d\varphi = \\ &= P_c z dz d\varphi \end{aligned}$$

donc:

$$\begin{aligned} F_{P,z} &= \int_0^h \int_0^{2\pi} P_c z dz d\varphi = \\ &= 2\pi\rho g \int_0^h z(h-z) dz = 2\pi\rho g \int_0^h (zh - z^2) dz = \\ &= 2\pi\rho g \left(\left[\frac{1}{2} z^2 h \right]_0^h - \left[\frac{1}{3} z^3 \right]_0^h \right) = 2\pi\rho g \left(\frac{1}{2} h^3 - \frac{1}{3} h^3 \right) = \frac{1}{3} \pi \rho g h^3. \end{aligned}$$

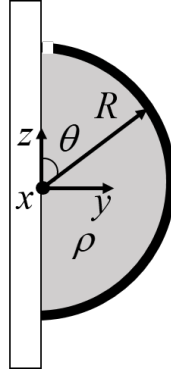
Remarque: Juste au-dessus nous avons dit que par symétrie on s'attend à ce que $F_{P,x} = F_{P,y} = 0$. Voici la démonstration:

$$\begin{aligned} dF_{P,x} &= d\mathbf{F}_P \cdot \hat{\mathbf{x}} = P_c R^2 \cos^2 \theta \cos \varphi d\theta d\varphi \\ dF_{P,y} &= d\mathbf{F}_P \cdot \hat{\mathbf{y}} = P_c R^2 \cos^2 \theta \sin \varphi d\theta d\varphi \end{aligned}$$

donc:

$$\begin{aligned} F_{P,x} &= \int_0^{\theta_h} \int_0^{2\pi} P_c R^2 \cos^2 \theta \cos \varphi d\theta d\varphi = 0 \\ F_{P,y} &= \int_0^{\theta_h} \int_0^{2\pi} P_c R^2 \cos^2 \theta \sin \varphi d\theta d\varphi = 0 \end{aligned}$$

Exercice 1.4



Méthode 1:

La coque hémisphérique est soumise à la force due à la pression exercée par l'eau à l'intérieur et à la force due à la pression exercée par l'air à l'extérieur. La pression exercée par l'eau à l'intérieur:

$$P_{int} = P_{atm} + \rho g(R - z)$$

La pression exercée par l'air à l'extérieur:

$$P_{ext} = P_{atm}$$

donc la différence de pression agissant sur la surface de la coque hémisphérique est:

$$P_c = P_{int} - P_{ext} = \rho g(R - z) = \rho gR(1 - \cos \theta)$$

La force $d\mathbf{F}_c$ agissant sur l'élément de surface ds de la coque hémisphérique est:

$$d\mathbf{F}_c = P_c ds$$

$$ds = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

donc:

$$dF_{c,x} = d\mathbf{F}_c \cdot \hat{\mathbf{x}} = P_c R^2 \sin^2 \theta \cos \varphi d\theta d\varphi$$

$$dF_{c,y} = d\mathbf{F}_c \cdot \hat{\mathbf{y}} = P_c R^2 \sin^2 \theta \sin \varphi d\theta d\varphi$$

$$dF_{c,z} = d\mathbf{F}_c \cdot \hat{\mathbf{z}} = P_c R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi$$

$$F_{c,x} = \int_0^\pi \int_0^\pi P R^2 \sin^2 \theta \cos \varphi d\theta d\varphi = \rho g R^3 \left(\int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi - \int_0^\pi \cos \theta \sin^2 \theta d\theta \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi \right) = 0$$

$$F_{c,y} = \int_0^\pi \int_0^\pi P R^2 \sin^2 \theta \sin \varphi d\theta d\varphi = \rho g R^3 \left(\int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi - \int_0^\pi \cos \theta \sin^2 \theta d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \right) = \pi R^3 \rho g$$

$$F_{c,z} = \int_0^\pi \int_0^\pi PR^2 \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi = \rho g R^3 \left(\int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^\pi d\varphi - \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^\pi d\varphi \right) = -(2/3)\pi R^3 \rho g$$

donc la force minimale qui doit être appliquée à la coque hémisphérique est:

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}_c = (0, -\pi R^3 \rho g, (2/3)\pi R^3 \rho g)$$

Note:

La pression atmosphérique est uniforme donc la force d'Archimède agissant sur la coque hémisphérique rempli d'eau est nulle.

Méthode 2:

L'intuition permet d'éviter tous les calculs pour les composantes F_x et F_z . La composante F_y peut également, bien que de manière plus élaborée, être obtenue intuitivement.

F_x :

Par symétrie du problème $F_x = 0$.

F_z :

$F_z = mg = \rho(2/3)\pi R^3 g$ est le poids de la coque hémisphérique remplie d'eau.

F_y :

Au lieu de considérer les forces sur la coque hémisphérique, nous pouvons considérer les forces sur le fluide à l'intérieur de celle-ci. Les forces agissant sur le fluide dans la direction y sont la force de réaction de la paroi $F_{1,y}$ en raison de la pression du fluide et la force due à la pression atmosphérique externe $F_{2,y}$. La différence entre ces deux forces fournit la force F_y que nous devons appliquer de l'extérieur.

$$F_{1,y} = \int_0^R \int_0^{2\pi} (\rho g r (R - r \cos \theta) + P_{atm}) r dr d\theta = \rho g \pi R^3 + \pi R^2 P_{atm}$$

$$F_{2,y} = P_{atm} R^2 \int_0^\pi \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \varphi d\theta d\phi = \pi R^2 P_{atm}$$

donc:

$$F_y = F_{2,y} - F_{1,y} = -\rho g \pi R^3$$

La force de réaction de la paroi $F_{1,y}$ peut être obtenu aussi en considérant qu'elle est donnée par la pression au centre de la surface en contact avec la paroi multipliée par la surface de contact entre la paroi et le liquide:

$$F_{1,y} = P_{int}(0, 0, 0) \pi R^2 = \pi R^3 \rho g + R^2 P_{atm}$$

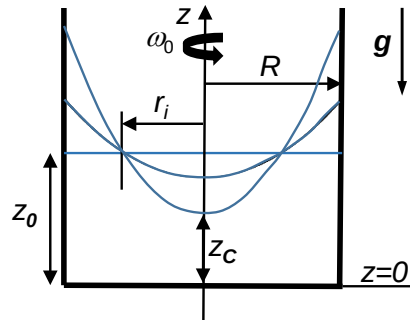
Ceci se justifie par le fait que la pression dépend linéairement de z et que la surface de contact est circulaire. On peut donc considérer la pression moyenne qui est celle au centre de la surface circulaire.

Exercice 2.1

Un récipient cylindrique contenant un fluide idéal et incompressible de densité ρ_0 tourne autour de son axe avec une vitesse angulaire ω_0 . Connaissant le rayon R du récipient ainsi que la hauteur z_0 du fluide au repos, déterminez:

- la forme de la surface libre du liquide $z = z(r)$.
- la hauteur z_c au centre du récipient.
- le rayon r_i pour lequel la hauteur du fluide ne dépend pas de la vitesse de rotation.

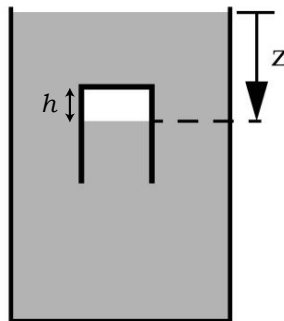
Suggestion: utiliser un référentiel tournant en coordonnées cylindriques.

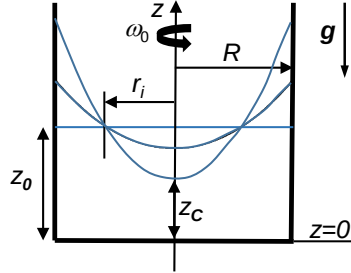
**Exercice 2.2**

Un ludion cylindrique (i.e., un verre renversé) de rayon r et masse m est immergé dans un récipient d'eau (voir figure). Sa partie supérieure contient une hauteur h d'air. La pression au-dessus du récipient est la pression atmosphérique P_{atm} .

- Déterminer la résultante F des forces verticales agissant sur le ludion en fonction de h et tracer le graphique $F(z)$.
- Déterminer la profondeur z à laquelle le ludion sera en équilibre.
- Supposons que le ludion est en position d'équilibre à la pression atmosphérique $P_{atm,1}$. Si la pression atmosphérique augmente à une nouvelle valeur $P_{atm,2} > P_{atm,1}$, qu'est-ce qui va arriver au ludion ?

Assomptions: 1) l'air est considéré comme un gaz parfait isotherme ($PV = Nk_B T$), 2) l'épaisseur des parois du ludion est négligeable.



Exercice 2.1

a) Dans le référentiel qui tourne autour de l'axe z , en coordonnées cylindriques (r, φ, z) la condition d'équilibre est:

$$-\nabla P - \rho_0 g \vec{e}_z + \rho_0 \omega_0^2 r \vec{e}_r = 0 \quad (1)$$

Methode 1:

En coordonnées cylindriques (r, φ, z) :

$$\nabla P = \frac{\partial P}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{e}_z \quad (2)$$

donc:

$$\begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial r} + \rho_0 \omega_0^2 r = 0 \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho_0 g = 0 \end{cases}$$

Le différentielle de la fonction scalaire P en coordonnées cylindriques est:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial r} dr + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial P}{\partial z} dz$$

Pour une isobare $dP = 0$, donc:

$$0 = \rho_0 \omega_0^2 r dr - \rho_0 g dz$$

et donc:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{\omega_0^2 r}{g}$$

et enfin:

$$z(r) = \frac{\omega_0^2 r^2}{2g} + z_c$$

avec $z_c = z(r = 0)$.

Methode 2:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial r}P + \rho_0\omega_0^2r = 0 \\ -\frac{\partial}{\partial z}P + \rho_0g = 0 \\ -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}P = 0 = 0 \end{cases}$$

donc:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}P = \rho_0\omega_0^2r \\ \frac{\partial}{\partial z}P = \rho_0g \\ .. \end{cases}$$

donc:

$$\begin{cases} P = \frac{1}{2}\rho_0\omega_0^2r^2 + f(z) + C_1 \\ P = \rho_0gz + g(r) + C_2 \\ ... \end{cases}$$

donc une solution possible est:

$$P(r, z) = \frac{1}{2}\rho_0\omega_0^2r^2 + \rho_0gz + C$$

La pression ne dépend pas de φ (i.e., $P = P(r, z)$), en accord avec la symétrie du problème. Afin de déterminer la constante C , considérons la surface libre du fluide au milieu du cylindre en rotation:

$$r = 0 \quad P = P_0 \quad z = z_c \quad (3)$$

donc

$$P_0 = -\rho_0gz_c + C \quad (4)$$

et donc

$$C = P_0 + \rho_0gz_c \quad (5)$$

La pression dans le fluide est donc:

$$P(r, z) = -\rho_0gz + \frac{1}{2}\rho_0\omega_0^2r^2 + P_0 + \rho_0gz_c. \quad (6)$$

A la surface libre du fluide $P = P_0$, donc:

$$P_0 = -\rho_0gz + \frac{1}{2}\rho_0\omega_0^2r^2 + P_0 + \rho_0gz_c. \quad (7)$$

et donc:

$$z(r) = \frac{\omega_0^2r^2}{2g} + z_c. \quad (8)$$

C'est l'équation d'un paraboloïde de révolution.

Methode 3:

$$-\rho_0 g \vec{e}_z + \rho_0 \omega_0^2 r \vec{e}_r = -\nabla(\rho_0 g z - \frac{1}{2} \rho_0 \omega_0^2 r^2) , \quad (9)$$

d'où:

$$\nabla(P + \rho_0 g z - \frac{1}{2} \rho_0 \omega_0^2 r^2) = 0$$

et donc:

$$P + \rho_0 g z - \frac{1}{2} \rho_0 \omega_0^2 r^2 = C \quad (10)$$

et, enfin, la pression est:

$$P = -\rho_0 g z + \frac{1}{2} \rho_0 \omega_0^2 r^2 + C. \quad (11)$$

b) Afin de trouver z_c il suffit d'appliquer la conservation du volume du fluide:

$$V_{\omega=0} = z_0 \pi R^2 = V_{\omega=\omega_0} = \int_0^R 2\pi r z(r) dr \quad (12)$$

ou z_0 est la hauteur du liquide dans le cylindre au repos (i.e., pour $\omega=0$). Donc:

$$z_0 \pi R^2 = \int_0^R 2\pi r \left(\frac{\omega_0^2 r^2}{2g} + z_c \right) dr \quad (13)$$

et donc

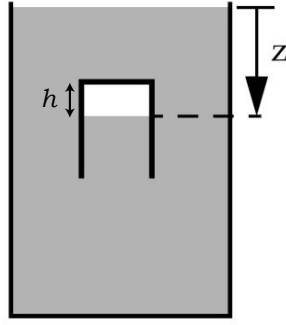
$$z_c = z_0 - \frac{\omega_0^2 R^2}{4g} \quad (14)$$

et enfin

$$z(r) = \frac{\omega_0^2}{2g} (r^2 - (R^2/2)) + z_0 \quad (15)$$

c) Dans l'equation (12) pour $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$, $z(r = \frac{R}{\sqrt{2}}) = z_0$, donc la hauteur du liquide à une distance $r_i = \frac{R}{\sqrt{2}}$ de l'axe du cylindre est indépendant de la vitesse de rotation du cylindre.

Exercice 2.2



a) La pression dans le liquide est donnée par:

$$P_{liquide}(z) = P_{atm} + \rho g z \quad (16)$$

Soit $h(z)$ la hauteur d'air dans le ludion. L'air est considéré comme un gaz parfait isotherme. Donc:

$$P_{air}(z)V(z) = P_{air}(z)h(z)\pi r^2 = Nk_B T = \text{const.} \quad (17)$$

où r est le rayon du ludion. Mais:

$$P_{air}(z) = P_{liquide}(z) \quad (18)$$

donc:

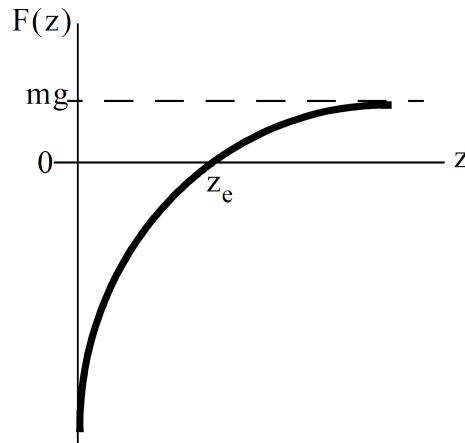
$$h(z) = \frac{Nk_B T}{\pi r^2 (P_{atm} + \rho g z)} \quad (19)$$

La résultante des forces agissant sur le ludion est donnée par la somme du poids et de la force d'Archimède:

$$\vec{F}(z) = (mg - \rho g \pi r^2 h(z)) \vec{e}_z = \left(mg - \frac{\rho g N k_B T}{P_{atm} + \rho g z} \right) \vec{e}_z \quad (20)$$

où m est la masse du ludion et ρ la densité de l'eau. La figure décrit $F(z)$.

Note: la force d'Archimède, pour ce système constitué d'un ludion et d'un volume d'air, dépend de la profondeur z .



b) La profondeur z_e à laquelle le ludion est en équilibre est telle que $F(z_e) = 0$, d'où:

$$z_e = \frac{Nk_B T}{mg} - \frac{P_{atm}}{\rho g} \quad (21)$$

L'équilibre est instable !

c) Si la pression atmosphérique augmente, la force d'Archimède devient plus petite (voir Eq.20). Donc, en partant de la position d'équilibre, une augmentation de la pression atmosphérique a pour effet d'enfoncer le ludion dans l'eau. Le ludion n'atteindra pas une nouvelle position d'équilibre, il descendra au fond du réservoir.

Note 1: Si la pression atmosphérique augmente, la position d'équilibre est plus proche de la surface (i.e., moins en profondeur, voir Eq. 21). Ceci n'est pas en contradiction avec le réponse à la question c).

Note 2: Nous pouvons répondre à la question a) avec une démarche équivalent. On peut considérer toutes les forces agissant sur la surface horizontale du ludion:

$$\vec{F}(z) = mg\vec{e}_z + \pi r^2 P_{liquide}(z-h)\vec{e}_z - \pi r^2 P_{air}(z-h)\vec{e}_z$$

$$P_{liquide}(z-h) = P_{atm} + \rho g(z-h)$$

$$P_{air}(z-h) = P_{air}(z) = P_{liquide}(z) = P_{atm} + \rho g z$$

$$P_{air}(z)V = P_{air}(z)\pi r^2 h = Nk_B T$$

$$P_{air}(z) = P_{liquid}(z) = P_{atm} + \rho g z$$

$\Rightarrow$

$$h = \frac{Nk_B T}{\pi r^2 (P_{atm} + \rho g z)}$$

$$\vec{F}(z) = mg\vec{e}_z - \pi r^2 \rho g h$$

$\Rightarrow$

$$\vec{F}(z) = \left(mg - \rho g \frac{Nk_B T}{(P_{atm} + \rho g z)} \right) \vec{e}_z$$

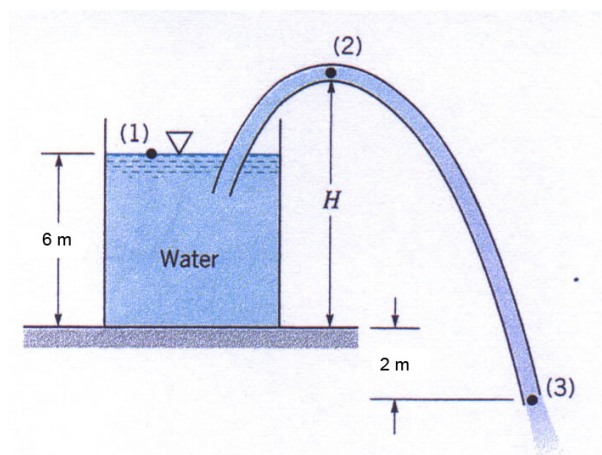
ce qui est le même résultat que Eq. 20.

Exercice 3.1

Le jet d'eau de Genève mesure 140 m de haut. Calculez la vitesse de l'eau à la base du jet. On supposera que la buse a un profil adapté, de sorte que le vecteur vitesse est vertical et constant sur toute la section du jet.

Exercice 3.2

On utilise un siphon pour vider un récipient contenant de l'eau à 16 °C. Quelle est la hauteur maximale H du siphon si on veut éviter la formation de bulles (cavitation) au sommet du siphon? L'extrémité du siphon se trouve 2 m sous le fond du récipient. L'écoulement est suffisamment faible pour que l'on puisse considérer la hauteur de fluide constante. Supposons que la pression atmosphérique soit $P_{atm}=101400$ Pa, la densité de l'eau soit $\rho=1000$ kg/m³, et la pression de vapeur de l'eau à 16 °C soit $P_{sat}=1765$ Pa. On supposera que les hypothèses de la loi de Bernoulli sont vérifiées.

**Exercice 3.3**

a) Dessiner et déterminez les lignes de courant $y = y(x)$ pour un écoulement stationnaire bidimensionnel décrit par le champ de vitesse:

$$\vec{v} = \left(\frac{v_0}{l}\right)(x\vec{e}_x - y\vec{e}_y)$$

b) Déterminez le champ d'accélération de cet écoulement stationnaire.

Exercice 3.4

Dans le plan horizontal xz , un fluide parfait et incompressible s'écoule autour d'une sphère de rayon α . La pression en A loin de la sphère (i.e., pour $x = -\infty$) est P_0 . La vitesse le long de la ligne de courant A-B (i.e., de $x = -\infty$ à $x = -\alpha$) est donnée par:

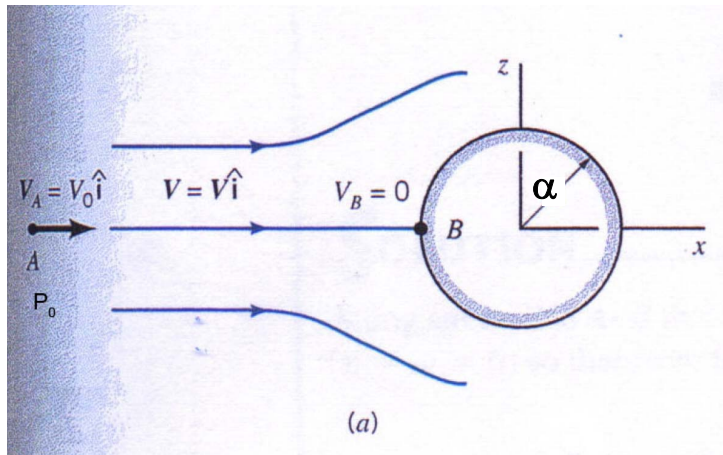
$$\vec{v} = (v_x, 0, 0)$$

avec

$$v_x = v_0 \left(1 + \frac{\alpha^3}{x^3} \right)$$

Calculez:

- l'accélération des particules fluides le long de la ligne de courant A-B.
- la pression P le long de la ligne de courant A-B à partir de l'équation de Bernoulli.
- la pression P le long de la ligne de courant A-B à partir de l'équation d'Euler.



Exercice 3.1

Soit A la base du jet d'eau et B son sommet. On peut résoudre le problème avec l'équation de Bernoulli:

$$P + \rho g z + \rho \frac{v^2}{2} = \text{cte} ;$$

$$\text{en A: } z = 0 \implies P_{atm} + \rho \frac{v^2}{2} = \text{cte};$$

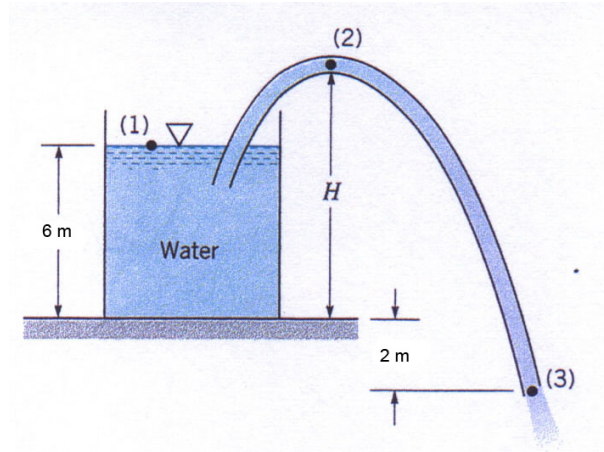
$$\text{en B: } z = h, v = 0 \implies P_{atm} + \rho g h = \text{cte}.$$

et donc

$$P_{atm} + \rho \frac{v^2}{2} = P_{atm} + \rho g h ;$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2gh} \quad \Rightarrow \quad v = 52 \text{ m/s} = 188 \text{ km/h}.$$

Exercice 3.2



Si la loi de Bernoulli est applicable, pour la ligne de courant de (1) à (2) à (3) nous pouvons donc écrire :

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 = P_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 + \rho g z_3,$$

avec (voir figure) $z_1 = 6 \text{ m}$, $z_2 = H$, $z_3 = -2 \text{ m}$, et $P_1 = P_3 = P_{atm}$. La hauteur du fluide est presque constant donc $v_1 \cong 0$. Puisque le siphon a un diamètre constant, l'équation de continuité (conservation de la masse) donne:

$$v_2 = v_3 .$$

L'équation de Bernoulli entre les points (2) et (3) donne la pression p_2 au sommet du siphon comme :

$$P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_3^2 + \rho g z_3 = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_3 ,$$

donc:

$$P_2 = P_{atm} - \rho g(z_2 - z_3) ,$$

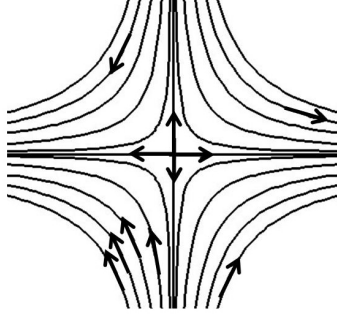
et donc:

$$z_2 = \frac{P_{atm} - P_2}{\rho g} + z_3 .$$

Des bulles commencent à se former au sommet du siphon lorsque P_2 atteint la valeur de 1765 Pa, la pression de vapeur de l'eau à 16 °C. De la dernière équation, on obtient $z_2 = H = 8.17 \text{ m}$. Pour des valeurs plus grandes de H , des bulles de vapeur se forment et l'action du siphon peut s'arrêter.

Exercice 3.3

a) En regardant l'expression du champ de vitesse (i.e., $v_x = (v_0/l)x$ et $v_y = -(v_0/l)y$) on peut approximativement dessiner les lignes de courant comme:



Par définition de ligne de courant:

$$d\vec{x}(\vec{x}, t) = \frac{\vec{v}(\vec{x}, t)}{|\vec{v}(\vec{x}, t)|}$$

donc:

$$dx = \frac{v_x}{|\vec{v}|} \quad dy = \frac{v_y}{|\vec{v}|}$$

Les lignes de courant vérifient donc l'équation différentielle suivante:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-yv_0/l}{xv_0/l} = -\frac{y}{x}$$

avec solution:

$$y = C/x .$$

qui correspond à l'équation d'une hyperbole pour chaque ligne (comme dessiné ci-dessus).

b) De façon générale, l'accélération s'exprime:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$$

L'écoulement est stationnaire donc $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$. De plus, l'écoulement est bidimensionnel donc $v_z = 0$ et $v_z \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \vec{0}$. L'accélération devient:

$$\vec{a} = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} = \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{e}_x + \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \vec{e}_y ,$$

ce qui donne:

$$\vec{a} = x \frac{v_0^2}{l^2} \vec{e}_x + y \frac{v_0^2}{l^2} \vec{e}_y$$

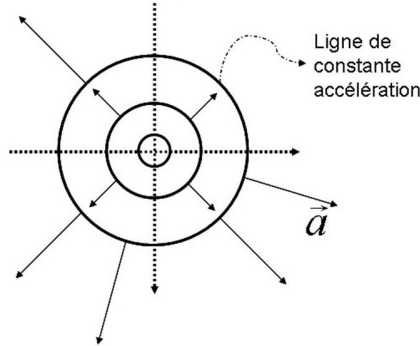
En coordonnées cylindriques:

$$\vec{e}_r = \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

donc:

$$\vec{a} = \frac{v_0^2}{l^2} r \vec{e}_r .$$

Le fluide a donc une accélération radiale avec amplitude constante sur des cercles concentriques à l'origine.



Note 1: Le champ des vitesses est stationnaire (l'écoulement est stationnaire) mais l'accélération est non-nulle.

Note 2:

$$\begin{aligned} (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} &= \left((v_x, v_y, v_z) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) (v_x, v_y, v_z) = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (v_x, v_y, v_z) = \\ &= \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}, v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}, v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} &= \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}, v_x \frac{\partial v_y}{\partial x}, v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \left(v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}, v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}, v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) + \left(v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}, v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}, v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \\ &= \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}, v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}, v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ \Rightarrow (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} &= v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \end{aligned}$$

Exercice 3.4

a) Le fluide est incompressible, l'écoulement est stationnaire et la ligne de courant est horizontale.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$$

mais l'écoulement est stationnaire donc:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

donc

$$\vec{a} = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \left((v_x, v_y, v_z) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) (v_x, v_y, v_z) = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (v_x, v_y, v_z)$$

mais le long de la ligne de courant A-B:

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = (v_x, 0, 0)$$

donc:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = (a_x, 0, 0)$$

avec

$$a_x = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -3v_0^2 \left(1 + \frac{\alpha^3}{x^3} \right) \frac{\alpha^3}{x^4} .$$

b) On applique l'équation de Bernoulli aux points A (i.e., $x = -\infty$) et x générique le long de la ligne de courant A-B:

$$P_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 = P(x) + \frac{1}{2} \rho v_x^2$$

donc

$$P_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 = P(x) + \frac{1}{2} \rho v_0^2 \left(1 + \frac{\alpha^3}{x^3} \right)^2$$

donc

$$P(x) - P_0 = -\rho v_0^2 \left[\left(\frac{\alpha}{x} \right)^3 + \frac{(\alpha/x)^6}{2} \right] .$$

c) L'équation d'Euler est:

$$\rho \vec{a} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla P + \rho \vec{g} .$$

mais l'écoulement est stationnaire donc:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

donc

$$\rho \vec{a} = \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla P + \rho \vec{g} .$$

La projection de l'équation d'Euler sur l'axe horizontal donne:

$$\rho a_x = -\frac{\partial P}{\partial x}$$

mais

$$a_x = -3v_0^2(1 + \frac{\alpha^3}{x^3})\frac{\alpha^3}{x^4}$$

donc

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = -3v_0^2\rho(1 + \frac{\alpha^3}{x^3})\frac{\alpha^3}{x^4} .$$

La variation de pression le long de la ligne de courant A-B est indiquée en figure (b). La pression augmente du point A au point B. Le gradient de pression est maximal juste avant la sphère ($x = -\sqrt[3]{7/4}\alpha = -1.205\alpha$) et $(\frac{\partial P}{\partial x})_{max} = 0.610\rho v_0^2/\alpha$. C'est le gradient de pression qui ralentit le fluide de $v_A = v_0$ à $v_B = 0$.

La distribution de pression le long de la ligne de courant peut être calculée en intégrant l'équation précédente de P_0 pour $x = -\infty$ à $P(x)$ pour x générique:

$$-\int_{-\infty}^x \frac{\partial P}{\partial x} dx = -\int_{-\infty}^x dP = -P(x) + P(-\infty) = -P(x) + P_0$$

donc:

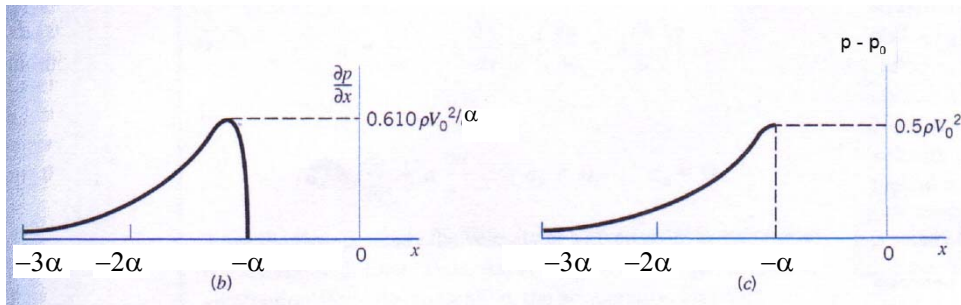
$$\begin{aligned} -\int_{-\infty}^x \frac{\partial P}{\partial x} dx &= -3v_0^2\rho \int_{-\infty}^x (1 + \frac{\alpha^3}{x^3})\frac{\alpha^3}{x^4} dx = -3v_0^2\rho (\int_{-\infty}^x (\frac{\alpha^3}{x^4} + \frac{\alpha^6}{x^7}) dx) = \\ &= -3v_0^2\rho (\int_{-\infty}^x \frac{\alpha^3}{x^4} dx + \int_{-\infty}^x \frac{\alpha^6}{x^7} dx) = -3v_0^2\rho (\left| -\frac{1}{3} \frac{\alpha^3}{x^3} \right|_{-\infty}^x + \left| -\frac{1}{6} \frac{\alpha^6}{x^6} \right|_{-\infty}^x) = \\ &= v_0^2\rho (\frac{\alpha^3}{x^3} + \frac{1}{2} \frac{\alpha^6}{x^6}) \end{aligned}$$

Donc:

$$P(x) - P_0 = -\rho v_0^2 [(\frac{\alpha}{x})^3 + \frac{(\alpha/x)^6}{2}] .$$

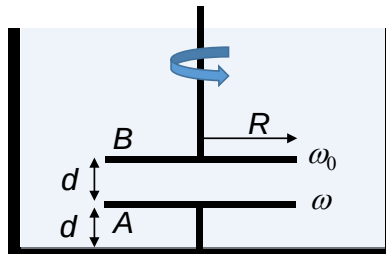
En utilisant l'équation d'Euler nous avons obtenu le même résultat mais avec l'équation de Bernoulli le calcul était plus simple.

Note: La pression en B (i.e., en $x = -\alpha$, le point de stagnation puisque $v_B = 0$), est la plus haute.



Exercice 4.1

Deux disques A et B de rayon R , alignés, peuvent tourner autour d'un même axe vertical z à l'intérieur d'un récipient rempli d'un fluide de viscosité η . Les distances entre A et B et entre A et le fond du récipient sont égales à d . Le disque B tourne à une vitesse angulaire constante $\omega_0 \vec{e}_z$. Pour $t < 0$, le disque A est maintenu bloqué. À $t=0$, le disque a une vitesse angulaire nulle (i.e., $\omega(t=0) = 0$), mais il est maintenant laissé libre de tourner (en raison de la rotation du disque B et de la présence du fluide entre les disques). Pour une distance $d \ll R$, on peut supposer que la variation de la vitesse dans la direction perpendiculaire aux disques est linéaire.



1. Quel est le moment des forces visqueuses qui s'exercent sur A à $t = 0$?
2. Quelle est la somme des moments qui agissent sur les deux surfaces du disque A lorsque sa vitesse est ω ?
3. Quelle est l'équation qui décrit la dynamique de A ? Le moment d'inertie de A est I_0 .
4. Quelle est la valeur asymptotique ω_∞ de la vitesse angulaire de A (i.e., $\omega(t = \infty)$) ?
5. Quelle est la dépendance temporelle de ω ?

Exercice 4.2

Un fluide de viscosité η s'écoule le long d'une conduite rectiligne de section circulaire (rayon R). L'écoulement est supposé stationnaire et laminaire, avec profil de vitesse de Poiseuille.

1. Calculer la puissance dissipée par le fluide sur un élément de conduite de longueur L .
2. Retrouver ce résultat en effectuant un bilan d'énergie sur un élément de conduite de longueur L .

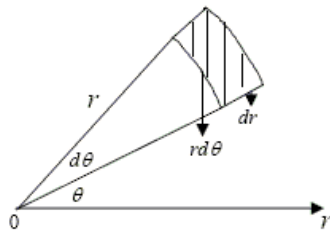
Exercice 4.1

1. La vitesse du fluide ($v = \omega r$) change linéairement dans la direction z perpendiculaire aux deux disques. Si la vitesse du disque B est ω_0 et la vitesse du disque A est nulle:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\omega_0 r}{d}$$

La force qui s'exerce sur un élément de surface $dS = r dr d\theta$ du disque A est:

$$d\vec{F} = \eta dS \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{e}_\theta = \eta \frac{\omega_0 r}{d} r dr d\theta \vec{e}_\theta = \eta \frac{\omega_0 r^2}{d} dr d\theta \vec{e}_\theta$$



Le moment correspondant est:

$$d\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F} = \eta \frac{\omega_0 r^3}{d} dr d\theta \vec{e}_z;$$

Pour trouver le moment qui s'exerce sur toute la surface, on intègre (voir figure)

$$\vec{\tau} = \int_0^{2\pi} \int_0^R \eta \frac{\omega_0 r^3}{d} dr d\theta \vec{e}_z = \eta \frac{\pi \omega_0}{2d} R^4 \vec{e}_z.$$

2. En appliquant la même procédure que dans la réponse 1) mais en considérant maintenant que le disque A tourne à la vitesse angulaire ω (et que le fond du réservoir ne tourne pas), les moments sur la partie supérieure et inférieure du disque A sont:

$$\vec{\tau}_{sup} = \eta \frac{\pi}{2d} R^4 (\omega_0 - \omega) \vec{e}_z ;$$

$$\vec{\tau}_{inf} = -\eta \frac{\pi}{2d} R^4 \omega \vec{e}_z$$

Donc le moment totale est:

$$\vec{\tau} = \eta \frac{\pi}{2d} R^4 (\omega_0 - 2\omega) \vec{e}_z .$$

3. L'équation fondamentale qui décrit la rotation autour d'un axe principal d'un objet de moment d'inertie I_0 sous l'action d'un moment $\vec{\tau}$ est:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} \quad \vec{L} = I_0 \omega \vec{e}_z$$

donc:

$$\frac{d\omega}{dt}\vec{e}_z = \eta \frac{\pi}{2dI_0} R^4 (\omega_0 - 2\omega) \vec{e}_z .$$

4. Étant donné que le disque B tourne à vitesse angulaire constante, il est tout à fait évident physiquement que l'accélération angulaire du disque A doit être nulle pour $t \rightarrow \infty$ (il atteint une condition stationnaire). Donc, lorsque $t \rightarrow \infty$,

$$\frac{d\omega}{dt} = \eta \frac{\pi}{2dI_0} R^4 (\omega_0 - 2\omega) = 0 ,$$

et donc:

$$\omega_\infty = \frac{\omega_0}{2} .$$

Donc la vitesse angulaire asymptotique du disque A est la moitié de la vitesse angulaire du disque B , ce qui est assez évident physiquement puisque le disque A est à égale distance du disque B qui tourne et du fond du réservoir qui ne tourne pas.

5. Pour trouver la dépendance temporelle de ω , on doit résoudre l'équation du point 3:

$$\frac{d\omega}{dt} = \eta \frac{\pi}{2dI_0} R^4 (\omega_0 - 2\omega) .$$

Méthode a): On peut réécrire cette équation comme:

$$\frac{d\omega}{dt} + 2a\omega = a\omega_0$$

avec:

$$a = \eta \frac{\pi}{2dI_0} R^4 .$$

On cherche d'abord la solution de l'équation homogène :

$$\frac{d\omega}{dt} + 2a\omega = 0 .$$

Cela donne:

$$\omega = ce^{-2at} .$$

c est une constante qui vient de l'intégration de l'équation. La solution particulière sera:

$$\omega = ce^{-2at} + b .$$

On peut déterminer b en utilisant le résultat du point 4. Lorsque $t \rightarrow \infty$, on a:

$$\omega = b = \frac{\omega_0}{2} .$$

Pour déterminer la constante c , on impose $\omega(0) = 0$, ce qui donne:

$$\omega(0) = c + \frac{\omega_0}{2} = 0 .$$

Donc:

$$c = -\frac{\omega_0}{2} .$$

On arrive alors à la solution:

$$\omega(t) = \frac{\omega_0}{2} (1 - e^{-\eta \frac{\pi}{dI_0} R^4 t}) .$$

Méthode b): On peut réécrire l'équation du point 3 comme:

$$\frac{d\omega}{dt} = a(\omega_0 - 2\omega)$$

avec:

$$a = \eta \frac{\pi}{2dI_0} R^4 .$$

donc:

$$\int \frac{d\omega}{\omega_0 - 2\omega} = \int a dt$$

donc:

$$-\frac{1}{2} \ln(\omega_0 - 2\omega) = at + c \Rightarrow$$

$$\ln(\omega_0 - 2\omega) = -2at + 2c \Rightarrow$$

$$\omega_0 - 2\omega = e^{-2at-2c} \Rightarrow$$

$$\omega(t) = \frac{1}{2}\omega_0 - \frac{1}{2}e^{-2at-2c}$$

mais:

$$\omega(t=0) = 0 \Rightarrow e^{-2c} = \omega_0$$

et donc:

$$\omega(t) = \frac{1}{2}\omega_0 (1 - e^{-2at})$$

et enfin:

$$\omega(t) = \frac{\omega_0}{2} (1 - e^{-\eta \frac{\pi}{dI_0} R^4 t})$$

comme avec la méthode a).

Exercice 4.2

1.

L'énergie dissipée est, par définition, le travail des forces de viscosité et de frottement sur les parois. Cependant, ce dernier est nul car la vitesse s'annule sur les parois. Le travail par unité de temps est la puissance dissipée:

$$P_{diss} = \int_V (\vec{f}_{visc} \cdot \vec{v}) dV$$

Pour un fluide incompressible, $\vec{f}_{visc} = \eta \nabla^2 \vec{v}$. Pour un écoulement stationnaire et laminaire de type Poiseuille, le profil de la vitesse est:

$$\vec{v} = v(r) \vec{e}_z = \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2) \vec{e}_z$$

où ΔP est la différence de pression de part et d'autre d'un élément de conduite de longueur L . Du fait de la symétrie cylindrique du problème, on écrit l'intégrale sous la forme suivante:

$$P_{diss} = \int_0^L \int_0^R (\eta \nabla^2 \vec{v}) \cdot \vec{v} dz 2\pi r dr.$$

Le laplacien en coordonnées cylindriques est (voir formulaire):

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \left(\nabla^2 A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left(\nabla^2 A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \hat{\boldsymbol{\varphi}} + (\nabla^2 A_z) \hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

donc:

$$\nabla^2 \vec{v} = (\nabla^2 v_z) \vec{e}_z = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right) \vec{e}_z = -\frac{\Delta P}{\eta L} \vec{e}_z$$

donc:

$$(\eta \nabla^2 \vec{v}) \cdot \vec{v} = -\frac{1}{4\eta} \left(\frac{\Delta P}{L} \right)^2 (R^2 - r^2)$$

et enfin:

$$P_{diss} = \frac{\pi}{2\eta} \left(\frac{\Delta P}{L} \right)^2 L \int_0^R dr (r^3 - rR^2) = -\frac{\pi(\Delta P)^2}{8\eta L} R^4.$$

2.

S'il n'y avait pas de forces dissipatives, l'énergie d'une particule fluide le long de chaque ligne de courant de (r, ϕ, z) à $(r, \phi, z + dz)$ serait conservée. Cela signifie que l'énergie dissipée dans la particule de fluide peut être calculée en déterminant la variation d'énergie entre (r, ϕ, z) et $(r, \phi, z + dz)$. Nous pouvons calculer la différence d'énergie d'une particule fluide de volume $dV = r dr d\phi dz$ le long de chaque ligne de courant de (r, ϕ, z) à $(r, \phi, z + dz)$ par la loi de Bernoulli.

$$dE_{diss} = \left(\frac{1}{2} \rho (v(r, z)^2 - v(r, z + dz)^2) + (P(z) - P(z + dz)) \right) dV.$$

Comme la vitesse ne dépend pas de z et que le profil de pression est linéaire en z , on a

$$v(r, z) = v(r, z + dz), P(z) - P(z + dz) = \frac{P_{in} - P_{out}}{L} dz,$$

et on peut écrire

$$dE_{diss} = \frac{P_{in} - P_{out}}{L} dz dV = \frac{\Delta P}{L} dz dV.$$

On trouve ainsi pour la puissance

$$dP_{diss} = \frac{dE_{diss}}{dt} = \frac{dE_{diss}}{dz/v(r)} = \frac{\Delta P}{L} v(r) dV$$

La puissance dissipée totale dans le cylindre de longueur L est

$$P_{diss} = \int_V dP_{diss} = \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_0^R \frac{v(r)\Delta P}{L} r dr d\phi dz = \frac{\pi}{2\eta} \left(\frac{\Delta P}{L}\right)^2 L \int_0^R (rR^2 - r^3) dr = \frac{\pi(\Delta P)^2}{8\eta L} R^4$$

tel qu'obtenu en 1.

Exercice 5.1

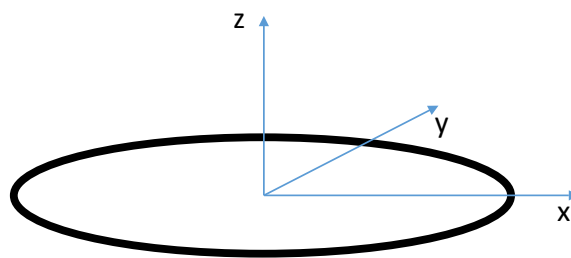
Un fil de longueur L et de densité de charge linéique λ (en C/m) est aligné verticalement entre $z = -\frac{L}{2}$ et $z = \frac{L}{2}$.

- Calculez le champ électrique $\vec{E}$ au point $P = (x, 0, 0)$.
- En faisant la limite pour $L \gg x$ et $L \ll x$ de la solution trouvée en a), les expressions que vous obtenez sont les solutions exactes de quelles configurations de charge ?

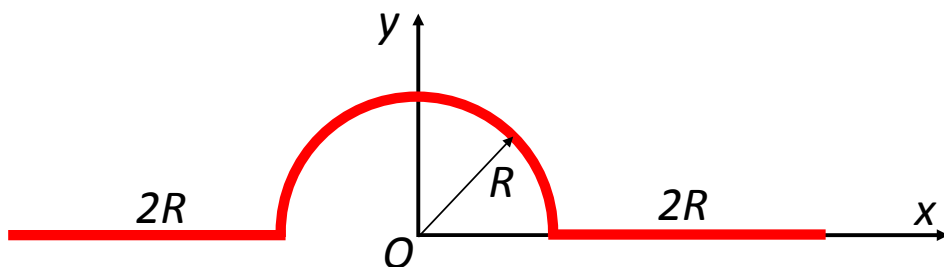
Exercice 5.2

Une charge q est répartie uniformément le long d'une spire circulaire de rayon R situé dans le plan xy .

- Calculer le champ électrique créée par cette distribution de charge au point $P(0, 0, z)$ situé sur l'axe de la spire.
- Calculer le potentiel électrostatique au point $P(0, 0, z)$.
- Retrouver le champ électrique à partir du potentiel calculé en b).

**Exercice 5.3**

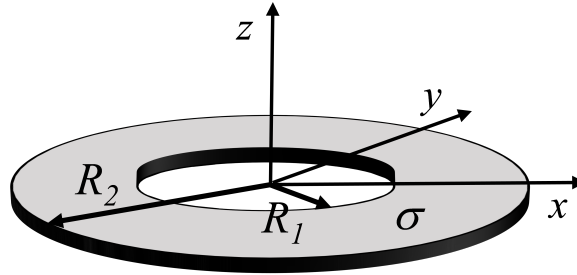
Un fil avec densité de charge linéique $\lambda > 0$ a été plié comme indiqué dans la figure. Calculer le potentiel électriques et le champ électrique au point O . Pour le calcul du potentiel électrique, on suppose que $V(\infty) = 0$.



Exercice 5.4

Un disque de rayon R_2 et épaisseur négligeable a un trou circulaire de rayon R_1 au milieu. Sur le disque il y a une densité de charge de surface uniforme négative σ (en C/m^2). Un électron de masse m et charge e , part du centre du trou $(0,0,0)$ avec vitesse initiale $v = v_0 \hat{z}$.

Si la gravité a un effet négligeable, quelle vitesse l'électron atteint à une distance très grande du disque ?

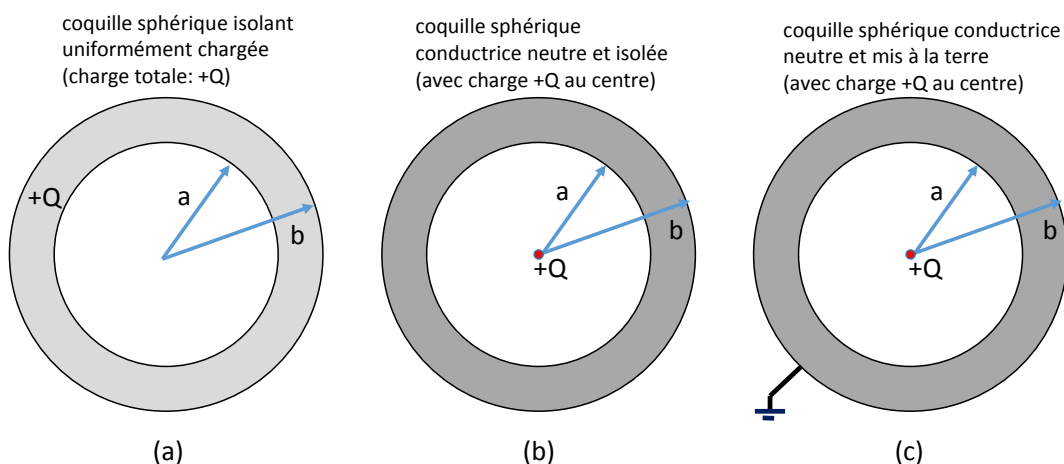


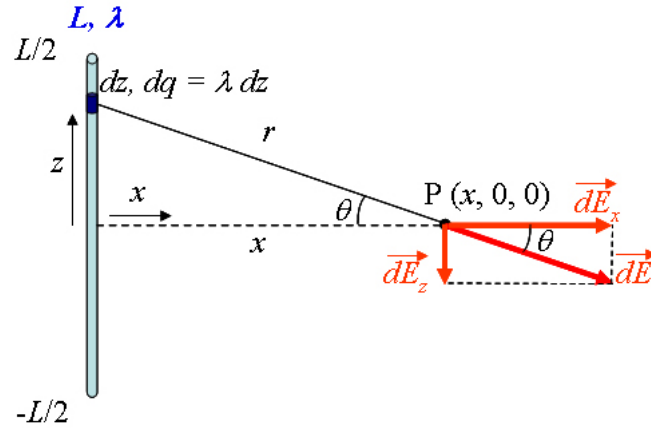
Exercice 5.5

a) Une coquille sphérique isolante, centrée à l'origine O des axes cartésiens, est uniformément chargée (rayon interne a , rayon externe b , charge totale $+Q$). Calculez, en tout point de l'espace, le potentiel électrique $V(\mathbf{r})$ et le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Représentez graphiquement les fonctions $V(\mathbf{r})$ et la composante radiale de $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

b) Une coquille sphérique conductrice, centrée à l'origine O des axes cartésiens, est électriquement neutre et isolée (rayon interne a , rayon externe b). Une charge $+Q$ est placée au centre de la coquille, en O . Calculez, en tout point de l'espace, le potentiel électrique $V(\mathbf{r})$ et le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Représentez graphiquement les fonctions $V(\mathbf{r})$ et la composante radiale de $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

c) Même système que en b) mais cette fois la coquille conductrice est *mis à la terre*, i.e., à un potentiel électrique $V = 0$. Calculez, en tout point de l'espace, le potentiel électrique $V(\mathbf{r})$ et le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Représentez graphiquement les fonctions $V(\mathbf{r})$ et la composante radiale de $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Quelle est la charge totale Q_{tot} sur la coquille ?



Exercice 5.1

a) Par symétrie du problème, on s'attend à ce que le champ électrique créé en $P(x, 0, 0)$ par le fil chargé est orienté suivant l'axe x , i.e., $\vec{E}(x, 0, 0) = E_x(x, 0, 0)\vec{e}_x$.
La contribution d'un élément infinitésimal dz de charge $dq = \lambda dz$ au point $P(x, 0, 0)$ est:

$$dE_x(x, 0, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dz}{r^2} \cos \theta$$

$$dE_z(x, 0, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \sin \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dz}{r^2} \sin \theta$$

De la figure, on peut déduire que:

$$z = x \tan \theta \rightarrow \frac{dz}{d\theta} = x \frac{1}{\cos^2 \theta} \rightarrow dz = x \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

$$r = \frac{x}{\cos \theta}$$

D'où:

$$dE_x(x, 0, 0) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{x} d\theta .$$

$$dE_z(x, 0, 0) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin \theta}{x} d\theta .$$

Pour obtenir le champ total en $P(x, 0, 0)$, il faut intégrer entre les angles $-\theta_{max}$ et θ_{max} :

$$E_x(x, 0, 0) = \left(\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{x} \int_{-\theta_{max}}^{\theta_{max}} \cos \theta d\theta = \left(\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{x} 2 \sin \theta_{max}$$

$$E_z(x, 0, 0) = \left(\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{x} \int_{-\theta_{max}}^{\theta_{max}} \sin \theta d\theta = 0$$

Comme prévu ci-dessus, la composante z du champ électrique en $P(x, 0, 0)$ est nulle car la composante z du champ électrique créée par les charges situées en $z > 0$ est égale en amplitude mais de signe opposé à la composante z du champ électrique créé par les charges en $z < 0$. Puisque:

$$\sin \theta_{max} = \frac{L/2}{\sqrt{x^2 + L^2/4}},$$

on obtient :

$$E_x(x, 0, 0) = \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{x} \frac{L/2}{\sqrt{x^2 + L^2/4}}.$$

b) Comme on pourrait s'y attendre intuitivement, dans la limite $x \ll L$, on retrouve l'expression pour un fil infini

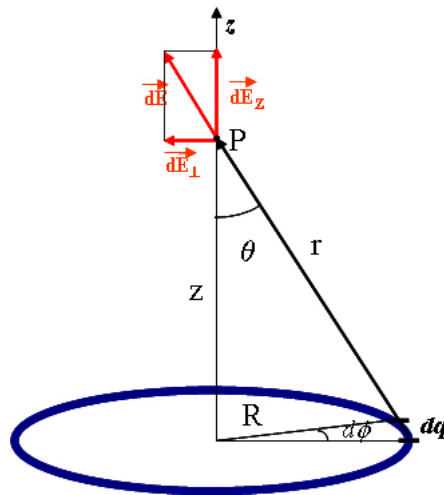
$$E_x(x, 0, 0) = \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{x},$$

et dans le limite $x \gg L$ on retrouve l'expression pour une charge ponctuelle $q = \lambda L$

$$E_x(x, 0, 0) = \left(\frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{x^2}.$$

Exercice 5.2

a) De la symétrie du problème on peut déduire que $\vec{E}(0, 0, z) = E_z(0, 0, z)\vec{e}_z$:



$$dE_z(0, 0, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2 + z^2} \cos \theta$$

$$\cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$dE_z(0, 0, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{(R^2 + z^2)^{3/2}} z$$

Si on appelle λ la densité de charge linéique, on peut écrire

$$q = \lambda 2\pi R \quad \text{et} \quad dq = \lambda R d\phi$$

Donc:

$$dE_z(0, 0, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R\lambda d\phi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} z$$

et donc:

$$E_z(0, 0, z) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\phi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} z = \frac{2\pi}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(R^2 + z^2)^{3/2}} z .$$

Note: si nous considérons que toute la charge est concentrée en un seul point de la spire circulaire, nous obtenons que la composant z du champ électrique $\vec{E}$ le long de l'axe z (i.e., $E_z(0, 0, z)$) est en fait la même:

$$E_z(0, 0, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(R^2 + z^2)} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(R^2 + z^2)^{3/2}} z$$

b) En supposant que $V(\infty) = 0$, nous pouvons calculer le potentiel électrique comme suit:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{dq}{r}$$

mais $dq = \lambda dl = \lambda R d\phi$ et, sur les points de l'axe z , on a $r = \sqrt{z^2 + R^2}$, d'où

$$V(0, 0, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{R\lambda}{\sqrt{z^2 + R^2}} d\phi = \frac{R\lambda}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} .$$

c) Le champ électrique et potentiel électrique sont liés par $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r})$ donc:

$$E_z(x, y, z) = -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z}$$

donc:

$$E_z(0, 0, z) = -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{(0,0,z)}$$

et donc:

$$E_z(0, 0, z) = \frac{R\lambda}{2\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(R^2 + z^2)^{3/2}} z$$

qui est le même résultat que celui obtenu en a).

Note: en général, nous devons d'abord appliquer l'opérateur et ensuite nous devons calculer la fonction résultante dans les points d'intérêt:

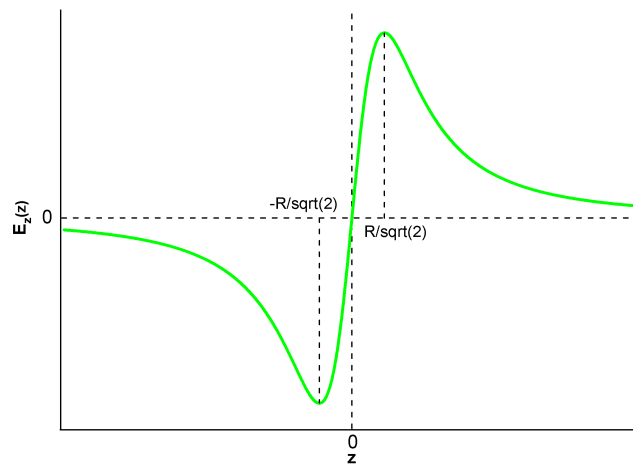
$$\vec{f}(x, y, z) = \nabla g(x, y, z) \Rightarrow \vec{f}(x = a, y = b, z = c) = \nabla g(x, y, z)|_{(x=a, y=b, z=c)} \neq \nabla g(x = a, y = b, z = c)$$

et:

$$f_z(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} g(x, y, z) \Rightarrow f(x = a, y = b, z = c) = \frac{\partial}{\partial z} g(x, y, z)|_{(x=a, y=b, z=c)} \neq \frac{\partial}{\partial z} g(x = a, y = b, z = c)$$

mais:

$$f_z(x = 0, y = 0, z) = \frac{\partial}{\partial z} g(x, y, z) \Big|_{(x=0, y=0, z)} = \frac{\partial}{\partial z} g(x = 0, y = 0, z)$$



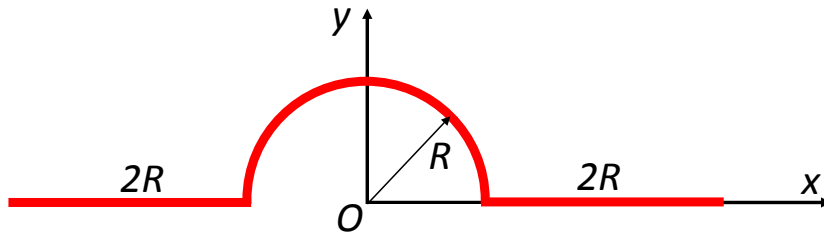
Exercice 5.3

La charge apportée par un petit élément d'une des branches rectilignes est $dq = \lambda dx$ et par un petit élément du cercle elle est $dq = \lambda R d\theta$. Le potentiel au point O s'obtient en décomposant les contributions des deux segments et du demi-cercle. Soyez prudent avec les signes, penser à la signification physique du potentiel. Pour éviter des erreurs, voyez sur les diapositives du cours ou sur le formulaire comment calculer les intégrales de ligne d'un champ scalaire. En supposant que $V(\infty) = 0$, nous pouvons calculer le potentiel électrique comme suit:

$$V(0, 0, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_R^{3R} \frac{\lambda dx}{|x|} + \int_0^\pi \frac{\lambda R d\theta}{R} + \int_R^{3R} \frac{\lambda dx}{|x|} \right)$$

$$V(0, 0, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\lambda \ln(x) \Big|_R^{3R} + \frac{\lambda\pi R}{R} + \lambda \ln(x) \Big|_R^{3R} \right)$$

$$V(0, 0, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda (\pi + 2 \ln 3) .$$



Nous ne pouvons pas utiliser $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r})$ car $V(\vec{r})$ n'est pas connue. Nous avons calculé le potentiel $V(\vec{r})$ seulement en $\vec{r}=(0,0,0)$ et

$$\vec{E}(0, 0, 0) = -\nabla V(x, y, z)|_{(x=0,y=0,z=0)} \neq \nabla V(0, 0, 0)$$

On procède donc au calcul direct du champ électrique au point O . Par symétrie, les contributions des deux branches rectilignes s'annulent. Pour chaque petit élément du demi-cercle, on peut définir $d\vec{E} = dE_x \vec{e}_x + dE_y \vec{e}_y$. Par symétrie, nous voyons que les composantes suivant x s'annulent. Il reste donc établir la composante suivant y

$$dE_y(0, 0, 0) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} \sin \theta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\theta}{R^2} \sin \theta$$

Il suffit ensuite d'intégrer entre 0 et π

$$E_y(0, 0, 0) = -\int_0^\pi \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \sin \theta d\theta = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R}$$

Note:

Exercice 5.4

Le potentiel au centre de l'anneau, pour $V(\infty) = 0$, est:

$$V(0, 0, 0) = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 2\pi r dr}{r} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} dr = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (R_2 - R_1)$$

La conservation de l'énergie implique que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_e v^2(0, 0, \infty) + eV(0, 0, \infty) &= \frac{1}{2} m_e v^2(0, 0, 0) + eV(0, 0, 0) \\ \Rightarrow \frac{1}{2} m_e v^2(0, 0, \infty) &= \frac{1}{2} m_e v_0^2 + \frac{e\sigma}{2\epsilon_0} (R_2 - R_1) \\ \Rightarrow v(0, 0, \infty) &= \sqrt{v_0^2 + \frac{e\sigma}{m_e\epsilon_0} (R_2 - R_1)} \end{aligned}$$

Note:

On peut calculer la différence de potentiel aussi grâce à l'intégration du champ électrique (mais c'est plus long). Par symétrie

$$E_x(0, 0, z) = E_y(0, 0, z) = 0$$

et:

$$\begin{aligned} dE_z(0, 0, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{l^2} \cos \theta \\ dq &= \sigma r d\varphi dr \\ \cos \theta &= \frac{z}{l} = \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \\ \Rightarrow dE_z(0, 0, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r d\varphi dr z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_z(0, 0, z) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r dr z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left(-\frac{1}{\sqrt{z^2 + R_2^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2 + R_1^2}} \right)$$

$$V(0, 0, 0) - V(0, 0, \infty) = - \int_{\infty}^0 E_z(0, 0, z) dz = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (R_2 - R_1)$$

Si nous supposons $V(0, 0, \infty) = 0$:

$$V(0, 0, 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (R_2 - R_1)$$

Exercice 5.5

La symétrie du problème suggère que le champ électrique $\mathbf{E}$ est dirigé radialement et qu'il ne dépend que de la distance r du point par rapport à l'origine. On peut donc écrire, sans ambiguïté, $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\hat{\mathbf{r}}$. Pour calculer le champ électrique, la symétrie du problème permet d'utiliser efficacement la loi de Gauss

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$

avec une surface S sphérique de rayon r centré en $\mathbf{r} = 0$ et donc tel que $d\mathbf{s} = ds\hat{\mathbf{r}}$.

a) Calcul du champ électrique.

Pour $0 < r < a$:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint_S E ds = E(r) \oint_S ds = E(r) 4\pi r^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV = 0$$

donc

$$E(r) 4\pi r^2 = 0$$

donc

$$E(r) = 0$$

Pour $a < r < b$:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint_S E ds = E(r) \oint_S ds = E(r) 4\pi r^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{4}{3\varepsilon_0} \pi (r^3 - a^3) \rho$$

où

$$\rho = Q/V \quad \text{et} \quad V = \frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3) \quad \text{donc} \quad \rho = \frac{3Q}{4\pi(b^3 - a^3)}$$

donc

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0} (r^3 - a^3) \rho$$

et donc

$$E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right)$$

Pour $b < r < \infty$:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint_S E ds = E(r) \oint_S ds = E(r) 4\pi r^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV = Q/\varepsilon_0$$

donc

$$E(r) 4\pi r^2 = Q/\varepsilon_0$$

donc

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Donc, en conclusion:

$$\begin{aligned} 0 < r < a : \quad E(r) &= 0; \\ a < r < b : \quad E(r) &= \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right); \\ b < r < \infty : \quad E(r) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \end{aligned}$$

Calcul du potentiel électrostatique. Le potentiel électrique $V(r)$ peut être calculée par intégration du champ électrique en supposant que $V(\infty) = 0$:

$$V(r) = V(\infty) - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

Pour $0 < r < a$:

$$\begin{aligned} V(r) &= - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^{\infty} E dr = \int_r^a E dr + \int_a^b E dr + \int_b^{\infty} E dr = \\ &= \int_a^b \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right) dr + \int_b^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{(a-b)^2(2a+b)}{2b} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{b} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} (b^2 - a^2) \end{aligned}$$

Pour $a < r < b$:

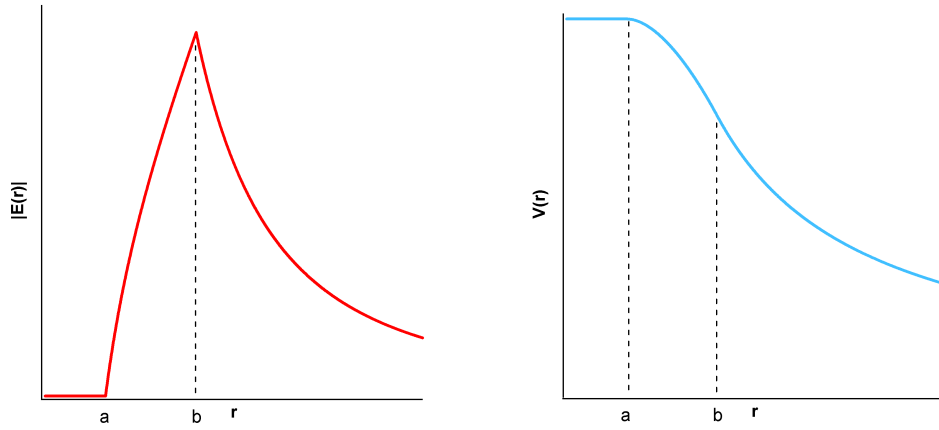
$$\begin{aligned} V(r) &= - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^{\infty} E dr = \int_r^b E dr + \int_b^{\infty} E dr = \\ &= \int_r^b \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right) dr + \int_b^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{1}{2} \left(-2a^3 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) + b^2 - r^2 \right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{b} = \\ &= -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left(\frac{r^2}{2} + \frac{a^3}{r} \right) + \frac{\rho}{2\varepsilon_0} b^2 \end{aligned}$$

Pour $b < r < \infty$:

$$\begin{aligned} V(r) &= - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^{\infty} E dr \\ &= \int_r^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \end{aligned}$$

Donc, en conclusion:

$$\begin{aligned} 0 < r < a : \quad V(r) &= \frac{\rho}{2\varepsilon_0} (b^2 - a^2); \\ a < r < b : \quad V(r) &= -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left(\frac{r^2}{2} + \frac{a^3}{r} \right) + \frac{\rho}{2\varepsilon_0} b^2; \\ b < r < \infty : \quad V(r) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left(\frac{b^3 - a^3}{r} \right) \end{aligned}$$



b) Calcul du champ électrique.

Pour $0 < r < a$:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint_S E ds = E(r) \oint_S ds = E(r) 4\pi r^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV = Q/\varepsilon_0$$

donc

$$E(r) 4\pi r^2 = Q/\varepsilon_0$$

donc

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Pour $a < r < b$:

En condition statique, le champ $\mathbf{E}$ est nul à l'intérieur d'un conducteur. Donc:

$$E(r) = 0$$

Pour $b < r < \infty$:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint_S E ds = E(r) \oint_S ds = E(r) 4\pi r^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV = Q/\varepsilon_0$$

donc

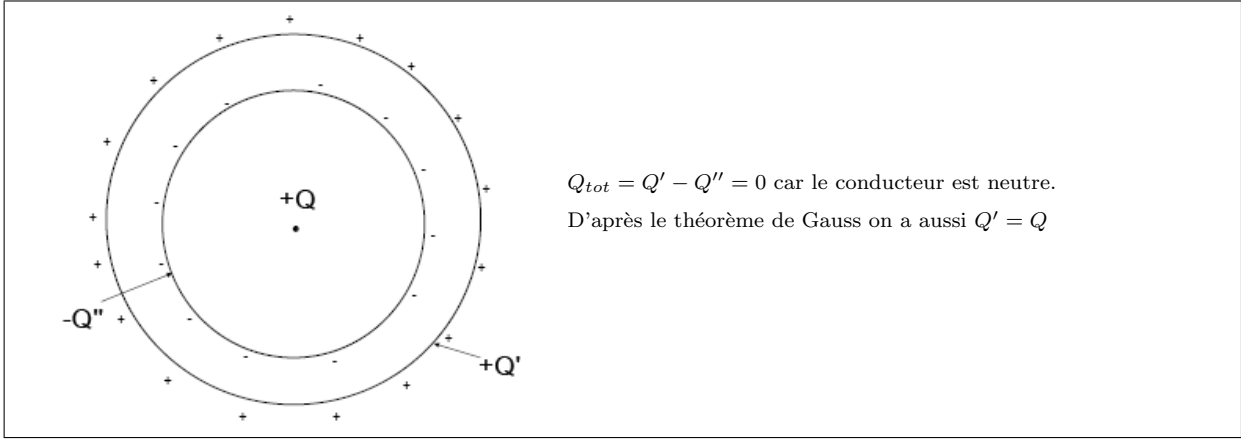
$$E(r) 4\pi r^2 = Q/\varepsilon_0$$

donc

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Donc, en conclusion:

$$\begin{aligned} 0 < r < a : \quad E(r) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}; \\ a < r < b : \quad E(r) &= 0; \\ b < r < \infty : \quad E(r) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}; \end{aligned}$$



Calcul du potentiel électrique. Le potentiel électrique $V(r)$ peut être calculée par intégration du champ électrique en supposant que $V(\infty) = 0$:

$$V(r) = V(\infty) - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

Pour $0 < r < a$:

$$\begin{aligned}
 V(r) &= - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^{\infty} E dr = \int_r^a E dr + \int_a^b E dr + \int_b^{\infty} E dr = \\
 &= \int_r^a \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr + \int_b^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b}
 \end{aligned}$$

Pour $a < r < b$:

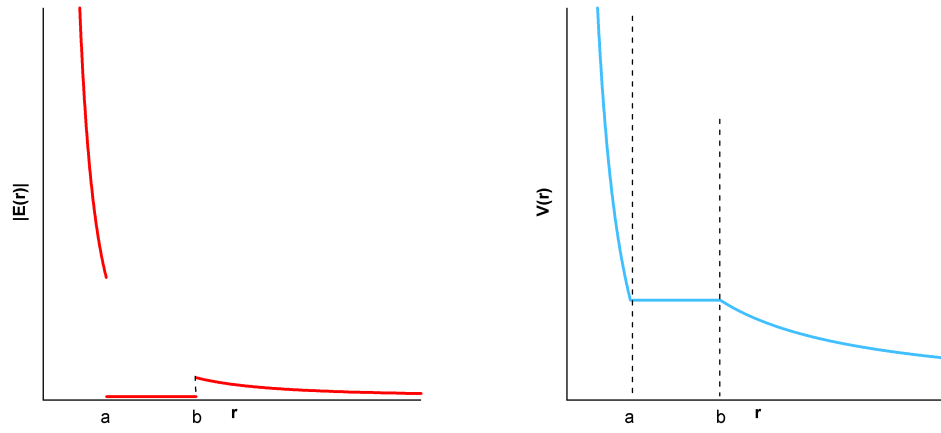
$$\begin{aligned}
 V(r) &= - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^b E dr + \int_b^{\infty} E dr = \\
 &= \int_b^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b}
 \end{aligned}$$

Pour $b < r < \infty$:

$$\begin{aligned}
 V(r) &= - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^{\infty} E dr = \\
 &= \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}
 \end{aligned}$$

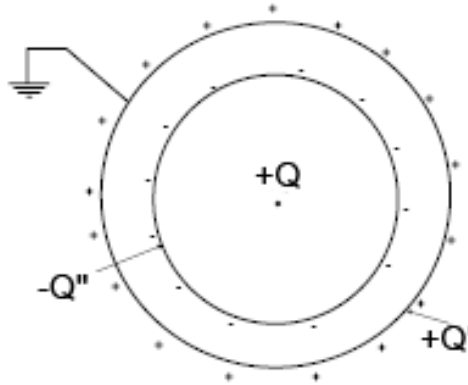
Donc, en conclusion:

$$\begin{aligned}
 0 < r < a : \quad V(r) &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b}; \\
 a < r < b : \quad V(r) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b}; \\
 b < r < \infty : \quad V(r) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r};
 \end{aligned}$$



Remarque: Le champ électrique est discontinu en $r = a$ et $r = b$, avec $E(a^-) \neq E(a^+)$, $E(b^-) \neq E(b^+)$, $\Delta E(r = a) = E(a^-) - E(a^+) = \sigma_-/\varepsilon_0$, $\Delta E(r = b) = E(b^-) - E(b^+) = \sigma_+/\varepsilon_0$. Ces discontinuités sont dues aux densités de charge de surface σ_+ et σ_- sur le conducteur.

c) La connexion à la terre détermine que: 1) le potentiel V de la coquille sphérique conductrice est nul, 2) la charge totale sur la coquille sphérique conductrice n'est pas forcément nulle (même si la coquille sphérique conductrice, avant la connexion à la terre, était neutre). Donc, avec connexion à la terre, la charge Q' n'est pas nécessairement égale à $-Q''$.



Calcul du champ électrique.

Pour $0 < r < a$:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint_S E ds = E(r) \oint_S ds = E(r) 4\pi r^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV = Q/\varepsilon_0$$

donc

$$E(r) 4\pi r^2 = Q/\varepsilon_0$$

donc

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Pour $a < r < b$:

En condition statique, le champ $\mathbf{E}$ est nul à l'intérieur d'un conducteur, donc $E(r) = 0$.

Aussi:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint_S E ds = E(r) \oint_S ds = E(r) 4\pi r^2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV = (Q + Q'')/\varepsilon_0$$

donc:

$$0 = (Q + Q'')/\varepsilon_0$$

et donc:

$$Q'' = -Q$$

Pour $b < r < \infty$:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint_S E ds = E(r) \oint_S ds = E(r) 4\pi r^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV = (Q + Q' + Q'')/\varepsilon_0$$

mais $Q'' = -Q$ donc

$$E(r) 4\pi r^2 = Q'/\varepsilon_0$$

donc

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'}{r^2}$$

mais:

$$V(b) = V(\infty) - \int_{\infty}^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_b^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_b^{\infty} E dr = \int_b^{\infty} \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b}$$

mais $V(b) = 0$ (connexion à la terre) donc $Q' = 0$ et donc $E(r) = 0$ pour $b < r < \infty$.
Donc, en conclusion:

$$\begin{aligned} 0 < r < a : \quad E(r) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}; \\ a < r < b : \quad E(r) &= 0; \\ b < r < \infty : \quad E(r) &= 0; \end{aligned}$$

Remarque: la connexion à la terre permet d'obtenir un champ électrique nul en dehors de la coquille sphérique conductrice quelle que soit la valeur de la charge Q ("écranage parfait").

Calcul du potentiel électrique. Le potentiel électrique $V(r)$ peut être calculée par intégration du champ électrique en supposant que $V(\infty) = 0$:

$$V(r) = V(\infty) - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

Pour $0 < r < a$:

$$\begin{aligned} V(r) &= - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^{\infty} E dr = \\ &= \int_r^a \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \end{aligned}$$

Pour $a < r < b$:

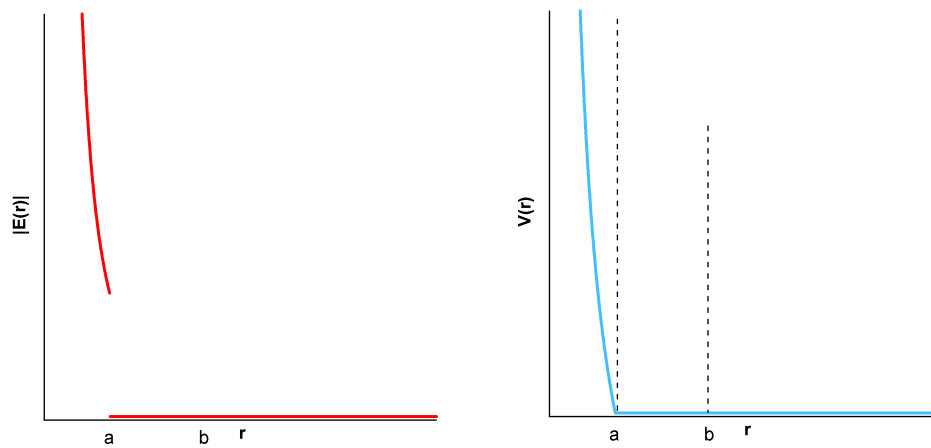
$$V(r) = - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^{\infty} E dr = 0$$

Pour $b < r < \infty$:

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^{\infty} E dr = 0$$

Donc, en conclusion:

$$\begin{aligned} 0 < r < a : \quad V(r) &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}; \\ a < r < b : \quad V(r) &= 0; \\ b < r < \infty : \quad V(r) &= 0; \end{aligned}$$



Remarque: Le champ électrique est discontinu en $r = a$:

$$E(a^-) \neq E(a^+) ; \quad \Delta E(r = a) = \sigma_- / \varepsilon_0$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{a^-} \neq \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{a^+}$$

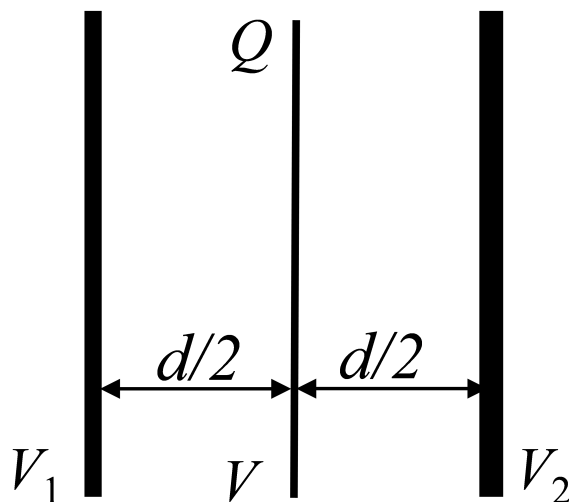
Exercice 6.1

Considérons une sphère isolante uniformément chargée de rayon R et de charge totale Q . Supposons que la constante diélectrique de la sphère soit très faible ($\epsilon_r \cong 1$).

- a) Calculez le champ électrique $\vec{E}(r)$ pour $r < R$ et pour $r \geq R$.
- b) Calculez le potentiel électrique $V(r)$ pour $r < R$ et pour $r \geq R$.
- c) Calculez l'énergie électrostatique totale du système.

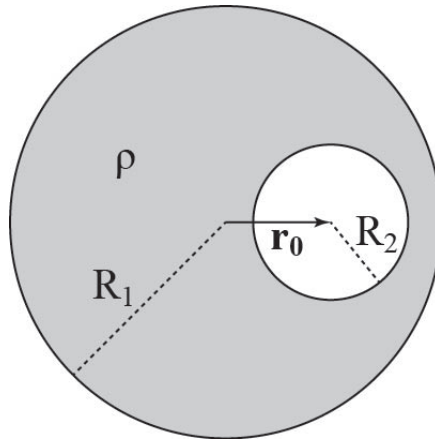
Exercice 6.2

Deux plaques conductrices parallèles de surface A sont séparées d'une distance d et maintenues respectivement à un potentiel $V_1 = 0$ V et à un potentiel V_2 . Une troisième plaque conductrice très mince de même surface, portant une charge totale Q , est placée entre les plaques, à la même distance de chacune d'elles. En supposant que les effets de bords soient négligeables, déterminer le potentiel V de cette troisième plaque (en fonction de V_2 , Q , d , et A).



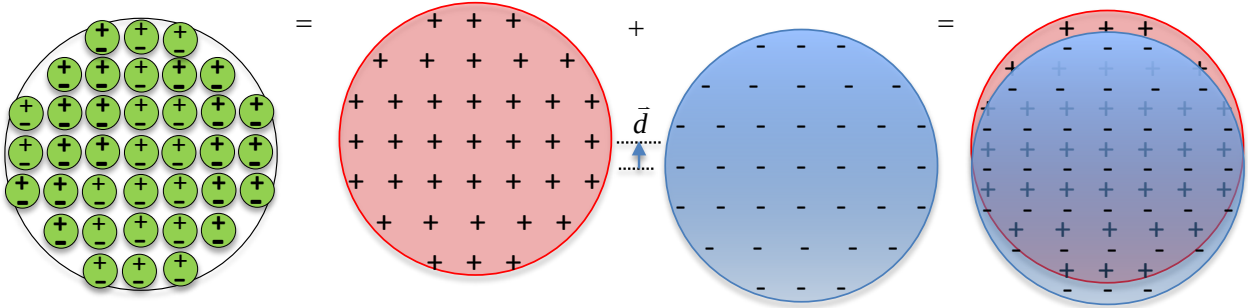
Exercice 6.3

Considérez une sphère de rayon R_1 uniformément chargée, de densité de charge ρ , ayant une cavité sphérique de rayon $R_2 < R_1/2$. Le centre de la cavité est déplacé par rapport au centre de la sphère d'un vecteur $\vec{r}_0$ (voir figure). Calculez le champ électrique en un point quelconque à l'intérieur de la cavité.



Exercice 6.4

Une sphère diélectrique de rayon R , soumise à un champ électrique uniforme $\vec{E} = E_0 \vec{e}_z$, est uniformément polarisée ($\vec{P} = \text{const}$). Déterminez le champ électrique à l'intérieur de la sphère et exprimez-le en terme du vecteur polarisation $\vec{P}$.



Suggestion : Considérez la superposition des deux sphères uniformément chargées, déplacées l'une par rapport à l'autre d'une petite distance d selon l'axe z , comme dans la figure.

Exercice 6.1

a) La symétrie du problème permet d'utiliser efficacement la loi de Gauss pour calculer le champ électrique. Le champ électrique est radial : $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{e}_r$. Voir les détails des calculs dans les diapositives du cours (chapitre Électrostatique 1). Le résultat est le suivant :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \vec{e}_r \quad r < R$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad r \geq R$$

b) En prenant l'infini comme point de référence et en définissant $V(\infty)=0$, nous avons :

$$V(r) = V(\infty) - \int_{\infty}^r \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^r \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \int_r^{\infty} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} \quad (1)$$

En choisissant un chemin d'intégration tel que $d\vec{l} = dr\vec{e}_r$, nous avons :

$$V(r) = \int_r^{\infty} E(r) dr \quad (2)$$

Pour $r \geq R$:

$$V(r) = \int_r^{\infty} E(r) dr = \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = - \left. \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right|_r^{\infty} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (3)$$

Pour $r < R$:

$$\begin{aligned} V(r) &= \int_r^{\infty} E(r) dr = \int_r^R \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} dr + \int_R^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \left. \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{R^3} \right|_r^R - \left. \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right|_R^{\infty} \\ &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{(R^2 - r^2)}{R^3} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} - \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{R^3} \end{aligned} \quad (4)$$

Remarque 1 : Nous pourrions prendre l'origine au lieu de l'infini comme point de référence et supposer que $V(0) = 0$. Dans ce cas :

$$V(r) = V(0) - \int_0^r \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = - \int_0^r \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = - \int_0^r E(r) dr \quad (5)$$

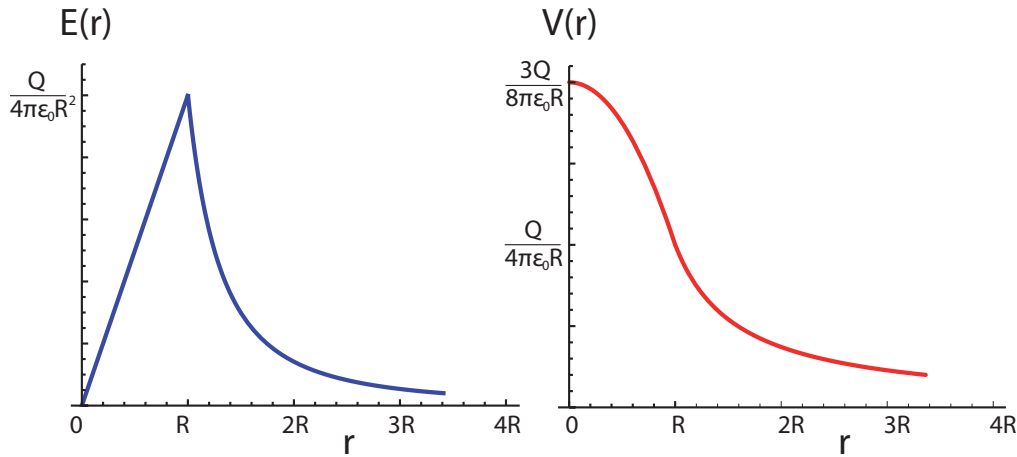
Pour $r \geq R$:

$$\begin{aligned} V(r) &= - \int_0^r E(r) dr = - \int_0^R \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} dr - \int_R^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = - \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{R^3} \Big|_0^R + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_R^r = \\ &= - \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} = - \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (6)$$

Pour $r < R$:

$$V(r) = - \int_0^r E(r) dr = - \int_0^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} dr = - \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{R^3} \Big|_0^r = - \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{R^3} \quad (7)$$

Le potentiel $V(r)$ en un point r calculé avec cette expression est identique à celui calculé ci-dessus mais juste décalé vers le bas d'une constante ($3Q/8\pi\epsilon_0 R$). En particulier, $V(0) = 0$ (par définition) et $V(\infty) = -3Q/8\pi\epsilon_0 R$. Cela a du sens car la seule chose qui compte physiquement est la différence de potentiel entre deux points et non la valeur du potentiel en un point.



c) En intégrant la densité d'énergie électrique dans tout l'espace :

$$U_E = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot d\vec{V} = \frac{1}{2} \int_V E dV = \frac{1}{2} \int_V E \epsilon_0 \epsilon_r E dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V E^2 dV.$$

Pour la sphère uniformément chargée, le champ électrique pour $r > R$ est donné par :

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

et pour $r \leq R$:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3}.$$

En intégrant sur tout l'espace, on obtient :

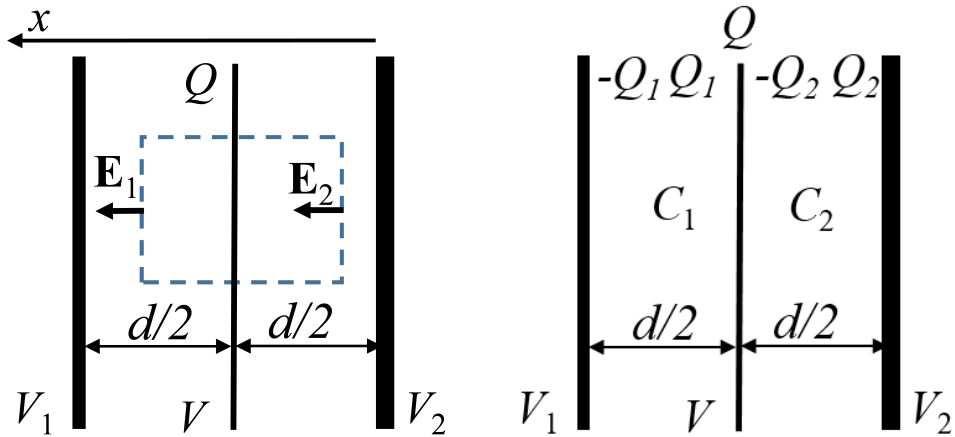
$$U_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left[\int_0^R \frac{r^2}{R^6} 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr \right] = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{R^5}{5R^6} + \frac{1}{R} \right] = \frac{3}{20} \frac{Q^2}{\pi\epsilon_0 R}.$$

On retrouve le même résultat en utilisant :

$$U_E = \frac{1}{2} \int_V \rho V(r) dV = \frac{1}{2} \int_0^R \rho V(r) 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{3Q}{4\pi R^3} V(r) 4\pi r^2 dr = \frac{3}{20} \frac{Q^2}{\pi\epsilon_0 R},$$

où l'intégral est évalué dans le volume de la sphère car $\rho = 0$ à l'extérieur.

Exercice 6.2



Méthode 1 :

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \rho/\varepsilon_0 \Rightarrow E_1 S_1 - E_2 S_2 = (Q/\varepsilon_0 A) S_3$$

mais $S_1 = S_2 = S_3$

$$\Rightarrow E_1 A - E_2 A = Q/\varepsilon_0$$

$$V_2 - V_1 = \int_0^d \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^{d/2} E_2 dx + \int_{d/2}^d E_1 dx = E_2 (d/2) + E_1 (d/2)$$

mais $V_1 = 0$

$$\Rightarrow V_2 = E_2 (d/2) + E_1 (d/2)$$

$$V - V_1 = \int_{d/2}^d \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = \int_{d/2}^d E_1 dx = E_1 (d/2)$$

mais $V_1 = 0$

$$\Rightarrow V = E_1 (d/2)$$

Donc :

$$\begin{cases} V_2 = E_2 (d/2) + E_1 (d/2) \\ V = E_1 (d/2) \\ E_1 A - E_2 A = Q/\varepsilon_0 \end{cases}$$

et donc :

$$V = \frac{1}{2} \left(V_2 + \frac{Qd}{2A\varepsilon_0} \right)$$

Méthode 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q = Q_1 - Q_2 \\ C_1 = \frac{Q_1}{V} \\ C_2 = \frac{Q_2}{V_2 - V} \\ C_1 = C_2 = \varepsilon_0 \frac{A}{(d/2)} \end{array} \right.$$

donc :

$$V = \frac{1}{2} \left(V_2 + \frac{Qd}{2A\varepsilon_0} \right)$$

Exercice 6.3

Pour calculer le champ à l'intérieur de la cavité, on utilise le principe de superposition. On peut imaginer la sphère avec cavité comme la combinaison d'une sphère de rayon R_1 chargée d'une densité de charge ρ et d'une deuxième sphère de rayon R_2 chargée d'une densité $-\rho$. Soit $\vec{r}_0$ le vecteur qui connecte les deux centres. On considère un point à l'intérieur de la cavité séparé du premier centre par un vecteur $\vec{r}$ et du deuxième centre par un vecteur $\vec{r}'$. Comme calculé dans l'exercice 6.1, le champ électrique à l'intérieur de la première sphère uniformément chargée est :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \vec{e}_r = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r},$$

et le champ généré par la deuxième sphère est :

$$\vec{E}'(\vec{r}) = \frac{-\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}'.$$

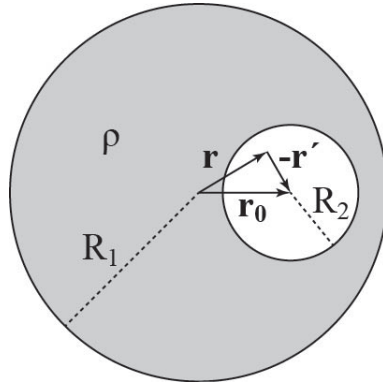
Le champ électrique totale en $\vec{r}$ est la somme de deux champs :

$$\vec{E}_{\text{tot}}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) + \vec{E}'(\vec{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r} - \vec{r}').$$

On peut facilement montrer que $\vec{r} - \vec{r}' = \vec{r}_0$ (voir figure). Donc le champ électrique en chaque point à l'intérieur de la cavité est :

$$\vec{E}_{\text{tot}}(\vec{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}_0.$$

Il est donc uniforme à l'intérieur de la cavité de rayon R_2 , indépendant du rayon R_2 , indépendant du rayon R_1 , et proportionnel au vecteur $\vec{r}_0$ qui connecte les deux centres. Intéressant, n'est pas ?



Exercice 6.4

Le champ électrique à l'intérieur d'une sphère uniformément chargée, de charge totale Q et centrée à l'origine est (voir exercice 6.1) :

$$\vec{E}(r < R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r}.$$

Pour une sphère centrée en $\vec{d} = d\vec{e}_z$, avec $\vec{d} + \vec{r}' = \vec{r}$:

$$\vec{E}(r' < R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r'}{R^3} \vec{e}_{r'} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r}' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} (\vec{r} - \vec{d}).$$

Par le principe de superposition le champ à l'intérieur du diélectrique produit par la polarisation $\vec{P}$ est donc :

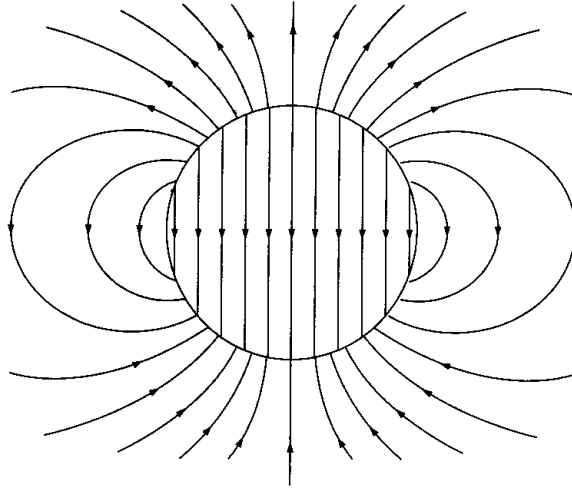
$$\vec{E}_{pol}(\vec{r}) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} (\vec{r} - \vec{d}) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{d} = -\frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{e}_z.$$

Le moment de dipôle électrique totale est : $\vec{p}_{tot} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i q_i \vec{d} = \vec{d} \sum_i q_i = \vec{d}Q$
et, par la définition de vecteur polarisation (moment de dipôle par unité de volume) :

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}_{tot}}{V} = \frac{3Q}{4\pi R^3} \vec{d}$$

Le champ créé par la sphère uniformément polarisée à l'intérieur de la sphère est donc :

$$\vec{E}_{pol}(\vec{r}) = -\frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}.$$



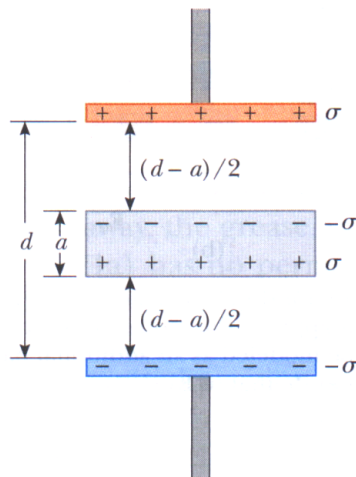
La figure montre les lignes de champ de E_{pol} à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère. Finalement, le champ total à l'intérieur de la sphère est :

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0 \vec{e}_z + \vec{E}_{pol} = E_0 \vec{e}_z - \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P} = E_0 \vec{e}_z - \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{e}_z.$$

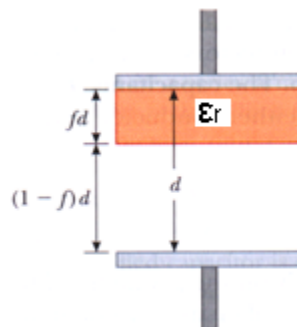
Exercice 7.1

On considère un condensateur à plaques parallèles dont les électrodes ont une surface A et sont séparées par une distance d . On leur impose une charge libre $\pm Q = \pm \sigma A$. Une plaque métallique, non chargée et d'épaisseur a , est insérée à égale distance des deux électrodes.

- Déterminez la différence de potentiel et déduisez-en la capacité du composant.
- Montrez que ce composant est équivalent à deux condensateurs en série et déterminez la capacité de ces deux condensateurs.
- Montrez que la capacité du composant avec une plaque métallique d'épaisseur $a \ll d$ est presque identique à celle sans plaque métallique.
- Montrez que la capacité du condensateur n'est pas modifiée si la plaque métallique n'est pas placée à égale distance des deux électrodes.

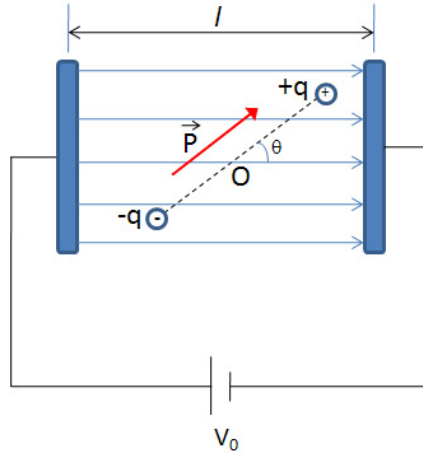
**Exercice 7.2**

On considère un condensateur à plaques parallèles dont les électrodes ont une surface A et sont séparées par une distance d . En l'absence de matériau diélectrique, la capacité est C_0 . Que devient cette capacité quand une plaque de diélectrique de constante ϵ_r et d'épaisseur fd ($0 < f < 1$) est incorporée, comme indiqué sur la figure? Tester votre résultat en considérant les cas limite $f = 0$ et $f = 1$.



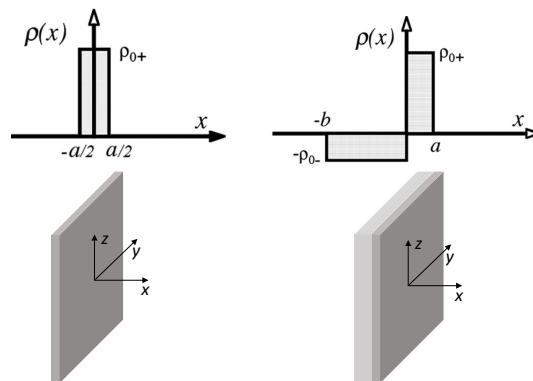
Exercice 7.3

Un condensateur à plaques parallèles séparées de l , est connecté à une batterie produisant une différence de potentiel V_0 . Un dipôle électrique constitué de deux masses m de charges opposées $\pm q$ et de longueur $2a$ est placé entre les plaques du condensateur. On le place dans une position légèrement hors de l'équilibre, formant un petit angle θ avec les lignes de champ électrique. Quelle est la fréquence des oscillations du dipôle lorsqu'on le relâche? (moment d'inertie du dipôle: $I = 2ma^2$).



Exercice 7.4

- a) Considérez la densité de charge volumique $\rho(x, y, z) = \rho(x)$ de la figure de gauche. Il s'agit d'un mur infini d'épaisseur a uniformément chargé et perpendiculaire à l'axe x avec densité de charge volumique ρ_{0+} . Déterminez et représentez graphiquement le champ électrique associé pour toutes les valeurs de x . Déterminez et représentez graphiquement le champ électrique et le potentiel $V(x)$, avec la condition $V(-a/2) = 0$.
- b) Considérez maintenant la densité de charge volumique $\rho(x, y, z) = \rho(x)$ de la figure de droite. Il s'agit de la combinaison de deux murs infinis d'épaisseur a et b , uniformément chargés et perpendiculaires à l'axe x , avec la condition $|b\rho_{0-}| = |a\rho_{0+}|$. Déterminez et représentez graphiquement le champ électrique.



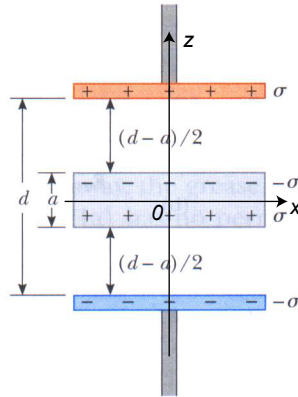
Exercice 7.5

- a) Déterminer la force qui agit sur chaque plaque d'un condensateur à plaques parallèles sans diélectrique, chargé avec des charges $\pm Q$
- i)* à partir du champ électrique
- ii)* avec des considérations énergétiques.
- b) Déterminer la force qui agit sur chaque plaque du condensateur si le condensateur est rempli d'un diélectrique de constante diélectrique ε_r .

Exercice 7.1

a) La différence de potentiel aux bornes du composant est donnée par:

$$\Delta V = V(z = d/2) - V(z = -d/2) = - \int_{-d/2}^{+d/2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



A partir de la loi de Gauss (voir démonstration dans les diapositives du cours), le champ électrique dans les trois régions est:

a) $a/2 < z < d/2$: $\vec{E} = -(\sigma/\epsilon_0)\vec{e}_z$.

b) $-a/2 < z < a/2$, $\vec{E} = 0$.

c) $-d/2 < z < -a/2$, $\vec{E} = -(\sigma/\epsilon_0)\vec{e}_z$.

On en déduit:

$$\Delta V = -\left(\int_{-d/2}^{-a/2} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{-a/2}^{a/2} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{a/2}^{d/2} \vec{E} \cdot d\vec{l} \right) = -\left(\int_{-d/2}^{-a/2} -(\sigma/\epsilon_0)dz + \int_{a/2}^{d/2} (-\sigma/\epsilon_0)dz \right)$$

donc:

$$\Delta V = \int_{-d/2}^{-a/2} (\sigma/\epsilon_0)dz + \int_{a/2}^{d/2} (\sigma/\epsilon_0)dz$$

et enfin:

$$\Delta V = \frac{d-a}{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} + \frac{d-a}{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{(d-a)\sigma}{\epsilon_0}.$$

Par définition, la capacité est $C = Q/\Delta V$, d'où

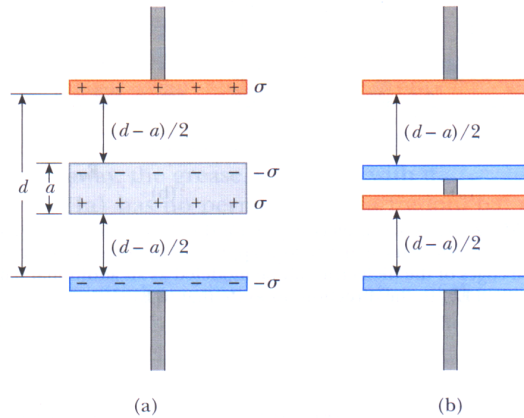
$$C = \frac{Q\epsilon_0}{(d-a)\sigma} = \frac{\sigma A\epsilon_0}{(d-a)\sigma} = \frac{\epsilon_0 A}{d-a}.$$

L'effet de la plaque métallique n'est donc que de réduire l'épaisseur effective du diélectrique (vide ici...) et donc d'augmenter la capacité. On notera que les charges sur les surfaces de la plaque métallique (redistribution des charges, la plaque métallique est globalement neutre) produisent un champ nul à l'intérieur et à l'extérieur de celle-ci. Le champ électrique dans l'espace vide entre les électrodes est $\vec{E} = -(\sigma/\epsilon_0)\vec{e}_z$, indépendamment de la présence et de l'épaisseur de la plaque métallique.

b) Si on considère que ce composant est équivalent à deux condensateurs en série avec espacement entre les électrodes $(d-a)/2$ et, donc, de capacité $C_0 = 2\epsilon_0 A/(d-a)$ on obtient:

$$C = \frac{C_0 C_0}{C_0 + C_0} = \frac{C_0}{2} = \frac{\epsilon_0 A}{d-a}$$

Donc la plaque métallique jouant simplement le rôle de fil électrique connectant les deux condensateurs.



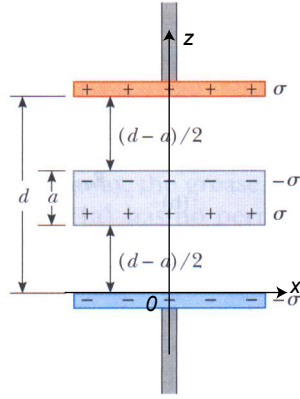
c) Pour $a \rightarrow 0$, $C \rightarrow \epsilon_0 A/d$, i.e., l'insertion dans un condensateur d'une plaque métallique très mince (par rapport à la distance entre les électrodes) ne modifie pas de manière significative sa capacité.

d) Dans le cas où la plaque métallique n'est pas centrée, on doit considérer deux condensateurs de capacités $C_1 = \epsilon_0 A/[(d-a)/2 + \delta]$ et $C_2 = \epsilon_0 A/[(d-a)/2 - \delta]$ d'où

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\frac{\epsilon_0 A}{\frac{(d-a)}{2} + \delta} \frac{\epsilon_0 A}{\frac{(d-a)}{2} - \delta}}{\frac{\epsilon_0 A}{\frac{(d-a)}{2} + \delta} + \frac{\epsilon_0 A}{\frac{(d-a)}{2} - \delta}} = \frac{\epsilon_0 A}{d-a}$$

donc la position de la plaque métallique n'a aucune influence sur la capacité du composant.

Note: Un autre choix possible pour l'origine de l'axe z serait celui de la figure ci-dessous:



$$\Delta V = V(z = d) - V(z = 0) = - \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

A partir de la loi de Gauss (voir démonstration dans les diapositives du cours), le champ électrique dans les trois régions est:

- a) $0 < z < (d - a)/2$: $\vec{E} = -(\sigma/\epsilon_0)\vec{e}_z$.
- b) $(d - a)/2 < z < (d + a)/2$, $\vec{E} = 0$.
- c) $(d + a)/2 < z < d$, $\vec{E} = -(\sigma/\epsilon_0)\vec{e}_z$.

On en déduit:

$$\Delta V = - \left(\int_0^{(d-a)/2} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{(d-a)/2}^{(d+a)/2} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{(d+a)/2}^d \vec{E} \cdot d\vec{l} \right) = - \left(\int_0^{(d-a)/2} -(\sigma/\epsilon_0) dz + \int_{(d+a)/2}^d (-\sigma/\epsilon_0) dz \right)$$

donc:

$$\Delta V = \int_0^{(d-a)/2} (\sigma/\epsilon_0) dz + \int_{(d+a)/2}^d (\sigma/\epsilon_0) dz$$

et enfin:

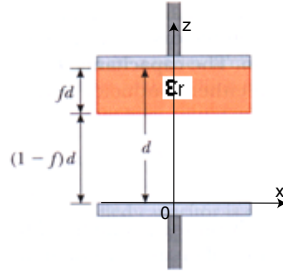
$$\Delta V = \frac{d-a}{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} + \frac{d-a}{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{(d-a)\sigma}{\epsilon_0}.$$

qui est, comme prévu, le même résultat que celui obtenu avec un choix différent pour l'origine de l'axe z .

Exercice 7.2

On procède de la même manière que pour l'exercice 7.1, mais cette fois on utilisera le déplacement électrique $D = \epsilon_0 \epsilon_r E$. A partir de la loi de Gauss (voir démonstration dans les diapositive du cours), le champ électrique dans les deux régions est:

- a) $0 < z < (1 - f)d$: vide ($\epsilon_r = 1$), $D = \sigma$ et, donc, $E = \sigma/\epsilon_0$.
- b) $(1 - f)d < z < d$: diélectrique ($\epsilon_r > 1$), $D = \sigma$ et, donc, $E = \sigma/(\epsilon_0 \epsilon_r)$. Autre solution: Par continuité de D_n à l'interface diélectrique/air (pas de charges libres), on a aussi $D = \sigma$, d'où $E = \sigma/(\epsilon_0 \epsilon_r)$.



La différence de potentiel est alors:

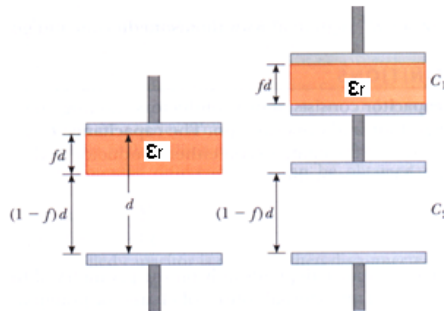
$$\Delta V = - \int_0^d E(z) dz = - [f/\epsilon_r + (1 - f)] \frac{\sigma d}{\epsilon_0},$$

et la capacité:

$$C = |Q/\Delta V| = \frac{\epsilon_0 A}{d(f/\epsilon_r + (1 - f))}.$$

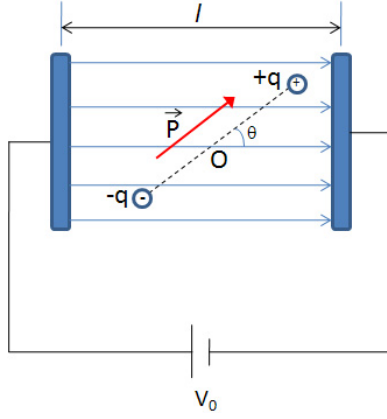
Note: La solution de l'exercice 7.1 montre qu'une plaque métallique d'épaisseur très mince par rapport à la distance entre les électrodes ne change pas la capacité totale. On peut donc schématiser le système comme la série de deux condensateurs:

$$C_1 = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{fd} \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 A}{(1 - f)d} \quad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\epsilon_0 A}{d(f/\epsilon_r + (1 - f))}$$



Si $f \rightarrow 0$ (i.e., condensateur vide), $C \rightarrow C_0$ et si $f \rightarrow 1$ (condensateur entièrement rempli), $C \rightarrow \epsilon_r C_0$, comme prévu.

Exercice 7.3



Le champ électrique généré par le condensateur est $\vec{E} = (V_0/l)\vec{e}_x$, avec l'axe x perpendiculaire au plaques. Ce champ électrique exerce sur le dipôle électrique un couple:

$$\vec{N} = \vec{p} \times \vec{E} = -2Eqa \sin \theta \vec{e}_z ;$$

où l'axe z sort de la page. D'après le théorème du moment cinétique, on a

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}, \quad \vec{L} = 2\vec{r} \times m\vec{v} = 2ma^2\omega\vec{e}_z = I\omega\vec{e}_z = I\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_z \quad \Rightarrow \quad I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -2Eqa \sin \theta \vec{e}_z = -Ep \sin \theta \vec{e}_z$$

où $I = 2ma^2$ est le moment d'inertie du dipôle. Comme θ est petit nous pouvons écrire que $\sin \theta \approx \theta$. Donc:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{Ep}{I} \right) \theta = 0 .$$

C'est équation différentielle d'un oscillateur harmonique. La solution est

$$\theta(t) = A \cos (\omega t + \varphi)$$

avec

$$\omega = \sqrt{\frac{Ep}{I}} = \sqrt{\frac{qV_0}{lma}} .$$

La direction du dipôle électrique va osciller entre θ et $-\theta$ avec fréquence $f=(\omega/2\pi)$. La fréquence d'oscillation f peut être modifiée, e.g., en modifiant la tension appliquée V_0 ou la distance entre les plaques l (dans les deux cas on modifie le champ électrique agissant sur le dipôle).

Exercice 7.4

a) Il s'agit d'un mur infini uniformément chargé et perpendiculaire à l'axe x . On peut calculer le champ électrique en utilisant la loi de Gauss. Par symétrie le champ électrique:

- est dans la direction x (i.e., $\vec{E} = E\vec{e}_x$)
- est une fonction de la seule coordonnée x
- et $\vec{E}(x) = -\vec{E}(-x)$.

Pour évaluer le champ électrique, on considère un cylindre orientée selon l'axe x centrée à l'origine, avec base d'aire S_b et hauteur $2x$. Nous appliquons la loi de Gauss à ce cylindre:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_V (\rho/\epsilon_0) dV$$

Sur la surface latérale $d\vec{s} \perp \vec{e}_x$ et, partout, $\vec{E} = E\vec{e}_x$. Donc sur la surface latérale $\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ et le flux du champ électrique à travers la surface latérale est nul. Sur le deux bases S_b , $\vec{E}(x) = -\vec{E}(-x)$ et, par définition de surface de Gauss, $d\vec{s}(-x) = -ds\vec{e}_x$ et $d\vec{s}(x) = ds\vec{e}_x$ et donc $\vec{E}(x) \cdot d\vec{s}(x) = \vec{E}(-x) \cdot d\vec{s}(-x)$. Donc à travers les deux bases du cylindre le flux est le même (même amplitude et même signe) et donc:

$$\oint_S \vec{E}(x) \cdot d\vec{s} = 2 \int_{S_b} \vec{E}(x) \cdot d\vec{s}$$

A l'intérieur de la distribution des charges ($|x| \leq a/2$), pour les deux surfaces de base S_b on trouve:

$$\int_{S_b} \vec{E}(x) \cdot d\vec{s} = E(x)S_b$$

donc

$$\oint_S \vec{E}(x) \cdot d\vec{s} = 2E(x)S_b$$

$$\int_V (\rho/\epsilon_0) dV = \int_V (\rho_{0+}/\epsilon_0) dV = \frac{2xS_b\rho_{0+}}{\epsilon_0},$$

donc:

$$\vec{E}(x) = \frac{\rho_{0+}}{\epsilon_0} x \vec{e}_x$$

A l'extérieur de la distribution des charges ($|x| \geq a/2$), on trouve:

$$\int_{S_b} \vec{E}(x) \cdot d\vec{s} = E(x)S_b$$

donc

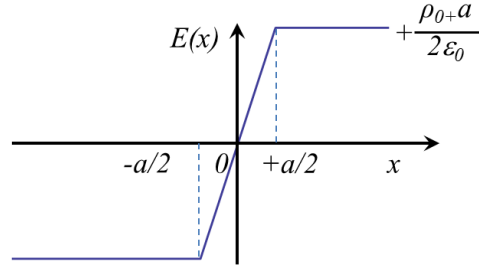
$$\oint_S \vec{E}(x) \cdot d\vec{s} = 2E(x)S_b$$

$$\int_V (\rho/\epsilon_0) dV = \int_V (\rho_{0+}/\epsilon_0) dV = \frac{aS_b\rho_{0+}}{\epsilon_0}$$

donc:

$$\vec{E}(x) = \pm \frac{a\rho_{0+}}{2\epsilon_0} \vec{e}_x$$

où le signe plus est valable dans la région $x > a/2$ et le signe moins dans la région $x < -a/2$. Le résultat est montré dans la figure suivante.



Par définition de potentiel (voir cours):

$$V(x) = V(x_0) - \int_{x_0}^x \vec{E}(x) \cdot d\vec{l}$$

La condition $V(x_0 = -a/2) = 0$ implique:

$$V(x) = - \int_{-a/2}^x \vec{E}(x) \cdot d\vec{l}$$

Pour $(x < -a/2)$:

$$\begin{aligned} V(x) &= - \int_{-a/2}^x \vec{E}(x) \cdot d\vec{l} = \int_x^{-a/2} \vec{E}(x) \cdot d\vec{l} \\ \vec{E}(x) &= -\frac{a\rho_{0+}}{2\epsilon_0} \vec{e}_x \\ d\vec{l} &= dx \vec{e}_x \\ V(x) &= \int_x^{-a/2} -\frac{a\rho_{0+}}{2\epsilon_0} dx = \left(x + \frac{a}{2}\right) \frac{a\rho_{0+}}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

Pour $(-a/2 \leq x \leq a/2)$:

$$\begin{aligned} V(x) &= - \int_{-a/2}^x \vec{E}(x) \cdot d\vec{l} \\ \vec{E}(x) &= \frac{\rho_{0+}}{\epsilon_0} x \vec{e}_x \\ d\vec{l} &= dx \vec{e}_x \end{aligned}$$

$$V(x) = - \int_{-a/2}^x \frac{\rho_{0+}}{\epsilon_0} x dx = - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{8} \right) \frac{\rho_{0+}}{\epsilon_0}$$

Pour $(x > a/2)$:

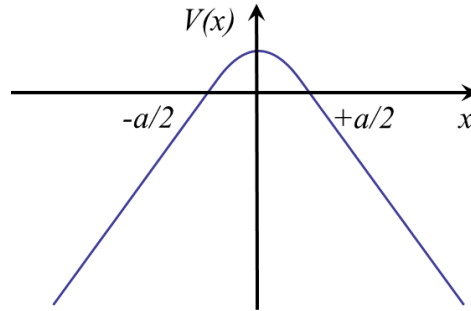
$$V(x) = - \int_{-a/2}^x \vec{E}(x) \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{E}(x) = \frac{\rho_{0+}}{\epsilon_0} x \vec{e}_x \quad (-a/2 \leq x \leq a/2)$$

$$\vec{E}(x) = \frac{a\rho_{0+}}{2\epsilon_0} \vec{e}_x \quad (x > a/2)$$

$$d\vec{l} = dx \vec{e}_x$$

$$V(x) = - \int_{-a/2}^{a/2} \frac{\rho_{0+}}{2\epsilon_0} x dx - \int_{a/2}^x \frac{a\rho_{0+}}{2\epsilon_0} dx = - \int_{a/2}^x \frac{a\rho_{0+}}{2\epsilon_0} dx = - \left(x - \frac{a}{2} \right) \frac{a\rho_{0+}}{2\epsilon_0}$$



b) Il s'agit de la combinaison de deux murs infinis uniformément chargés et perpendiculaires à l'axe x . Pour calculer le champ électrique généré par les deux distributions de charges, on utilise le principe de superposition. D'après le résultat du point précédent, on trouve le champ électrique E_+ généré par la distribution de charges ρ_{0+} en appliquant une translation $x \rightarrow x - a/2$:

$$\vec{E}_+(x) = -\frac{a\rho_{0+}}{2\epsilon_0} \vec{e}_x, \text{ pour } x \leq 0$$

$$\vec{E}_+(x) = \frac{\rho_{0+}}{\epsilon_0} (x - a/2) \vec{e}_x, \text{ pour } 0 < x \leq a$$

$$\vec{E}_+(x) = \frac{a\rho_{0+}}{2\epsilon_0} \vec{e}_x, \text{ pour } x > a.$$

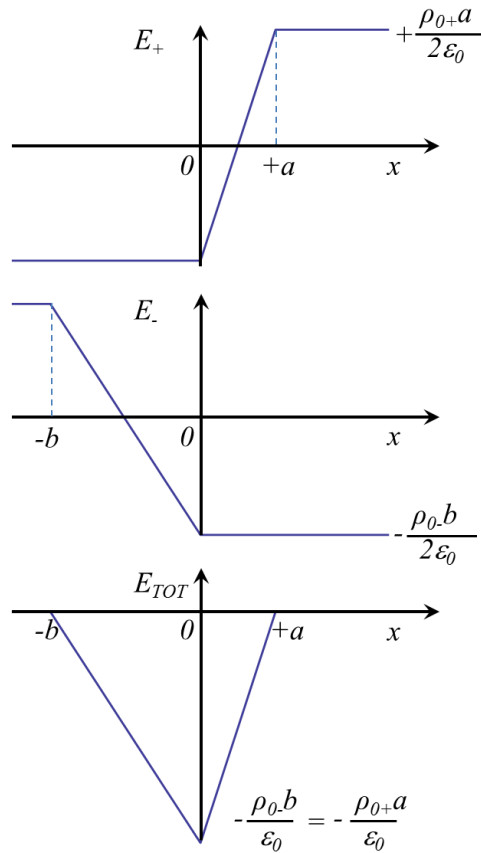
De la même façon, on obtient le champ électrique E_- généré par la distribution de charges $-\rho_{0-}$ en appliquant une translation $x \rightarrow x + b/2$:

$$\begin{aligned}\vec{E}_-(x) &= \frac{b\rho_{0-}}{2\epsilon_0}\vec{e}_x, \text{ pour } x < -b \\ \vec{E}_-(x) &= -\frac{\rho_{0-}}{\epsilon_0}(x + b/2)\vec{e}_x, \text{ pour } -b \leq x \leq 0 \\ \vec{E}_-(x) &= -\frac{b\rho_{0-}}{2\epsilon_0}\vec{e}_x, \text{ pour } x > 0.\end{aligned}$$

Par le principe de superposition des effets, le champ total est la somme des deux champs:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{tot}(x) &= -\frac{a\rho_{0+}}{2\epsilon_0} + \frac{b\rho_{0-}}{2\epsilon_0} = 0, \text{ pour } x < -b, \\ \vec{E}_{tot}(x) &= \left[-\frac{a\rho_{0+}}{2\epsilon_0} - \frac{\rho_{0-}}{\epsilon_0}(x + b/2) \right] \vec{e}_x, \text{ pour } -b \leq x \leq 0, \\ \vec{E}_{tot}(x) &= \left[\frac{\rho_{0+}}{\epsilon_0}(x - a/2) - \frac{b\rho_{0-}}{2\epsilon_0} \right] \vec{e}_x, \text{ pour } 0 < x \leq a, \\ \vec{E}_{tot}(x) &= \frac{a\rho_{0+}}{2\epsilon_0} - \frac{b\rho_{0-}}{2\epsilon_0} = 0, \text{ pour } x > a.\end{aligned}$$

La solution graphique est représentée dans la figure suivante:



Exercice 7.5

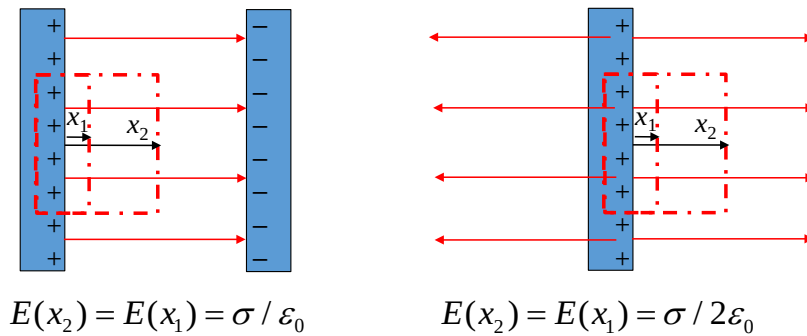
L'idée de cet exercice est de voir deux approches pour calculer la force qui agit sur une des deux plaques d'un condensateur à plaques parallèles. Un basé sur la force de Lorentz (a, i) et un basé sur des considérations énergétiques (a, ii).

(a,i) La force de Lorentz agissant sur les charges sur une plaque dépend du champ électrique créé par les charges sur l'autre plaque (comme pour un système composé de seulement deux charges, où si vous voulez calculer la force agissant sur l'une des deux charges vous considérer uniquement le champ créé par l'autre charge).

La force sur une plaque est:

$$\vec{F} = \int_S dq \vec{E} = \int_S \sigma ds \vec{E} = Q \vec{E}$$

On pourrait penser (à tort) que le champ électrique à considérer est le champ entre les deux plaques $\vec{E} = (\sigma/\varepsilon_0)\vec{e}_x$. Pourquoi c'est faux? La force totale sur un charge ponctuelle ou sur ensemble de charges est donnée par le champ électrique produit par les charges externes à cet ensemble de charges, car la force totale produite par le champ électrique produit par l'ensemble de charges lui même doit être nulle sinon l'ensemble de charges accélérerait (ce qui n'est pas possible car aucune force extérieure est présente). Cela, évidemment, ne signifie pas que dans un ensemble de charges, il n'y a pas de forces qui pourraient produire des mouvements internes. Chaque plaque est soumise au champ créé par l'autre plaque. Intuitivement, le champ électrique créé par une seule plaque est la moitié de celui créé par les deux plaques. Si on néglige les effets de bord, ce champ est uniforme et donné par $\vec{E} = (\sigma/2\varepsilon_0)\vec{e}_x$. Plus rigoureusement, nous pouvons calculer le champ électrique produit par une seule plaque utilisant la loi de Gauss, avec distribution de charge due à la présence de l'autre plaque également. Cette répartition des charges se compose uniquement de charges du côté le plus proche de l'autre plaque. Remarque: cette répartition de charge est "physiquement impossible" pour une seule plaque (car elle génère un champ électrique à l'intérieur de la plaque), mais c'est celle qui doit être prise en compte pour le calcul.



La plaque chargée avec $-Q$ est donc soumise au champ électrique créé par la plaque chargée avec $+Q$:

$$\vec{E}^+ = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_x = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} \vec{e}_x \quad .$$

La force sur la plaque est donc:

$$\vec{F}^- = -QE^+ = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} \vec{e}_x \quad .$$

(a,ii) La force agissant sur une plaque peut être aussi calculée en considérant un petit déplacement de l'une des deux plaques. Le travail nécessaire pour effectuer un tel déplacement doit être égal à la variation de l'énergie dans le système (puisque le système est isolé électriquement et qu'il n'y a pas de forces dissipatives). L'énergie du système est donnée par le champ électrique total (et non par celle produite par une seule des deux plaques). L'énergie électrostatique du condensateur est:

$$U_E = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{Q^2}{2C} \quad , \quad \text{où} \quad C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad .$$

mais:

$$dU_E = -dW = -\vec{F} \cdot d\vec{x}$$

donc:

$$\vec{F} = -\frac{d}{dx}U_E \vec{e}_x = -\frac{d}{dx} \left(\frac{Q^2}{2C} \right) \vec{e}_x$$

avec

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{x}$$

Ici la charge Q est une constante, donc:

$$\vec{F} = -\frac{Q^2}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{C(x)} \right) \vec{e}_x = -\frac{Q^2}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{\varepsilon_0 S} \right) \vec{e}_x = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} \vec{e}_x$$

(b) On a:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{x}$$

donc:

$$\vec{F} = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r S} \vec{e}_x$$

La force est donc réduite d'un facteur ε_r .

Remarque: En général

$$U_E = (1/2) \int_V \vec{E} \cdot \vec{D} dV$$

donc dans le condensateur avec diélectrique:

$$U_E = (1/2) \int_V \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 dV = (1/2) \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 S d$$

et:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r (S/d); E = (V/d)$$

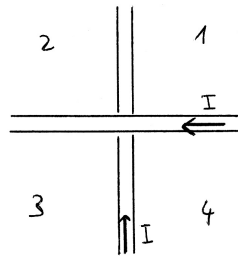
donc:

$$U_E = \frac{1}{2}CV^2$$

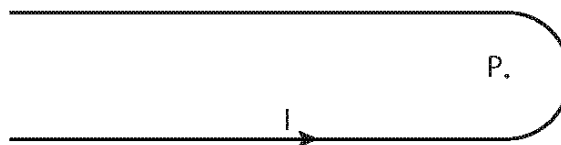
aussi pour un condensateur avec diélectrique.

Exercice 8.1

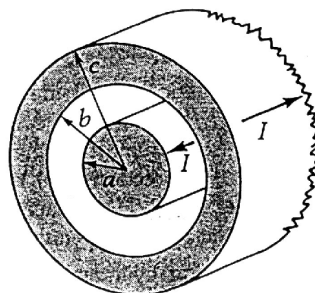
Deux conducteurs rectilignes placés à angle droit et isolés l'un de l'autre sont parcourus par un même courant I (voir figure). Indiquer la direction du champ magnétique dans le plan des conducteurs. Dans quels quadrants y a-t-il des points où le champ s'annule et où se trouvent-ils?

**Exercice 8.2**

Pour la boucle de courant ci-dessous, calculer le champ magnétique $\vec{B}$ au point P , le centre du demi-cercle.

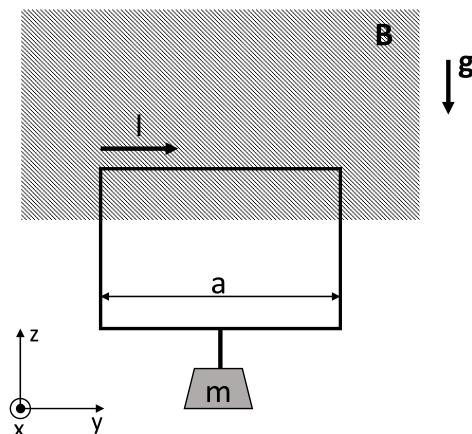
**Exercice 8.3**

Considérer un très long câble coaxial à travers duquel on fait passer un courant continu I . Le courant se propage dans une direction par le conducteur central et revient en sens opposé par le conducteur extérieur. On supposera que les courants sont constants et uniformes sur les sections des conducteurs et que $\mu_r = 1$ partout. Calculer le champ magnétique B en tout point de l'espace et en donner une représentation graphique.



Exercice 8.4

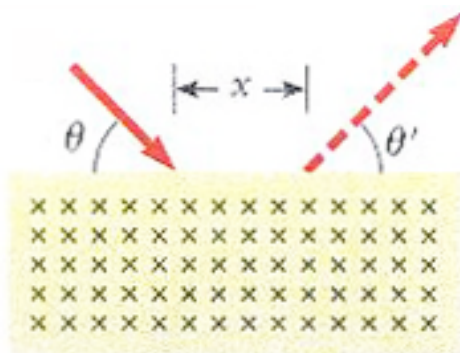
Une masse m , soumise à la pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, est suspendue à un circuit rectangulaire de largeur a dans lequel circule un courant I . La partie supérieure du circuit se trouve à l'intérieur d'un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ avec direction le long de l'axe x (i.e., perpendiculaire au plan de la figure). Déterminer l'amplitude et le sens du vecteur $\vec{B}$ pour que la masse flotte librement.



Exercice 8.5

Un proton d'énergie cinétique 6.0 MeV se déplace dans le plan de la page. Il entre avec un angle $\theta = 45^\circ$ dans une région où règne un champ magnétique uniforme d'1 T, pointant vers la table.

Déterminez la distance x entre les points d'entrée et de sortie du champ magnétique et l'angle θ' .



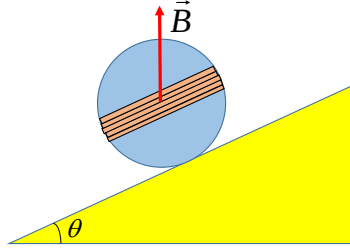
Exercice 8.6

Une particule de masse m et de charge $q > 0$ se déplace dans une région de l'espace où règnent un champ magnétique uniforme $\vec{B} = (0, 0, B_0)$ et un champ électrique uniforme $\vec{E} = (0, E_0, 0)$. A l'instant $t = 0$, la particule se trouve à $\vec{r}_0 = (0, y_0, 0)$, où $y_0 = (mv_0/qB_0)$, et sa vitesse est $\vec{v}(t = 0) = (v_0 + E_0/B_0, 0, 0)$. Déterminez la trajectoire de la particule.

Exercice 8.7

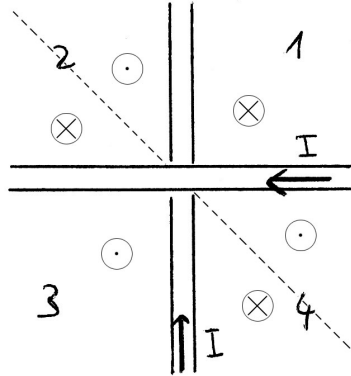
Une sphère non-conductrice de masse M et de rayon R est entourée d'une bobine constituée de N spires très proches les uns des autres et de diamètre égal à celui de la sphère (voir figure). La sphère est placée sur un plan incliné (angle θ), de sorte que le bobinage soit parallèle au plan incliné. Le système est soumis à un champ magnétique vertical uniforme B . Quel courant I dans la bobine permettrait de conserver la sphère en équilibre sur le plan incliné? Montrez que ce résultat ne dépend pas de θ .

Application numérique: $R = 0.2$ m, $M \cong 100$ kg (e.g., sphère en verre avec densité $\rho \cong 3000$ kg/m³), $N=5$, $B=0.35$ T.

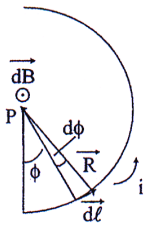


Exercice 8.1

Au moyen de la *règle de la main droite* et en considérant la superposition des champs magnétiques produits par les deux fils, nous pouvons tracer la direction du champ magnétique $\vec{B}$ dans les quatre quadrants. Le champ magnétique $\vec{B}$ s'annule dans les quadrants 2 et 4 sur la droite $y = -x$.

**Exercice 8.2**

La loi de Biot-Savart nous donne: i) pour le demi-cercle:



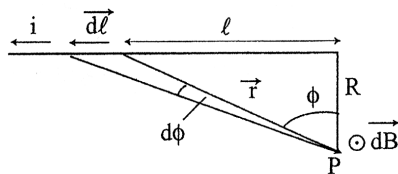
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{e}_R}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{R^2} \vec{e}_z$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R d\phi}{R^2},$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^\pi d\phi = \frac{\mu_0 I}{4R}.$$

Note: le champ magnétique B au point P créée par le demi-cercle est la moitié du champ magnétique au centre d'un cercle de rayon R (i.e., $B = \mu_0 I / 2R$).

ii) pour la demi-droite:



$$R = r \cos \phi, l = r \sin \phi, l = R \tan \phi$$

$$\text{d'où } \frac{dl}{d\phi} = \frac{R}{\cos^2 \phi}; dl = \frac{R}{\cos^2 \phi} d\phi$$

$$r = \frac{R}{\cos \phi}$$

En utilisant la loi de Biot-Savart, on trouve:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \cos \phi \vec{e}_z$$

et donc:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \cos \phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\cos^2 \phi}{R^2} \frac{R}{\cos^2 \phi} \cos \phi d\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{R} \cos \phi d\phi$$

et:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{R} \int_0^{\pi/2} \cos \phi d\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} .$$

Le champ magnétique créé au point P par la demi-droite inférieure est identique, par raison de symétrie, à celui créé par la demi-droite supérieure. Donc le champ au point P est la somme des deux contributions, d'où:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \right) .$$

Note: La contribution des demi-droites est équivalente à la contribution d'une seule droite infinie, qui produit un champ $B = \mu_0 I / 2\pi R$.

Exercice 8.3

C'est une situation où la symétrie du système permet d'appliquer la loi de l'Ampère (à la place de la loi plus compliquée de Biot-Savart). Par la symétrie cylindrique du problème, le champ magnétique est azimutal (tangential) et son module constant le long des circonférences centrées sur l'axe du câble coaxial. On utilise la loi d'Ampère pour en calculer le module, dans l'hypothèse $\mu_r = 1$ (et, donc, $\mu = \mu_0$) à la fois dans les conducteurs et dans le diélectrique:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} ,$$

ou C est un cercle centré de rayon r et S un disque ayant le même rayon. Mais:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B ,$$

Donc:

a) $r \leq a$:

$$\mu_o \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \mu_o \frac{I}{\pi a^2} \pi r^2 \Rightarrow 2\pi r B = \mu_o \frac{I}{\pi a^2} \pi r^2 \Rightarrow B = \frac{\mu_o I}{2\pi a^2} r ;$$

b) $a < r < b$:

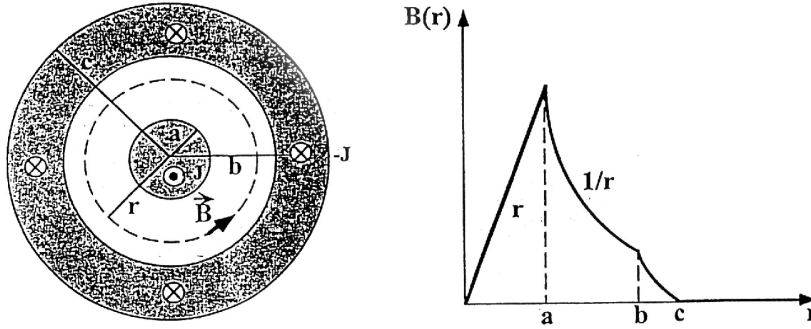
$$\mu_o \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \mu_o I \Rightarrow 2\pi r B = \mu_o I \Rightarrow B = \frac{\mu_o I}{2\pi r} ;$$

c) $b \leq r \leq c$:

$$\begin{aligned} \mu_o \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} &= \mu_o I - \mu_o \frac{I}{\pi(c^2 - b^2)} \pi (r^2 - b^2) = \mu_o I \left(1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} \right) \\ \Rightarrow 2\pi r B &= \mu_o I \left(1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} \right) \Rightarrow B = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} \right) ; \end{aligned}$$

d) $r > c$:

$$\mu_o \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \mu_o I - \mu_o I = 0 \Rightarrow 2\pi r B = 0 \Rightarrow B = 0 .$$



Exercice 8.4

Le champ magnétique $\vec{B}$ exerce sur un élément dl du côté horizontale une force $d\vec{F}_{mag} = I \vec{e}_y \times \vec{B} dl$. Les forces sur les côtés verticaux s'annulent. La condition pour que la masse flotte librement est $\vec{F}_{mag} = -\vec{F}_{grav}$. Si on considère $\vec{B} = -B\vec{e}_x$ avec $B > 0$, on a:

$$\vec{F}_{mag} = Ia \vec{e}_y \times \vec{B} = Ia \vec{e}_y \times B \vec{e}_x = IaB \vec{e}_z$$

$$\vec{F}_{grav} = -mg \vec{e}_z$$

d'où:

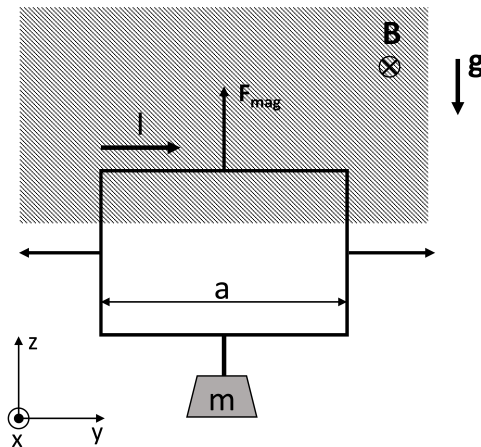
$$IaB = mg$$

et donc:

$$B = (mg/Ia)$$

et enfin:

$$\vec{B} = -(mg/Ia) \vec{e}_x$$

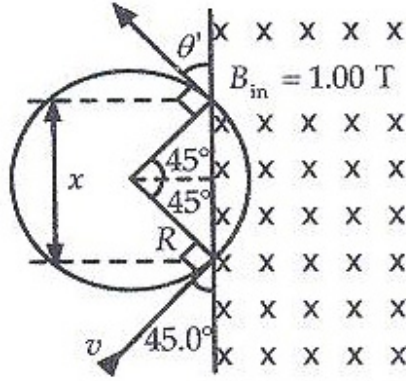


Exercice 8.5

A l'intérieur du champ magnétique, la trajectoire est circulaire, avec un rayon $R = mv/qB$. Le vecteur vitesse du proton à l'entrée et à la sortie est tangent à ce cercle, donc: $\theta' = \theta = 45^\circ$, et $x = 2R \sin \theta$. L'énergie du proton est $E = (1/2)mv^2$. Donc:

$$R = \frac{\sqrt{2Em}}{qB}$$

La conversion MeV-Joules est $1 \text{ MeV} = 10^6 \times 1.60 \times 10^{-19} = 1.60 \times 10^{-13} \text{ J}$ et la masse du proton est $m_p = 1.672 \times 10^{-27} \text{ kg}$ donc $R = 0.354 \text{ m}$ et $x = 2R \sin \theta = 0.50 \text{ m}$.



Exercice 8.6

La particule est soumise à la force de Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = qE_0 \vec{e}_y + qB_0(v_y \vec{e}_x - v_x \vec{e}_y),$$

donc:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = qE_0 \vec{e}_y + qB_0(v_y \vec{e}_x - v_x \vec{e}_y),$$

et donc:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = (q/m)E_0 \vec{e}_y + (qB_0/m)(v_y \vec{e}_x - v_x \vec{e}_y),$$

qui donne:

$$(1) \quad \frac{dv_x}{dt} = \Omega v_y; \quad (2) \quad \frac{dv_y}{dt} = -\Omega v_x + (q/m)E_0; \quad (3) \quad \frac{dv_z}{dt} = 0;$$

où on a défini: $\Omega = (qB_0/m)$. La (3) montre que $v_z = \text{const} = 0$; donc le mouvement est confiné au plan xy . Les équations (1) et (2) sont couplées. Pour les résoudre on dérive la (2) par rapport au temps et nous considérons aussi la (1) :

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = -\Omega \frac{dv_x}{dt} = -\Omega^2 v_y$$

où on reconnaît l'équation de l'oscillateur harmonique, avec solution générale:

$$v_y = A \sin(\Omega t + \phi)$$

mais $v_y(0) = 0$ et donc:

$$v_y = A \sin(\Omega t)$$

L'équation (2) est donc:

$$\Omega A \cos(\Omega t) = -\Omega v_x + (q/m)E_0$$

et donc:

$$v_x = -A \cos(\Omega t) + (qE_0/m\Omega)$$

mais $v_x(0) = v_0 + (E_0/B_0)$ et $\Omega = (qB_0/m)$, donc $A = -v_0$ et:

$$v_x(t) = v_0 \cos(\Omega t) + (qE_0/m\Omega) \quad v_y(t) = -v_0 \sin(\Omega t)$$

Après intégration et avec les conditions $x(0) = 0, y(0) = (mv_0/qB_0)$:

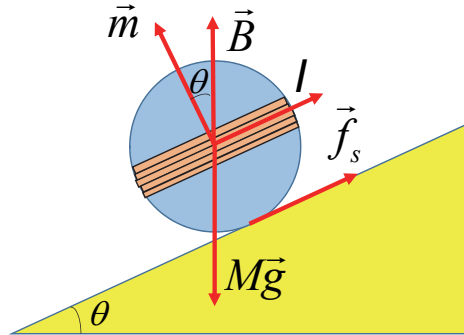
$$x(t) = (v_0/\Omega) \sin(\Omega t) + (E_0/B_0)t \quad y(t) = (v_0/\Omega) \cos(\Omega t)$$

Il s'agit d'un mouvement composé d'un mouvement circulaire uniforme de rayon r_0 et vitesse angulaire Ω , et d'une translation le long de l'axe x à la vitesse de dérive $v_d = (E_0/B_0)$. La trajectoire est une cycloïde dans le plan xy .

Il est intéressant de remarquer qu'un champ électrique dans la direction y produit une dérive dans la direction x !

Les valeurs moyennes $\langle v_x \rangle = (E_0/B_0)$ et $\langle v_y \rangle = 0$ restent constantes, ce qui montre qu'en moyenne le travail du champ E est nul. Ceci est compatible avec le fait que la direction de dérive est perpendiculaire au champ $\vec{E}$. Le travail du champ $\vec{B}$ est toujours nul!

Exercice 8.7



La sphère peut être en équilibre (c'est-à-dire sans mouvement de translation ni de rotation) si un courant approprié est appliqué.

L'équilibre de translation implique que la somme des forces soit égale à zéro. Les deux forces agissant sur la sphère sont la force gravitationnelle et la force de friction, donc:

$$f_s - Mg \sin \theta = 0 . \quad (1)$$

où f_s est la force de friction, M est la masse de la sphère, et g est l'accélération de la pesanteur.

L'équilibre de rotation implique que la somme des moments des forces appliquées par rapport au centre de la sphère est égale à zéro. Les deux forces ayant un moment non nul par rapport au centre de la sphère sont la force de frottement et la force magnétique. Pour un sens du courant comme dans la figure, le moment de la force du au champ magnétique

est dans le sens des aiguilles d'une montre et $|\vec{\tau}| = |\vec{m} \times \vec{B}| = mB \sin \theta$, ou $\vec{m}$ est le moment magnétique de la bobine. La force de friction implique un moment dans le sens contraire des aiguilles d'une montre de magnitude $f_s R$, où R est le rayon de la sphère. Donc:

$$f_s R - mB \sin \theta = 0. \quad (2)$$

De (1) et (2), on tire:

$$f_s = Mg \sin \theta \quad \text{et} \quad f_s = mB \sin \theta / R$$

et donc

$$mB = MgR.$$

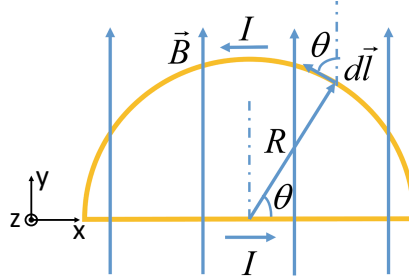
Le moment magnétique de la bobine est $m = NIA = NI\pi R^2$, donc:

$$I = \frac{Mg}{\pi NBR} = \frac{(100 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{\pi(5)(0.35 \text{ T})(0.2 \text{ m})} \cong 891 \text{ A}$$

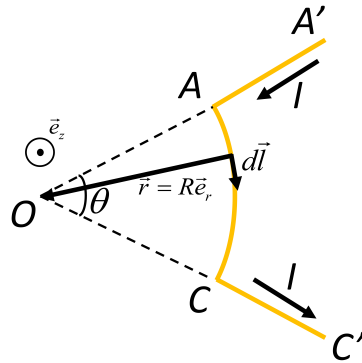
L'équilibre d'une sphère en verre de 100 kg sur un plan incliné en présence d'un champ magnétique de 0.35 T nécessite donc un courant de l'ordre de 1000 A.

Exercice 9.1

Un circuit, ayant la forme d'un demi-cercle fermé, est placé dans le plan xy (voir figure). Le circuit est soumis à un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_y$. Déterminer l'amplitude et la direction de la force agissant sur les portions droite et courbé du circuit.

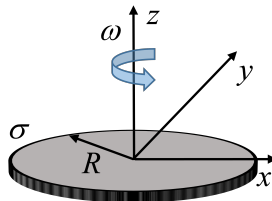
**Exercice 9.2**

Calculez le champ magnétique produit au point O par le courant I circulant dans un fil composé de deux portions droites et d'un arc de cercle de rayon R et d'angle au centre θ .

**Exercice 9.3**

Un disque isolant de rayon R et d'épaisseur négligeable avec densité de charge de surface σ (en C/m^2) tourne autour de l'axe z à vitesse angulaire constante ω . Déterminer le champ magnétique $\mathbf{B}$ sur l'axe z à une distance $z > 0$ du disque (i.e., $\mathbf{B}(0,0,z)$) en fonction de z , ω , R , σ .

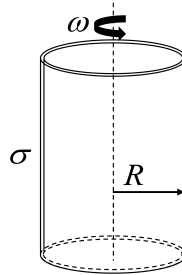
Note: $\int \frac{x^3}{(x^2+a^2)^{3/2}} dx = \frac{x^2+2a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$



Exercice 9.4

La surface d'un cylindre de rayon R et longueur $L \gg R$ est uniformément chargée avec une densité de charge de surface σ . Quel est le champ magnétique à l'intérieur du cylindre lorsqu'il tourne autour de son axe à une vitesse angulaire ω ?

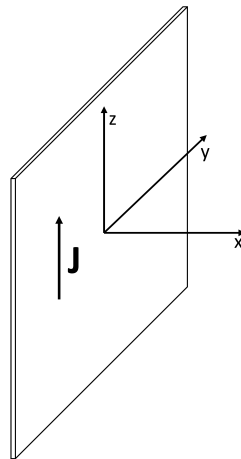
Application numérique: $R = 0.1$ m; $\sigma = 1$ C/m²; $\omega = 2\pi \times 10^3$ rad/s



Exercice 9.5

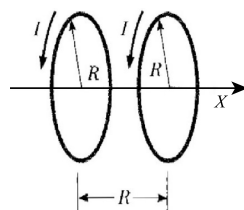
Considérez une plaque conductrice infinie très mince d'épaisseur t approximativement coïncidant avec le plan yz et portant une densité de courant uniforme $\vec{J} = J\vec{e}_z$ (i.e., un densité de courant de surface $\vec{J}_s = Jt\vec{e}_z$). Déterminer le champ magnétique $\vec{B}$ en un point $P(x, 0, 0)$ de l'axe x en utilisant:

- a) la loi d'Ampère
- b) la loi de Biot-Savart.



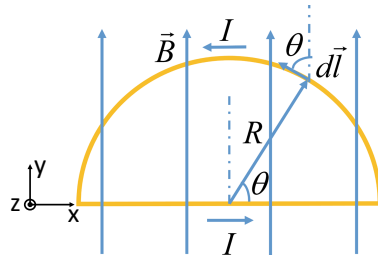
Exercice 9.6

Deux bobines circulaires de N spires chacune et de rayon R sont centrées sur l'axe (Ox) . Le centre de la première bobine est en $x = 0$ et celui de la seconde en $x = R$. Un courant I constant circule dans la même direction dans chaque bobine. Montrez que le champ magnétique sur l'axe x est donné par: $B = \frac{N\mu_0 IR^2}{2} \left[\frac{1}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(2R^2 + x^2 - 2xR)^{\frac{3}{2}}} \right]$



Exercice 9.1

Les forces agissant sur les deux parties du circuit sont perpendiculaires au plan du dessin. Utilisant la règle de la main droite, on voit que la force $\vec{F}_1$ sur la partie droite est dirigée vers $\vec{e}_z$, et que la force $\vec{F}_2$ sur la partie courbée est dirigée vers $-\vec{e}_z$.



$$\vec{F}_1 = I \int_a^b d\vec{l} \times \vec{B} = IB \int_0^{2R} dl \vec{e}_z = 2IRB \vec{e}_z .$$

La force $d\vec{F}_2$ sur un élément $d\vec{l}$ est:

$$d\vec{F}_2 = I d\vec{l} \times \vec{B} = -IB \sin \theta dl \vec{e}_z = -IB \sin \theta R d\theta \vec{e}_z .$$

Donc:

$$\vec{F}_2 = - \int_0^\pi IRB \sin \theta d\theta \vec{e}_z = -2IRB \vec{e}_z .$$

et la force totale sur le circuit est:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

Note: Le résultat $\sum_i \vec{F}_i = 0$ est valable pour tous les circuits plongés dans un champ magnétique uniforme:

$$\vec{F} = I \oint_{\Gamma} d\vec{l} \times \vec{B}_0 = -I \vec{B}_0 \times \oint_{\Gamma} d\vec{l} = 0 .$$

Exercice 9.2

Nous utiliserons la loi de Biot-Savart:

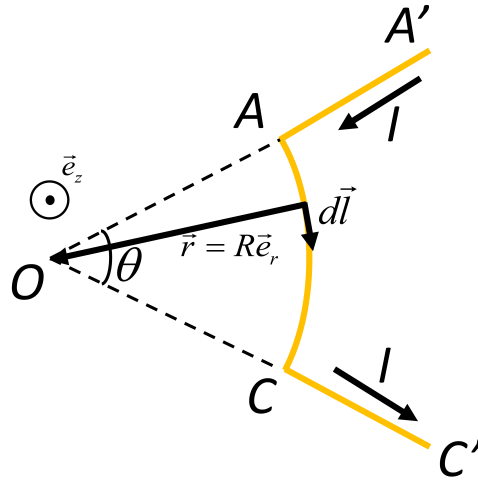
$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J} \times \vec{e}_r}{r^2} dV = \frac{\mu_o I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2} .$$

Puisque $d\vec{l}$ est parallèle à $\vec{r}$ le long des deux chemins AA' et CC' , ces contributions sont égales à zéro ($d\vec{l} \times \vec{e}_r = 0$). En tout point le long de l'arc de cercle AC , $d\vec{l}$ est perpendiculaire à $\vec{r}$, donc:

$$d\vec{l} \times \vec{e}_r = -dl\vec{e}_z,$$

et donc:

$$\vec{B}(0,0,0) = B_z(0,0,0)\vec{e}_z = -\frac{\mu_o I}{4\pi R^2} \int dl = -\vec{e}_z \frac{\mu_o I}{4\pi R^2} R \int d\theta = -\frac{\mu_o I}{4\pi R} \theta \vec{e}_z .$$



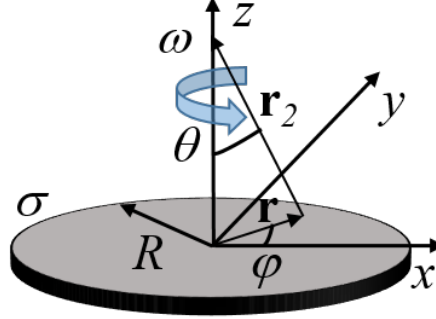
Note: Pour une bobine d'un tour $\theta = 2\pi$, et donc:

$$\vec{B}(0,0,0) = B_z(0,0,0)\vec{e}_z = -\frac{\mu_o I}{2R} \vec{e}_z$$

Exercice 9.3

Le champ magnétique produit par le disque chargé en rotation est équivalent au champ magnétique produit par des spires concentriques circulaires.

Le long de l'axe z , par symétrie, $\mathbf{B}(0, 0, z) = B_z(0, 0, z)\hat{\mathbf{z}}$.



Avec la loi de Biot-Savart:

$$dB_z(0, 0, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{r}}_2) \cdot \hat{\mathbf{z}}}{r_2^2} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{J}{r_2^2} \sin \theta dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{J}{r_2^2} \sin \theta dV$$

$$J = nqv = \frac{\sigma \omega r}{dz}; \quad dV = r d\varphi dr dz; \quad \sin \theta = \frac{r}{r_2}; \quad r_2 = \sqrt{r^2 + z^2}$$

$$\Rightarrow dB_z(0, 0, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sigma \omega r^2 d\varphi dr \frac{1}{r^2 + z^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4\pi} \frac{r^3}{(r^2 + z^2)^{3/2}} d\varphi dr$$

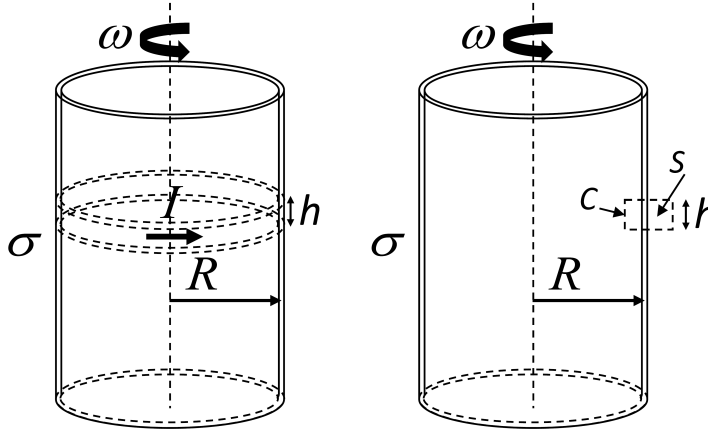
$$\Rightarrow B_z(0, 0, z) = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{r^3}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dr = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \int_0^R \frac{r^3}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dr$$

$$\Rightarrow B_z(0, 0, z) = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left[\frac{r^2 + 2z^2}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right]_0^R = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \left[\frac{R^2 + 2z^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 2z \right]$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}(0, 0, z) = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \left[\frac{R^2 + 2z^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 2z \right] \hat{\mathbf{z}}$$

Exercice 9.4

La rotation du cylindre chargé est équivalent à un cylindre statique avec un courant sur sa surface.



Considérons un anneau ayant un rayon R et une hauteur h . Le courant équivalent circulant dans cet anneau est donné par:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{Q}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \sigma 2\pi R h = \omega \sigma R h$$

ou Q est la charge dans l'anneau, et $T = (1/f) = 2\pi/\omega$ est le temps nécessaire pour que cette charge fasse un tour complet.

La situation est analogue à celle d'une bobine solénoïdale. Pour le solénoïde on a (Loi d'Ampère):

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

avec:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B h$$

et

$$\mu_o \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \mu_o I$$

donc:

$$B = \frac{\mu_o}{h} I$$

et enfin:

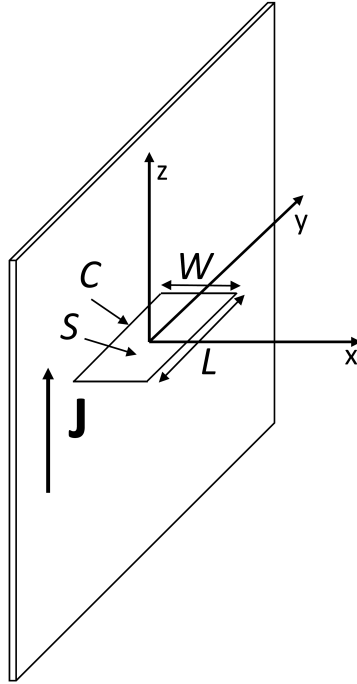
$$B = \mu_o \omega R \sigma$$

Application numérique:

$$B = \mu_o \omega R \sigma = 8 \times 10^{-4} \text{T} = 0.8 \text{ mT}$$

Exercice 9.5

a) Par symétrie et en utilisant la *règle de la main droite* on déduit $\vec{B}(x, 0, 0) = B_y \vec{e}_y$. On peut appliquer la loi d'Ampère en considérant la surface S et son contour C rectangulaire dans le plan xy (voir figure).



Loi d'Ampère:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

mais:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{-W/2, -L/2}^{W/2, -L/2} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{W/2, -L/2}^{W/2, L/2} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{W/2, L/2}^{-W/2, L/2} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{-W/2, L/2}^{-W/2, -L/2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 + BL + 0 + BL = 2BL$$

et

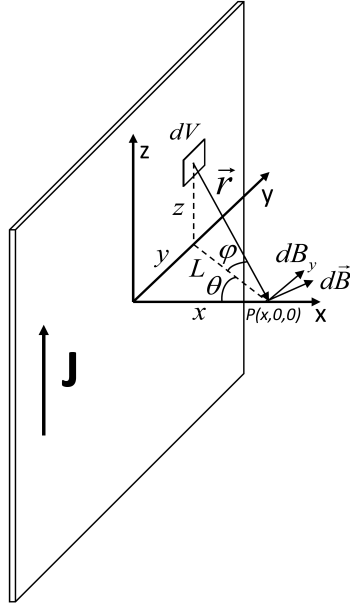
$$\mu_o \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \mu_o J t L$$

donc:

$$B = \frac{\mu_o}{2} J t = \frac{\mu_o}{2} J_s .$$

b) La loi de Biot-Savart pour la figure ci-dessous peut être écrit comme:

$$\vec{B} = \int_V d\vec{B} dV = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J} \times \vec{e}_r}{r^2} dV = \frac{\mu_o J}{4\pi} \int_V \frac{\vec{e}_z \times \vec{e}_r}{r^2} dV$$



Les vecteurs $d\vec{B}$ sont perpendiculaires à $\vec{e}_z$ et $\vec{e}_r$, donc ils se trouvent dans le plan xy . Par symétrie, les composantes dB_x s'annulent. On peut donc se limiter aux composantes $dB_y = dB \cos \theta$ pour l'intégration.

$$dB_y = \frac{\mu_o J}{4\pi} \frac{\|\vec{e}_z \times \vec{e}_r\| \cos \theta}{r^2} dV = \frac{\mu_o J \cos \varphi \cos \theta}{4\pi r^2} dx dy dz \cong \frac{\mu_o J_s \cos \varphi \cos \theta}{4\pi r^2} dy dz = \frac{\mu_o J_s \cos \varphi \cos \theta}{4\pi r^2} dy dz$$

On utilisera les angles θ et φ pour l'intégration. En posant $L = \sqrt{x^2 + y^2}$, z et y s'éliminent comme suit:

$$z = L \tan \varphi \quad \Rightarrow \quad dz = \frac{L}{\cos^2 \varphi} d\varphi ;$$

$$y = x \tan \theta \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{x}{\cos^2 \theta} d\theta .$$

Donc:

$$dB_y = \frac{\mu_o J_s}{4\pi} \frac{xL}{r^2 \cos \varphi \cos \theta} d\theta d\varphi = \frac{\mu_o J_s}{4\pi} \cos \varphi d\theta d\varphi ,$$

car $L = r \cos \varphi$ et $x = r \cos \varphi \cos \theta$.

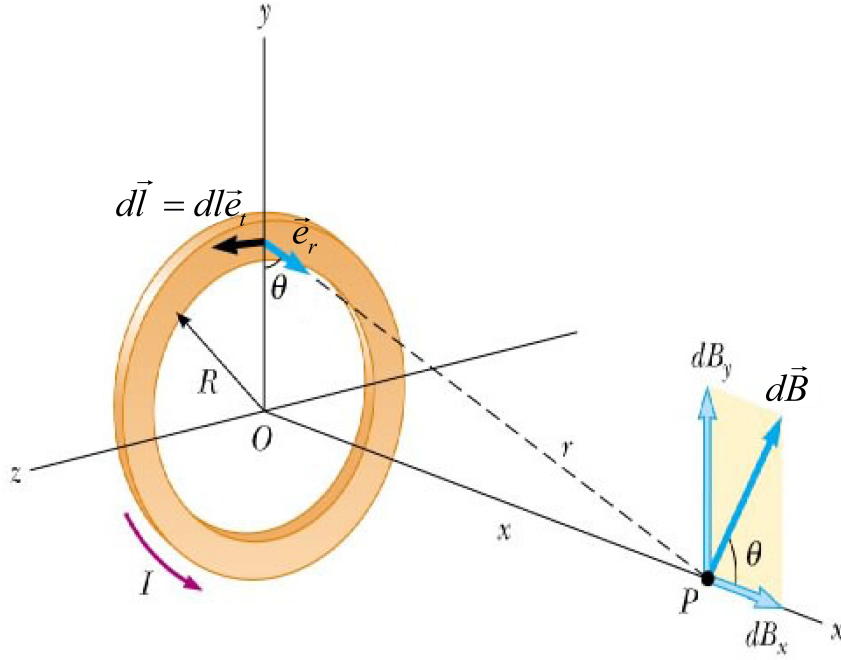
L'intégration se fait, pour les deux angles, entre $-\pi/2$ et $\pi/2$:

$$B = \frac{\mu_o J_s}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = \frac{\mu_o J_s}{2} .$$

On retrouve le résultat obtenu par la loi d'Ampère.

Exercice 9.6

A cause de la symétrie cylindrique, les composantes B_y et B_z s'annulent.



On utilise pour chaque bobine la loi de Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \times \vec{e}_r}{r^2} dV = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{e}_t \times \vec{e}_r}{r^2} dl \quad (1)$$

$\vec{e}_t$ est perpendiculaire à $\vec{e}_r$, donc $\|\vec{e}_t \times \vec{e}_r\| = 1$. Ce qui donne pour la première bobine:

$$\|d\vec{B}_1\| = dB_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{(x^2 + R^2)} \quad (2)$$

La seule composante non nulle de $\vec{B}$ est B_x . Nous considérons donc seulement $dB_x = dB \cos \theta$. Pour la première bobine:

$$\cos \theta_1 = \frac{R}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \quad (3)$$

L'intégration sur la spire donne:

$$B_{1x} = \oint dB_1 \cos \theta_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \oint dl = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \quad (4)$$

On trouve le champ B_{2x} produit par la deuxième bobine par translation $x \rightarrow x - R$:

$$B_{2x} = \oint dB_2 \cos \theta_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{((R - x)^2 + R^2)^{3/2}} \oint dl = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{((R - x)^2 + R^2)^{3/2}} \quad (5)$$

Le champ total pour les deux bobines de N spires est:

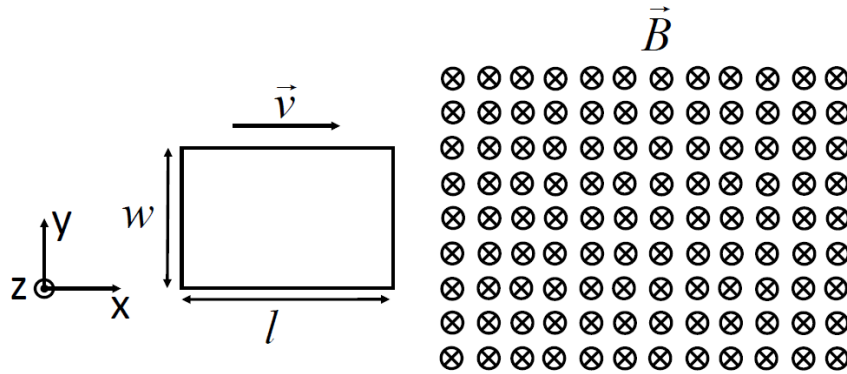
$$B_x = B_{1x} + B_{2x} = \frac{N\mu_0 I R^2}{2} \left[\frac{1}{(x^2 + R^2)^{3/2}} + \frac{1}{(2R^2 + x^2 - 2xR)^{3/2}} \right] \quad (6)$$

Exercice 10.1

Considérons une bobine de résistance R , constituée de N spires rectangulaires de longueur l et de largeur w . La bobine se déplace avec une vitesse constante $\vec{u} = u\vec{e}_x$ et entre dans une zone soumise à un champ magnétique uniforme et indépendant du temps $\vec{B} = -B_0\vec{e}_z$.

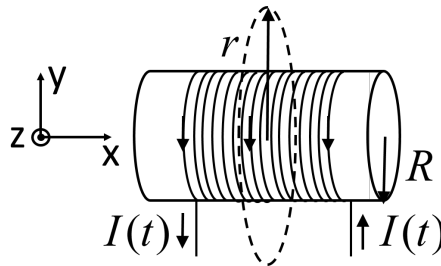
Calculez l'amplitude et la direction du courant induit $I(t)$ et l'amplitude et la direction de la force de Laplace $\vec{F}(t)$ (résultant *macroscopique* des forces de Lorentz *microscopiques*) agissant sur la bobine quand:

- la bobine entre dans la zone soumise au champ $\vec{B}$ mais n'est pas encore entièrement dedans,
- la bobine est entièrement dans cette zone,
- la bobine commence à sortir de cette zone.

**Exercice 10.2**

Un courant alternatif $I(t) = I_{max} \cos \omega t$ circule dans une très long solénoïde de rayon R composée de n spires par unité de longueur. En supposant que nous sommes en conditions quasi-statiques, déterminez le champ électrique $\vec{E}(t)$ induit à une distance:

- $r < R$ de l'axe du solénoïde.
- $r > R$ de l'axe du solénoïde.



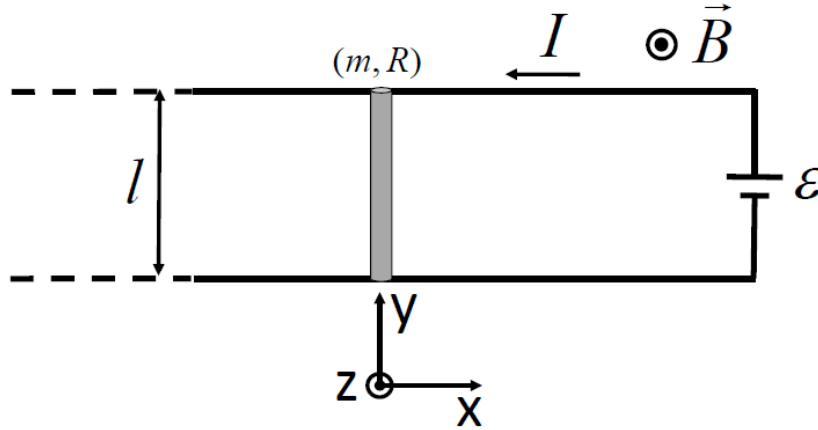
Exercice 10.3

Une barre conductrice de masse m , de longueur l , et de résistance R peut glisser sans friction sur deux rails conducteurs parallèles fixes.

Une batterie produit une force électromotrice constante $\mathcal{E}$ entre les rails. Un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_z$ uniforme et indépendant du temps est appliqué perpendiculairement au plan défini par les rails (voir figure).

Initialement, la barre est au repos (i.e., $\vec{v}(t=0) = 0$). On négligera la self-inductance du circuit et la résistance des rails et des fils de connexion à la batterie. Montrez qu'à l'instant t , sa vitesse est:

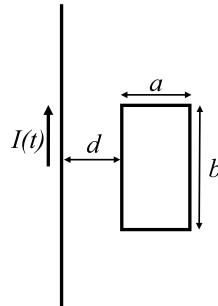
$$\vec{v}(t) = -\frac{\mathcal{E}}{Bl}(1 - e^{-B^2 l^2 t / mR})\vec{e}_x \quad (1)$$



Exercice 10.4

Un fil infini est parcouru par un courant dépendant du temps $I(t) = I_0 \exp(-t/\tau)$ avec I_0 le courant initial (en A) et τ la constante de temps (en s) de la décroissance exponentielle. Une boucle rectangulaire conductrice avec côtés a et b est située à une distance d dans le même plan que le fil. La boucle rectangulaire a une résistance R et une inductance négligeable. Déterminer:

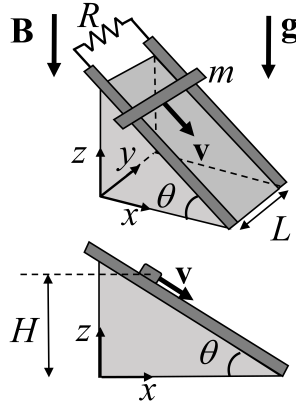
- La force électromotrice induite dans la boucle rectangulaire (en fonction de a , b , d , τ , I_0 , t).
- L'énergie dissipée E_J par effet Joule dans la résistance R dans l'intervalle de temps de zéro à l'infini (en fonction de a , b , d , τ , I_0 , R).



Exercice 10.5

Une barre conductrice de masse m glisse à vitesse v constante et sans frottement sur une paire de rails conducteurs séparés par une distance L . La barre et les rails sont situés sur un plan incliné formant un angle θ avec le sol. Les deux rails sont uniquement connectés en haut avec une résistance R . La résistance des rails et de la barre sont négligeables. Le système est dans un champ magnétique uniforme $\mathbf{B} = -B\hat{\mathbf{z}}$ (i.e., dirigé vers le bas, perpendiculairement au sol). La force de gravité agit sur la barre dans la même direction que le champ magnétique. Déterminez:

- (a) La vitesse v de la barre le long des rails.
- (b) L'énergie E_J dissipée par effet Joule dans la résistance R pendant le temps que met la barre à descendre d'une hauteur H .



Exercice 10.1

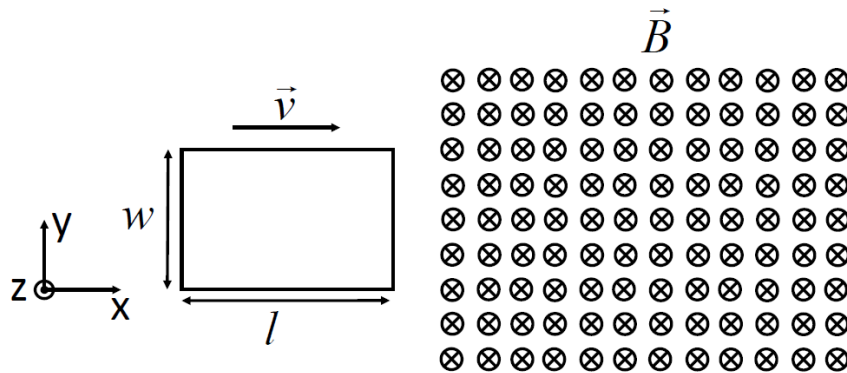
a) Soit $x < l$ la distance parcourue par la bobine à l'intérieur de la région où règne le champ magnétique. La f.e.m. induite dans la bobine est :

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = -N \frac{d(Bwx)}{dt} = -NBwv$$

donc le courant est:

$$I = \frac{\|\mathcal{E}\|}{R} = \frac{NBwv}{R}$$

dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, pour réduire la variation du flux. La direction du courant peut aussi être déterminée par la force de Lorentz sur les électrons du conducteur (voir cours).



La force sur le côté gauche de la bobine est zéro ($B = 0$ donc $\vec{F}_{gauche} = 0$).
La force sur le côté droit de la bobine est:

$$\vec{F}_{droit} = -NIwB\vec{e}_x = -N\left(\frac{NBwv}{R}\right)wB\vec{e}_x = -\frac{N^2B^2w^2v}{R}\vec{e}_x$$

La force sur le côté supérieur de la bobine est:

$$\vec{F}_{sup} = -N(IxB\vec{e}_y)$$

La force sur le côté inférieur de la bobine est:

$$\vec{F}_{inf} = +N(IxB\vec{e}_y).$$

donc la force totale sur la bobine est:

$$\vec{F} = \vec{F}_{gauche} + \vec{F}_{sup} + \vec{F}_{inf} + \vec{F}_{droit} = \vec{F}_{droit} = -\frac{N^2B^2w^2v}{R}\vec{e}_x \quad (\text{s'oppose au mouvement})$$

b) Dans ce cas:

$$\Phi_B = NBwl = \text{constant} ,$$

donc $\mathcal{E}=0$, $I = 0$ and $\vec{F} = 0$.

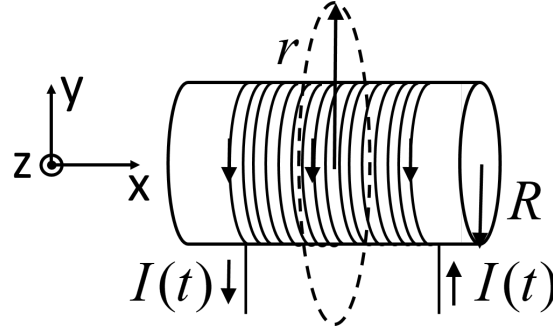
c) Dès que la bobine commence à quitter cette région, le flux diminue. Le courant est le même que dans la partie (a) de l'exercice, mais le sens du courant est maintenant dans le sens des aiguilles d'une montre, pour réduire la variation du flux. Par conséquent, la force exercée sur le côté gauche de la bobine est:

$$\vec{F}_{gauche} = -\frac{N^2 B^2 w^2 v}{R} \vec{e}_x$$

et la force totale sur la bobine est:

$$\vec{F} = \vec{F}_{gauche} = -\frac{N^2 B^2 w^2 v}{R} \vec{e}_x \quad (\text{s'oppose au mouvement})$$

Exercice 10.2



Dans les diapositives du cours, nous avons démontré, en utilisant la loi d'Ampère en condition statique, que le champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde long est donné par $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_x$ et le champ magnétique à l'extérieur du solénoïde est $\vec{B} = 0$.

Donc, en supposant que nous sommes en conditions quasi-statiques, pour $r < R$:

$$\vec{B} = \mu_0 n I_{\max} \cos \omega t \vec{e}_x \quad (1)$$

et pour $r > R$:

$$\vec{B} = 0 \quad (2)$$

La circulation du champ électrique le long du contour du disque de rayon r est (loi de (Maxwell)-Faraday-(Lenz)):

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (3)$$

Comme indiqué dans les diapositives du cours (sans démonstration), le champ électrique $\vec{E}$ associé à un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et dépendant du temps dans la direction x est approximativement dans la direction azimutale. Donc:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 2\pi r E \quad (4)$$

A partir des Eqs.(1) et (2),

pour $r < R$:

$$\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = \int_{S_{r < R}} \mu_0 n I_{\max} \omega \sin \omega t \vec{e}_x \cdot d\vec{s} = \int_{S_{r < R}} \mu_0 n I_{\max} \omega \sin \omega t ds = \mu_0 n I_{\max} \omega \sin \omega t \pi r^2 \quad (5)$$

et pour $r > R$:

$$\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = \int_{S_{r > R}} \mu_0 n I_{\max} \omega \sin \omega t \vec{e}_x \cdot d\vec{s} = \int_{S_{r > R}} \mu_0 n I_{\max} \omega \sin \omega t ds = \mu_0 n I_{\max} \omega \sin \omega t \pi R^2 \quad (6)$$

Donc, a partir des Eqs.(4), (5), et (6),
pour $r < R$:

$$E = \frac{r\mu_0 n I_{\max} \omega}{2} \sin \omega t \quad (7)$$

pour $r > R$:

$$E = \frac{R^2 \mu_0 n I_{\max} \omega}{2r} \sin \omega t \quad (8)$$

Donc, même si le champ magnétique $\vec{B}$ est nul hors du solénoïde, le champ électrique $\vec{E}$ n'est pas nulle hors du solénoïde (et, en particulier, décroît en $1/r$ et oscille dans le temps). Cela explique pourquoi un courant circulerait dans une bobine placée autour du solénoïde. Les électrons se déplacent dans cette bobine sous l'effet de la force de Lorentz due au champ électrique $\vec{E}$ (les électrons ne peuvent pas ressentir la variation du flux magnétique mais seulement la force de Lorentz). Le champ électrique $\vec{E}$ à l'intérieur du solénoïde grandit en r et oscille dans le temps.

Remarque (voir cours):

$$\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_S \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} + \int_S \vec{v}(\nabla \cdot \vec{B}) \cdot d\vec{s} \quad (9)$$

mais dans notre problème ici $\vec{v} = 0$ et, toujours, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. Donc:

$$\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{d\Phi_B}{dt} . \quad (10)$$

donc, à partir de l'Eq.(3):

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} . \quad (11)$$

Exercice 10.3

La barre est soumise l'action de la force de Lorentz $\vec{F} = -IlB\vec{e}_x$, donc la barre est mise en mouvement dans la direction $-\vec{e}_x$. On désigne la vitesse de la barre par $\vec{v}(t) = -v(t)\vec{e}_x$, avec $v(t) > 0$. Donc:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -IlB\vec{e}_x \quad \text{et} \quad m\frac{dv}{dt} = IlB$$

Si la vitesse de la barre est non-nulle, une force électromotrice $\mathcal{E}'$ est créée. Nous pouvons calculer la force électromotrice induite $\mathcal{E}'$ de deux manières différentes:

$$\mathcal{E}' = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{d}{dt} \int_S B ds = B \frac{d}{dt} (x_0 + vt) l = Bvl$$

$$\mathcal{E}' = \int_0^l (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = Bvl$$

La force électromotrice induite $\mathcal{E}'$ et la force électromotrice $\mathcal{E}$ sont opposées (voir figure):

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}' = RI$$

Donc:

$$m\frac{dv}{dt} = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}'}{R} lB \quad \text{et} \quad \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{lB\mathcal{E}}{Rm}$$

avec $\tau = (Rm/l^2B^2)$. Il s'agit d'une équation différentielle ayant la forme:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = b \quad \text{avec solution :} \quad y(t) = Ae^{-at} + (b/a)$$

Donc, dans notre cas:

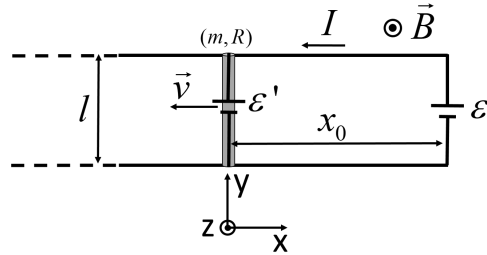
$$v(t) = Ae^{-t/\tau} + \frac{\tau lB\mathcal{E}}{Rm} = Ae^{-t/\tau} + \frac{\mathcal{E}}{lB}$$

En utilisant la condition initiale $v(0) = 0$ nous obtenons $A = -\frac{\mathcal{E}}{lB}$, et donc:

$$v(t) = \frac{\mathcal{E}}{lB}(1 - e^{-t/\tau})$$

et donc sous forme vectorielle:

$$\vec{v}(t) = -v(t)\vec{e}_x = -\frac{\mathcal{E}}{lB}(1 - e^{-t/\tau})\vec{e}_x \quad (\text{q.e.d.})$$



Exercice 10.4

a)

Le champ magnétique créé par le fil est (loi d'Ampère):

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \Rightarrow 2\pi x B = \mu_0 I \Rightarrow B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

Le flux du champ magnétique créé par le fil à travers la bobine rectangulaire est:

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right) \Rightarrow \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right)$$

Donc la force électromotrice induite dans la bobine rectangulaire est:

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right) \frac{I_0}{\tau} \exp(-t/\tau) \Rightarrow \varepsilon = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right) \frac{I_0}{\tau} \exp(-t/\tau)$$

b)

Le courant dans la bobine rectangulaire est:

$$I_b = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\mu_0 b}{2\pi R} \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right) \frac{I_0}{\tau} \exp(-t/\tau)$$

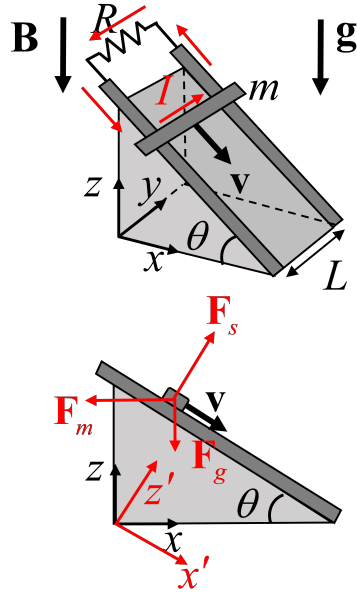
Ainsi, l'énergie dissipée dans la bobine rectangulaire (dans le temps de zéro à l'infini) est:

$$\begin{aligned} E_J &= \int_0^\infty R I_b^2 dt = \\ &= \int_0^\infty R \left(\frac{\mu_0 b}{2\pi R} \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right) \frac{I_0}{\tau} \exp(-t/\tau) \right)^2 dt = \frac{1}{R} \left(\frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right) \frac{I_0}{\tau} \right)^2 \int_0^\infty (\exp(-t/\tau))^2 dt = \\ &= \frac{1}{R} \left(\frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right) \frac{I_0}{\tau} \right)^2 \left[-\frac{1}{2} \tau \exp(-2t/\tau) \right]_0^\infty = \frac{1}{R} \left(\frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right) \frac{I_0}{\tau} \right)^2 \frac{1}{2} \tau \end{aligned}$$

donc:

$$E_J = \frac{1}{2\tau R} \left(\frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right) I_0 \right)^2$$

Exercice 10.5



(a)

Le flux du champ magnétique à travers la boucle rectangulaire (formée par la barre conductrice mobile, la résistance R et une partie des deux rails) est:

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = - \int_S B \cos \theta ds = -B \cos \theta \int_S ds = -B \cos \theta Lx'$$

avec:

$$x' = \frac{x}{\cos \theta} \quad (x' : \text{direction du mouvement de la barre, } \mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}}')$$

Donc la force électromotrice induite est :

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}\Phi_B = B \cos \theta L \frac{dx'}{dt} = B \cos \theta L v = vB \cos \theta L$$

Nous pouvons également calculer la force électromotrice induite comme suit:

$$\varepsilon = \oint_C (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_{C'} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) d\mathbf{l} = vB \cos \theta L$$

ou C' est la barre mobile, la seule partie du circuit qui a une vitesse $\mathbf{v}$ non nulle. Donc le courant est:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{vB \cos \theta L}{R}$$

et la force d'origine magnétique agissant sur la barre mobile est:

$$\mathbf{F}_m = I \int_L d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = IL\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{B} = -ILB\hat{\mathbf{x}} = \frac{vB \cos \theta L}{R} LB\hat{\mathbf{x}} = -\frac{vB^2 \cos \theta L^2}{R} \hat{\mathbf{x}} = -F_m \hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{F}_g = m\mathbf{g} = -mg\hat{\mathbf{z}} = -F_g\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{F}_s = F_s \cos \theta \hat{\mathbf{z}} + F_s \sin \theta \hat{\mathbf{x}}$$

Par hypothèse, la vitesse est constante, donc:

$$\mathbf{F}_m + \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_g = 0$$

Donc:

$$\begin{aligned} \begin{cases} -F_m + F_s \sin \theta = 0 \\ F_s \cos \theta - F_g = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} F_s \sin \theta = F_m \\ F_s \cos \theta = F_g \end{cases} \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{F_m}{F_g} = \frac{vB^2 \cos \theta L^2}{mgR} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{vB^2 \cos \theta L^2}{mgR} \Rightarrow v = \frac{mgR \sin \theta}{B^2 L^2 \cos^2 \theta} \end{aligned}$$

Autre projection des forces (projection sur l'axe x'):

La force totale sur l'axe x' est nulle puisque la barre se déplace à une vitesse constante:

$$-F_m \cos \theta + mg \sin \theta = 0 \Rightarrow \frac{vB^2 \cos \theta L^2}{R} \cos \theta = mg \sin \theta \Rightarrow v = \frac{mgR \sin \theta}{B^2 L^2 \cos^2 \theta}$$

Autre solution, basée sur la conservation de l'énergie:

Conservation de l'énergie: En l'absence d'autres forces dissipatives et à vitesse constante, la variation de l'énergie potentielle gravitationnelle est convertie en énergie dissipée par effet Joule dans la résistance:

$$RI^2 dt = -mg dz \Rightarrow RI^2 = -mg(dz/dt)$$

mais:

$$z = z_0 - v_z t = z_0 - v \sin \theta t \Rightarrow (dz/dt) = -v \sin \theta$$

donc:

$$RI^2 = mgv \sin \theta$$

D'après la solution précédente, nous avons que:

$$I = \frac{vB \cos \theta L}{R}$$

donc:

$$RI^2 = R \left(\frac{vB \cos \theta L}{R} \right)^2 = \frac{v^2 B^2 \cos^2 \theta L^2}{R}$$

et donc:

$$\frac{v^2 B^2 \cos^2 \theta L^2}{R} = mgv \sin \theta$$

et enfin:

$$v = \frac{mgR \sin \theta}{B^2 L^2 \cos^2 \theta}$$

(b)

Conservation de l'énergie: En l'absence d'autres forces dissipatives et à vitesse constante, la variation de l'énergie potentielle gravitationnelle est convertie en énergie dissipée par effet Joule dans la résistance:

$$\Delta E_c + \Delta E_g = E_J$$

avec:

$$E_c = (1/2)mv^2 \quad E_g = mgz$$

mais $v = \text{const}$ donc:

$$\Rightarrow \Delta E_c = 0 \Rightarrow E_J = \Delta E_g = mgH \Rightarrow E_J = mgH.$$

Autre solution:

$$H = D \sin \theta, \Delta t = \frac{D}{v} = \frac{H}{v \sin \theta} \Rightarrow E_J = \int_0^{H/v \sin \theta} RI^2 dt = RI^2 \int_0^{H/v \sin \theta} dt = R \left(\frac{vB \cos \theta L}{R} \right)^2 \frac{H}{v \sin \theta} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow E_J = R \left(\frac{B \cos \theta L}{R} \right)^2 \frac{mgR \sin \theta}{B^2 L^2 \cos^2 \theta} \frac{H}{\sin \theta} = mgH$$

Exercice 11.1

Vous achetez une nouvelle chaîne stéréo. Le vendeur vous annonce une puissance totale acoustique de 110 W. Une fois à la maison, vous disposez les haut-parleurs de manière à ce qu'ils forment une source presque ponctuelle (i.e., très proches les uns des autres). Nous supposons que les ondes émises sont sphériques. Vous allumez la chaîne et vous placez le volume au maximum. En vous approchant alors des haut-parleurs, vous constatez que le son commence à vous faire mal lorsque vous vous trouvez à une distance de 1.3 m. Le vendeur vous a-t-il dit la vérité sur la puissance maximale de votre chaîne stéréo ?

Indication: Le seuil de douleur est approx. 127 dB. La référence 0 dB est le seuil de audibilité (approx. 10^{-12} W/m²).

Exercice 11.2

Trois ondes élastiques transverses sur une corde sont décrites par

$$\xi_1(x, t) = 2 \sin(4x - 2t)$$

$$\xi_2(x, t) = \sin(3x - 4t)$$

$$\xi_3(x, t) = 2 \sin(3x - 3t)$$

où ξ est le déplacement transverse, x est exprimé en mètres, et t en secondes.

a) Classez les ondes selon:

- leur vitesse de propagation
- leur vitesse maximale de déplacement transversal

b) Dessinez sur le même graphe ces trois ondes pour $t = 0$.

Exercice 11.3

Un sous-marin A voyage sous l'eau à la vitesse de 8 m/s. Son sonar émet une onde à la fréquence 1400 Hz. Un deuxième sous-marin B se déplace à la vitesse de 9 m/s dans la direction opposée vers le sous-marin A . La vitesse du son dans l'eau est de 1533 m/s.

a) Quelle fréquence est détectée par un observateur se trouvant dans B ?

b) Une partie de l'onde émise par A se réfléchit sur B et retourne vers A . Quelle est la fréquence de l'écho radar détecté par un observateur se trouvant dans A ?

c) Les deux sous-marins s'évitent de justesse et continuent leur course en s'éloignant sur la même ligne droite. Quelle fréquence est maintenant détectée à bord de B ?

Exercice 11.4

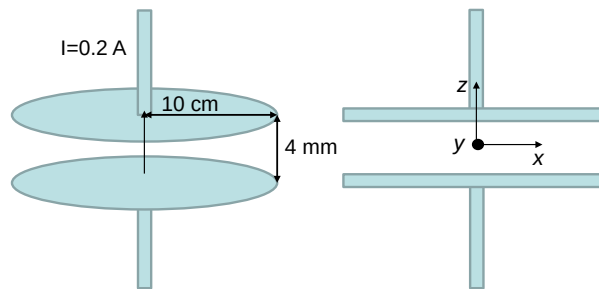
Une source de lumière monochromatique émet uniformément dans toutes les directions une puissance électromagnétique de 100 W.

- Calculer l'intensité de l'onde à un mètre de la source.
- Calculer la densité d'énergie moyenne du champ électrique à la même distance de la source.
- Calculer la densité d'énergie moyenne du champ magnétique au même endroit.

Exercice 11.5

Un courant de 0.2 A charge un condensateur composé d'électrodes circulaires de 10 cm de rayon. La séparation entre les électrodes est de 4 mm.

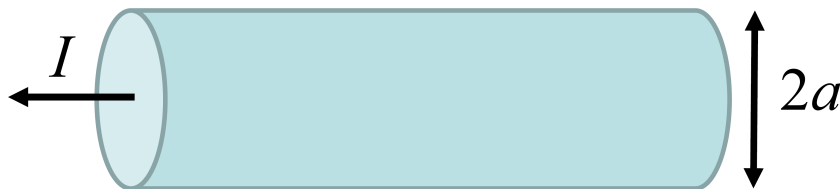
- Quelle est la variation du champ électrique entre les électrodes par unité de temps?
- Quel est le champ magnétique à 5 cm du centre entre les électrodes?
- Calculer le vecteur de Poynting $\vec{S}(\vec{x}, t)$. Montrer que le flux d'énergie électromagnétique vient par les surfaces latérales du condensateur.
- Vérifier la conservation de l'énergie électromagnétique (le théorème de Poynting) *localement* en un point quelconque entre les deux plaques et *globalement* pour le volume du condensateur.



Exercice 11.6

Un barreau conducteur de longueur infinie (diamètre: $2a$, conductivité électrique: σ , perméabilité magnétique relative: $\mu_r = 1$), est parcouru par un courant I indépendant du temps.

- Calculez le vecteur de Poynting en tout point du conducteur.
- Montrez que la puissance dissipée par effet Joule est égale à la puissance fournie par le champ électromagnétique entourant le conducteur.



Exercice 11.1

A 1.3 m des haut-parleurs, l'intensité sonore est au seuil de la douleur (i.e., approx. 127 dB). En utilisant la relation

$$I[\text{dB}] = 10 \log_{10} \frac{I[\text{W/m}^2]}{I_0[\text{W/m}^2]}$$

on peut déterminer l'intensité I , soit la puissance par unité de surface, en W/m^2

$$I[\text{W/m}^2] = I_0[\text{W/m}^2] 10^{\frac{I[\text{dB}]}{10}}$$

où $I_0 = 10^{-12} \text{W/m}^2$ est l'intensité de référence (seuil de audibilité). En supposant l'onde sphérique, la relation entre la po de la chaîne stéréo est donnée par

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \quad \Rightarrow \quad P = 4\pi r^2 I.$$

L'application numérique donne

$$P = 106 \text{ W}.$$

donc le vendeur a été tout à fait honnête.

Exercice 11.2

a) On part de l'expression générale d'une onde progressive sinusoïdale

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t) ;$$

$v = \omega/k$ représente la vitesse de propagation de l'onde et $u = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\omega \xi_0 \cos(kx - \omega t)$ représente la vitesse de déplacement transversal. La vitesse de déplacement transversal maximum vaut donc $|u^{max}| = |\omega \xi_0|$.

Donc:

1) $v_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ m/s}$	$ u_1^{max} = 2 \cdot 2 = 4 \text{ m/s}$
2) $v_2 = \frac{4}{3} \text{ m/s}$	$ u_2^{max} = 4 \text{ m/s}$
3) $v_3 = \frac{3}{3} = 1 \text{ m/s}$	$ u_3^{max} = 3 \cdot 2 = 6 \text{ m/s}$

Donc:

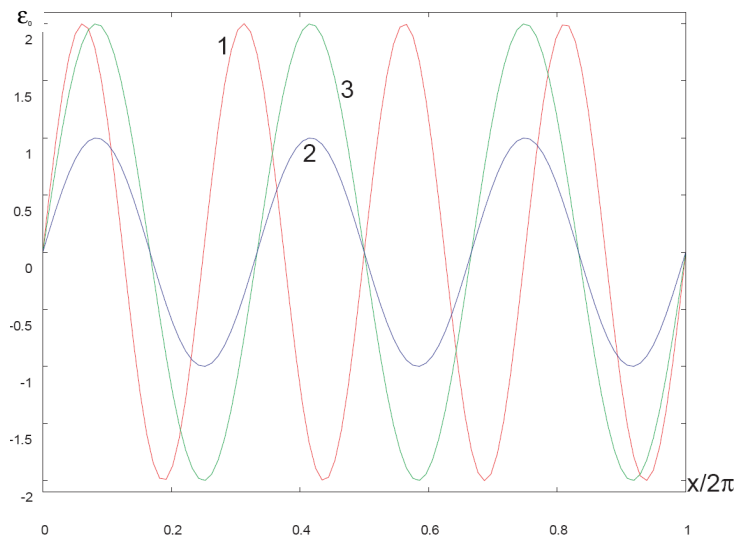
$$v_2 > v_3 > v_1 \quad u_3^{max} > u_1^{max} = u_2^{max}.$$

b) Déterminons leurs amplitudes et longueurs d'onde. Or:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} \propto \frac{1}{k}.$$

On trouve les valeurs suivantes:

$\xi_{0,1} = 2 \text{ m}$	$\lambda_1 = \frac{2\pi}{4} \text{ m}$
$\xi_{0,2} = 1 \text{ m}$	$\lambda_2 = \frac{2\pi}{3} \text{ m}$
$\xi_{0,3} = 2 \text{ m}$	$\lambda_3 = \frac{2\pi}{3} \text{ m}$



On voit bien ici que plus le coefficient de x est élevé, donc le nombre d'onde k , plus la longueur d'onde est courte. De plus, lorsque l'onde est reportée en fonction de $x/2\pi$, le nombre d'onde k indique le nombre de périodes qui apparaissent entre $x/2\pi = 0$ et $x/2\pi = 1$.

Exercice 11.3

Nous devons utiliser l'équation de l'effet Doppler du cours:

$$f' = \left(\frac{v - v_o}{v - v_s} \right) f$$

avec:

pour l'observateur: $\vec{v}_o = v_o \vec{e}_x$

pour la source: $\vec{v}_s = v_s \vec{e}_x$

pour l'onde: $\vec{v} = v_{son} \vec{e}_x$ ($x > x_s$) et $\vec{v} = -v_{son} \vec{e}_x$ ($x < x_s$)

Donc pour le problème spécifique de cet exercice:

a) $v_o = -v_B$, $v_s = v_A$, $v = v_{son}$
donc

$$f' = \left(\frac{1533 \text{ m/s} + 9 \text{ m/s}}{1533 \text{ m/s} - 8 \text{ m/s}} \right) (1400 \text{ Hz}) = 1416 \text{ Hz}$$

La fréquence augmente lorsque les sous-marins se rapprochent.

b) Le son de fréquence apparente 1416 Hz calculée en a) est réfléchi par une source mouvante (sous-marin B) et détecté par un observateur qui se déplace (sous-marin A).

$v_o = v_A$, $v_s = -v_B$, $v = -v_{son}$

donc

$$f' = \left(\frac{v - v_o}{v - v_s} \right) f = \left(\frac{-1533 \text{ m/s} - 8 \text{ m/s}}{-1533 \text{ m/s} + 9 \text{ m/s}} \right) (1416 \text{ Hz}) = 1432 \text{ Hz}$$

La variation de fréquence de l'onde réfléchi est deux fois plus grande que celle calculée en a) (i.e., 32 Hz au lieu de 16 Hz).

c) $v_o = -v_B$, $v_s = v_A$, $v = -v_{son}$

donc

$$f' = \left(\frac{-1533 \text{ m/s} + 9 \text{ m/s}}{-1533 \text{ m/s} - 8 \text{ m/s}} \right) (1400 \text{ Hz}) = 1385 \text{ Hz}$$

La fréquence diminue lorsque les sous-marins s'éloignent.

Exercice 11.4

a) L'intensité de l'onde est:

$$I = \frac{1}{A} \frac{dW}{dt} = \frac{1}{A} P = \frac{100 \text{ W}}{4\pi(1\text{m})^2} = 7.96 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

b) La densité d'énergie électromagnétique à 1 m de la source est donnée par:

$$\langle u_{EM} \rangle = \frac{I}{c} = 2.65 \cdot 10^{-8} \frac{\text{J}}{\text{m}^3} = 26.5 \frac{\text{nJ}}{\text{m}^3}$$

La densité d'énergie moyenne associée au champ électrique est:

$$\langle u_E \rangle = \frac{1}{2} \langle u_{EM} \rangle = 13.3 \frac{\text{nJ}}{\text{m}^3}$$

c) La densité d'énergie moyenne associée au champ magnétique est:

$$\langle u_B \rangle = \langle u_E \rangle = \frac{1}{2} \langle u_{EM} \rangle = 13.3 \frac{\text{nJ}}{\text{m}^3}$$

Exercice 11.5

a) A l'intérieur d'un condensateur à plaques parallèles, le champ électrique est perpendiculaire aux plaques, i.e.,

$$\vec{E} = -E\vec{e}_z$$

et donné par

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 S} \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{I}{\epsilon_0 S}.$$

donc:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{I}{\epsilon_0 S} = \frac{0.2}{8.85419 \times 10^{-12} \times \pi(0.1)^2} = 7.19 \times 10^{11} \frac{\text{V}}{\text{ms}}$$

Remarque: le courant constant qui charge le condensateur détermine un champ électrique croissant linéairement dans le condensateur. Le courant constant peut être obtenu par une différence de tension croissant linéairement appliquée au condensateur.

b) Loi d'Ampère:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

Sur la surface S avec contour circulaire C dans le plan xy et avec centre en $(0,0,0)$, la densité de courant est nulle ($\vec{J} = 0$), donc

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

Par analogie avec le cas d'un champ magnétique vertical dépendant du temps et uniforme qui produit un champ électrique azimutal (voir cours, sans démonstration), un champ électrique vertical dépendant du temps et uniforme produit un champ magnétique azimutal (sans démonstration). Donc:

$$\vec{B} = -B\vec{e}_\theta$$

Pour la surface S avec contour circulaire C dans le plan xy : $\vec{E} \parallel d\vec{s}$, $\vec{B} \parallel d\vec{l}$, $\partial\vec{E}/\partial t = I/\epsilon_0 S$ (voir réponse a). Donc:

$$2\pi r B = \mu_0 \frac{I}{S} \pi r^2$$

et enfin:

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2S} = 2 \times 10^{-7} \text{ T}$$

c) Vecteur de Poynting:

$$\vec{S}(\vec{x}, t) = \vec{E} \times \vec{H} = (1/\mu_0)(\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{Q(t)}{\epsilon_0 \pi R^2}(-\vec{e}_z) \times \frac{I r}{2\pi R^2}(-\vec{e}_\theta) = -\frac{Q(t) I r}{\epsilon_0 2\pi^2 R^4} \vec{e}_r .$$

Le flux d'énergie est donc radial (l'énergie électromagnétique entre par les faces latérales du condensateur).

d) *Localement*. En un point quelconque on doit vérifier:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \frac{|\vec{E}|^2}{2} + \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0} \right) + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0 ,$$

En un point quelconque dans le condensateur (vide entre les deux plaques).

$$\epsilon_0 \frac{|\vec{E}|^2}{2} = \frac{\epsilon_0 Q^2(t)}{2\epsilon_0^2 \pi^2 R^4}; \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \frac{|\vec{E}|^2}{2} \right) = \frac{2Q}{2\pi^2 \epsilon_0 R^4} \frac{dQ}{dt} = \frac{QI}{\epsilon_0 \pi^2 R^4} .$$

$$\frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0^2 I^2}{8\mu_0 \pi^2 r^2} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0} \right) = 0 \quad (I \text{ est constant}) .$$

En coordonnées cylindriques

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r S_r) = -\frac{QI}{\epsilon_0 \pi^2 R^4} .$$

on a donc bien:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \frac{|\vec{E}|^2}{2} + \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0} \right) + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0 ,$$

Globalement. Pour le volume du condensateur V et sa surface extérieure S on doit vérifier:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \frac{|\vec{E}|^2}{2} + \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0} \right) dV + \int_S \vec{S} \cdot d\vec{s} = 0$$

L'énergie électromagnétique traversant par unité de temps les parois supérieur et inférieur du condensateur est nulle, car $\vec{S} \perp d\vec{s}$. L'énergie électromagnétique traversant par unité de temps les parois latérales du condensateur est:

$$\int_{\Sigma_{lat}} \vec{S} \cdot d\vec{s} = 2\pi R d S_r|_{r=R} = -\frac{QId}{\epsilon_0 \pi R^2} = -\frac{QI}{C} ,$$

où C est la capacité du condensateur et d est la distance entre les deux électrodes. La charge sur les électrodes est $Q = CV$, donc $\int_{\Sigma_{lat}} \vec{S} \cdot d\vec{s} = -VI$, qui est bien la puissance électrique. Le signe est négatif car l'énergie entre dans le condensateur. La variation de l'énergie électromagnétique contenue dans le condensateur par unité de temps est:

$$\int_V dV \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \frac{|\vec{E}|^2}{2} \right) = \frac{QId}{\epsilon_0 \pi R^2} = \frac{QI}{C} ,$$

$$\int_V dV \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0} \right) = 0 \quad (\text{car } I \text{ et donc } |B| \text{ sont indep. du temps}) ;$$

on a donc bien:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \frac{|\vec{E}|^2}{2} + \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0} \right) dV + \int_S \vec{S} \cdot d\vec{s} = 0$$

Exercice 11.6

Le champ électrique est donné par la loi d'Ohm $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, où σ et $\vec{J}$ sont la conductivité électrique et la densité de courant, respectivement. Avec $I = J\pi a^2$ on trouve:

$$\vec{E} = \frac{J}{\sigma} = \frac{I}{\sigma\pi a^2} \vec{e}_z.$$

Par symétrie, le champ magnétique est azimutal (i.e., $\vec{B} = B\vec{e}_\phi$). Nous pouvons calculer l'amplitude du champ magnétique en utilisant la loi d'Ampère le long d'une circonférence C de rayon b avec $b < a$:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \mu_0 \vec{J} \cdot d\vec{s},$$
$$B2\pi b = \mu_0 J \pi b^2 = \mu_0 I \frac{b^2}{a^2},$$

d'où:

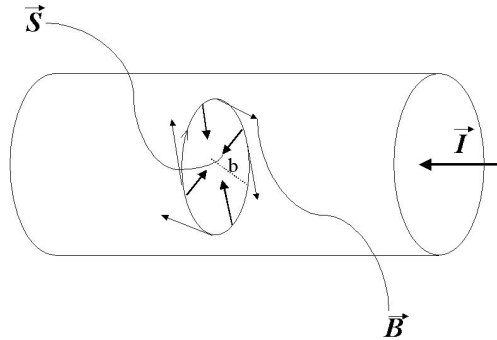
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi a^2} \vec{e}_\phi.$$

donc:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = -\frac{I}{\sigma\pi a^2} \frac{Ib}{2\pi a^2} \vec{e}_r = -\frac{I^2 b}{2\sigma\pi^2 a^4} \vec{e}_r$$

Comme $\vec{E} = E\vec{e}_z$ et $\vec{B} = B\vec{e}_\phi$, le vecteur de Poynting est dirigé vers l'intérieur du cylindre. A la surface du cylindre on a:

$$\vec{S} = -\frac{I^2}{2\sigma\pi^2 a^3} \vec{e}_r$$



Le flux du vecteur de Poynting à travers la surface extérieure ($b = a$) d'un cylindre de longueur l est

$$\int_S \vec{S} \cdot d\vec{s} = -\frac{I^2}{2\sigma\pi^2 a^3} 2\pi a l = -\frac{I^2}{\sigma\pi a^2} l = -RI^2$$

où $R = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{\pi a^2}$ est la résistance électrique du conducteur de longueur l et section πa^2 . Le signe du flux du vecteur $\vec{S}$ est négatif car l'énergie entre dans le conducteur. On peut donc considérer que la puissance perdue par effet Joule dans le conducteur est fournie par le flux du vecteur de Poynting, c.à.d., que la puissance provient du champ électromagnétique entourant le conducteur.

Exercice 12.1

Un four à micro-onde contient un magnétron délivrant 700 W de puissance micro-onde pour une alimentation électrique d'une puissance de 1.40 kW. Les micro-ondes sont totalement transmises depuis le magnétron jusqu'à la chambre de cuisson grâce à un guide d'onde. Ce guide d'onde est constitué d'un tube métallique rectangulaire de section $6.83 \times 3.81 \text{ cm}^2$.

- a) Quelle est le rendement du magnétron ?
- b) Dans l'hypothèse où la nourriture absorbe toute l'énergie des micro-ondes, trouver la norme du vecteur de Poynting moyennées dans le temps. On fera le calcul dans le guide d'onde juste à l'entrée de la chambre de cuisson.
- c) Quelle est la valeur maximale de champ électrique en ce point ?

Exercice 12.2

En un point sur Terre, la valeur rms (root-mean-square) du champ magnétique dû au rayonnement du soleil est $1.80 \mu\text{T}$. A partir de cette valeur calculer :

- a) la valeur rms du champ électrique dû au rayonnement du soleil.
- b) la densité moyenne d'énergie électromagnétique correspondante en ce point.
- c) la norme moyenne du vecteur de Poynting.

Exercice 12.3

Une des solutions pour voyager dans l'espace est de se servir d'une *voile solaire* parfaitement réfléchissante propulsée par le rayonnement du soleil. Prenons une telle *voile* d'une superficie de $6 \times 10^5 \text{ m}^2$ et de masse 6000 kg placée en orbite face au soleil.

- a) Quelle est la force appliquée sur la voile ?
- b) Quelle est l'accélération de la voile ?
- c) Combien de temps faudra-t-il à la *voile* pour parcourir $3.84 \times 10^8 \text{ m}$, i.e., une distance égale à la distance entre la terre et la lune ?

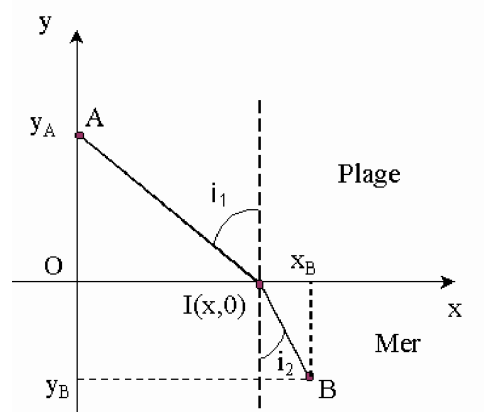
On ignorera les effets gravitationnels, on considérera l'accélération calculée en b) constante, et on prendra pour l'intensité du rayonnement solaire 1340 W/m^2 .

Exercice 12.4

Pierre de Fermat postula que le chemin emprunté par la lumière pour se rendre d'un point donné à un autre est celui pour lequel la durée temporelle du parcours est minimale. Une première conséquence du principe de Fermat est la propagation rectiligne des rayons lumineux dans les milieux homogènes. Une deuxième conséquence est la loi de Snell.

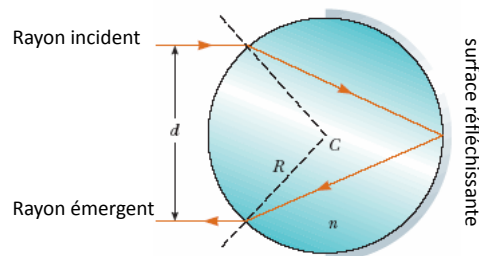
Un maître nageur, situé en un point A d'une plage, souhaite appliquer ce principe afin de porter secours le plus rapidement possible à un vacancier (situé en B) sur le point de se noyer dans la mer. On note v_1 et v_2 les vitesses (supposées constantes) du maître nageur lorsqu'il court sur la plage et il nage dans la mer.

- Quel doit être le chemin suivi par le maître nageur afin d'atteindre le vacancier dans le temps le plus court possible ?
- En déduire l'expression de la loi de la réfraction en optique (loi de Snell).



Exercice 12.5

Un cylindre transparent de rayon $R = 2$ m possède une surface réfléchissante sur sa moitié droite comme indiqué dans la figure. Un rayon de lumière voyageant dans l'air est incident de la côté gauche du cylindre. Le rayon de lumière incidente et le rayon de lumière émergent sont parallèles, et $d = 2$ m. Déterminer l'indice de réfraction du matériau constituant le cylindre.



Exercice 12.1

a) Le rendement du magnétron est donnée par :

$$\text{Rendement} = \frac{\text{Puissance efficace}}{\text{Puissance totale}} \times 100\% = \left(\frac{700 \text{ W}}{1400 \text{ W}} \right) \times 100\% = 50.0\%$$

b) La norme du vecteur de Poynting est :

$$\langle S \rangle = \frac{1}{A} \frac{dW}{dt} = \frac{700 \text{ W}}{(0.0683 \text{ m})(0.0381 \text{ m})} = 2.69 \times 10^5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 269 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2},$$

en direction de la chambre de cuisson.

c) La valeur maximale du champ électrique est donné par :

$$\langle S \rangle = \frac{E_{max}^2}{2\mu_0 c}$$

donc

$$E_{max} = \sqrt{\langle S \rangle 2\mu_0 c} = 1.42 \times 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Exercice 12.2

a) La valeur rms du champ électrique dû au rayonnement solaires est :

$$E_{rms} = cB_{rms} = (3.00 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})(1.80 \times 10^{-6} \text{T}) = 540 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

b) Pour une onde sinusoïdale $B_0 = \sqrt{2}B_{rms}$, donc la densité d'énergie moyenne est :

$$\langle u_{EM} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} B_0^2 = \frac{1}{\mu_0} B_{rms}^2 = 2.58 \frac{\mu\text{J}}{\text{m}^3}.$$

c) La norme moyenne du vecteur de Poynting est :

$$\langle S \rangle = c\langle u_{EM} \rangle = 773 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Exercice 12.3

a) La pression de radiation est :

$$P = \frac{2I}{c} = \frac{2(1340 \frac{\text{W}}{\text{m}^2})}{3.00 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 8.93 \times 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} .$$

En multipliant par la surface totale $A = 6 \times 10^5 \text{ m}^2$ on trouve :

$$F = PA = 5.36 \text{ N}.$$

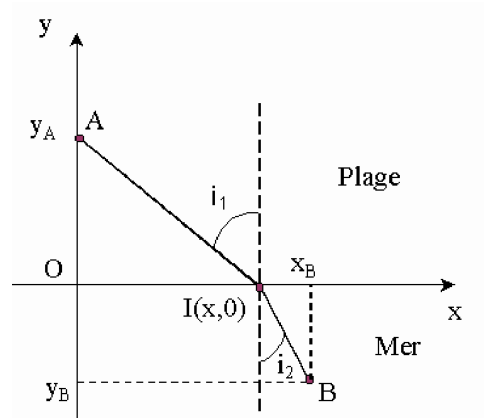
b) L'accélération est :

$$a = \frac{F}{m} = \frac{5.36 \text{ N}}{6000 \text{ kg}} = 8.93 \times 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} .$$

c) L'accélération est constante, donc $d = \frac{1}{2}at^2$, et finalement :

$$t = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{2(3.84 \times 10^8 \text{ m})}{(8.93 \times 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}^2})}} = 9.27 \times 10^5 \text{ s} \cong 11 \text{ jours}.$$

Exercice 12.4



a) On choisit un repère qui simplifie le problème : on fait passer l'axe des abscisses par la droite qui sépare la plage de la mer et l'axe des ordonnées par le point A , position initiale du maître nageur. Dans un tel repère, les points A et B ont alors les coordonnées $A(0, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$. Suivant une des conséquences du principe de Fermat (voir énoncé), la trajectoire du maître nageur va être constituée de deux portions rectilignes AI et IB , où $I(x, 0)$ désigne le point où le maître nageur se met à nager. La distance AI sera plus grande que la distance IB puisque le maître nageur va certainement plus vite en courant qu'en nageant.

Le temps T mis par le maître nageur pour aller de A à B est :

$$T = \frac{AI}{v_1} + \frac{IB}{v_2} . \quad (1)$$

En développant les valeurs de AI et IB , on obtient la dépendance suivante de $T = T(x)$ en fonction de l'abscisse x de I :

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + y_A^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}}{v_2} . \quad (2)$$

L'extremum de $T(x)$ est atteint lorsque sa dérivée par rapport à x est nulle. Or :

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_A^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{(x_B - x)}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}} . \quad (3)$$

En remarquant que :

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y_A^2}} = \frac{x}{AI} = \sin(i_1) \quad \text{et} \quad \frac{(x_B - x)}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}} = \frac{(x_B - x)}{IB} = \sin(i_2) , \quad (4)$$

La condition d'un temps minimum (soit $dT/dx = 0$) s'exprime alors sous la forme :

$$\frac{1}{v_1} \sin(i_1) = \frac{1}{v_2} \sin(i_2) \quad (5)$$

qui est la loi de Snell si $v_1 = c/n_1$ et $v_2 = c/n_2$.

b) On considère deux milieux d'indices de réfraction n_1 et n_2 . Soient deux points A et B situés respectivement dans le milieu d'indice n_1 (le point A) et dans le milieu d'indice n_2 (le point B). Le principe de Fermat permet d'affirmer que le chemin emprunté par la lumière pour aller de A à B est tel que le temps mis pour le parcourir est minimum.

Nous pouvons appliquer le même raisonnement que pour le cas du maître nageur. Le temps T mis par la lumière pour aller de A à B est :

$$T = \frac{AI}{v_1} + \frac{IB}{v_2} . \quad (6)$$

En développant les valeurs de AI et IB , on obtient la dépendance suivante de $T = T(x)$ en fonction de l'abscisse x de I :

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + y_A^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}}{v_2} . \quad (7)$$

Le minimum de $T(x)$ est atteint lorsque sa dérivée par rapport à x est nulle :

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_A^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{(x_B - x)}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}} . \quad (8)$$

En remarquant que :

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y_A^2}} = \frac{x}{AI} = \sin(i_1) \quad \text{et} \quad \frac{(x_B - x)}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}} = \frac{(x_B - x)}{IB} = \sin(i_2) , \quad (9)$$

où les angles i_1 et i_2 sont l'angle d'incidence et l'angle de réfraction. La condition d'un temps minimum (soit $dT/dx = 0$) s'exprime alors sous la forme :

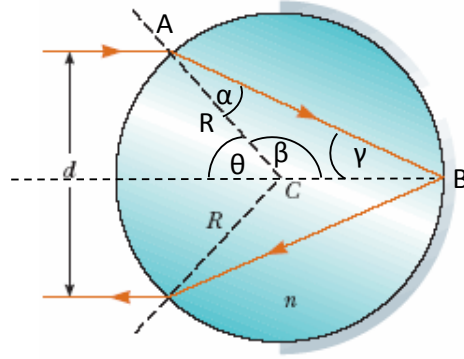
$$\frac{1}{v_1} \sin(i_1) = \frac{1}{v_2} \sin(i_2) \quad (10)$$

et donc, pour $v_1 = c/n_1$ et $v_2 = c/n_2$:

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2) , \quad (11)$$

qui est la loi de Snell.

Exercice 12.5



Comme montré dans la figure, l'angle d'incidence au point A est

$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{d/2}{R} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{1.00 \text{ m}}{2.00 \text{ m}} \right) = 30.0^\circ . \quad (12)$$

Si le rayon émergent est parallèle au rayon incident, la trajectoire doit être symétrique par rapport à l'axe central CB du cylindre. Dans le triangle isocèle ABC , $\gamma = \alpha$ et $\beta = 180^\circ - \theta$. Donc $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ devient $2\alpha + 180^\circ - \theta = 180^\circ$ ou $\alpha = \frac{\theta}{2} = 15.0^\circ$.

En appliquant la loi de Snell au point A ,

$$n \sin \alpha = 1.00 \sin \theta \quad (13)$$

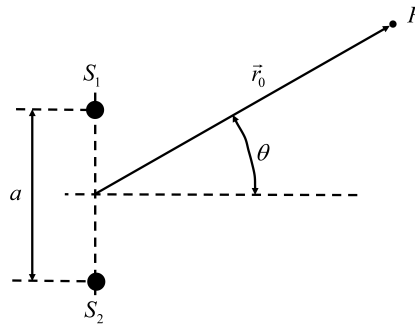
donc

$$n = \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} = \frac{\sin 30.0^\circ}{\sin 15.0^\circ} = 1.93 . \quad (14)$$

Exercice 13.1

Deux sources ponctuelles S_1 et S_2 , distantes de a , émettent des ondes sphériques $\xi_1(\vec{r}, t)$ et $\xi_2(\vec{r}, t)$ de longueur d'onde λ et de même amplitude. Les sources sont cohérentes, et le déphasage à la source est $\phi_0 = \pi$.

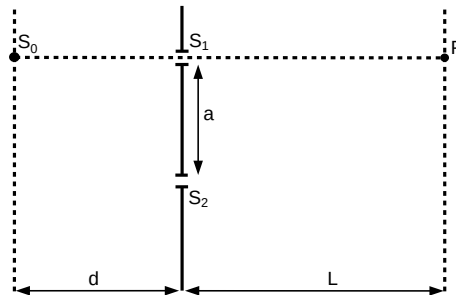
- Donner l'expression de l'onde résultante $\xi(\vec{r}_0, t)$ au point P , dans la limite $r_0 \gg a$.
- Calculer les valeurs de $\sin \theta$ pour lesquelles l'intensité $I(P)$ est i) maximale; ii) minimale, et tracer le diagramme d'intensité en fonction de $\sin \theta$.
- Pour $\phi_0 = 0$, calculer la distance minimale a_{min} entre les sources S_1 et S_2 pour qu'il y ait au moins une valeur de θ pour laquelle l'intensité est nulle.

**Exercice 13.2**

Une source lumineuse ponctuelle S_0 émet une onde monochromatique de longueur d'onde λ . On place un écran percé de deux petits trous S_1 et S_2 , de surface $S_1 = S_2 = S$, distants de a . On observe l'onde en un point P à la distance L de S_1 . La source S_0 est à la distance d de S_1 . On supposera $a \ll d$, $a \ll L$, et $\sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + \varepsilon/2$ pour $\varepsilon \ll 1$. Lorsque l'on fait varier la distance d , on observe une succession de minima et maxima d'intensité.

- Écrire l'expression de l'onde $E(t)$ mesurée en P en supposant λ , a , L , d connus.
- Écrire l'expression de l'intensité de l'onde mesurée en P .
- Donner les conditions pour que l'on ait un maximum (un minimum) d'intensité.
- Pour une distance $d = d_1$, on trouve un maximum d'intensité. Calculer la distance $d = d_2$ pour laquelle on a le prochain maximum.

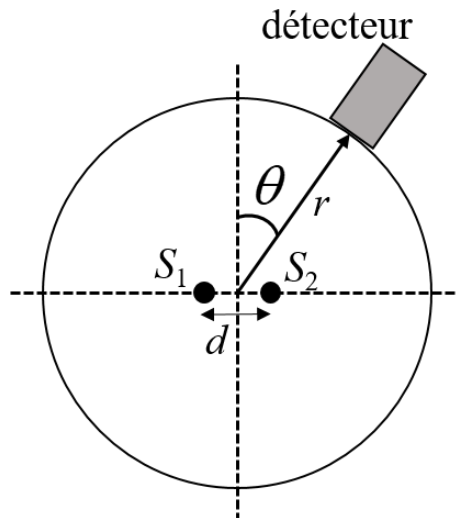
Application numérique: $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ (lumière verte); $a = 1 \text{ mm}$; $L = 5 \text{ cm}$; $d_1 = 10 \text{ cm}$.



Exercice 13.3

Soient S_1 et S_2 deux sources ponctuelles cohérentes, émettant en phase une onde lumineuse de longueur d'onde λ dans toutes les directions de l'espace. Les deux sources sont séparées d'une distance $d = 4\lambda$. Un détecteur se déplace dans le plan contenant les deux sources, sur un cercle de rayon $r \gg d$.

- Calculez les angles pour lesquels un maximum est observé.
- Représentez votre résultat sous forme d'un diagramme polaire.

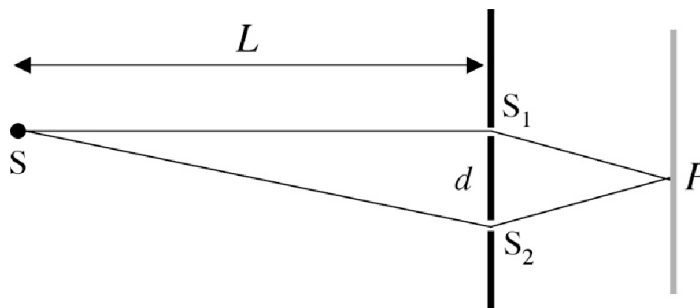


Exercice 13.4

Une onde sphérique monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 620$ nm illumine deux trous S_1 et S_2 sur un écran situé à $L = 1.2$ m de la source S . S_1 et S_2 sont séparés de $d \ll L$. On observe la lumière sur un écran placé derrière les trous, en un point P équidistant de S_1 et S_2 . Lorsqu'une seule ouverture, S_1 ou S_2 , est ouverte, on observe en P la même intensité I . Lorsque les deux ouvertures sont ouvertes, l'intensité mesurée est $3I$.

Nous utilisons l'approximation $\sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + \varepsilon/2$.

- Quelle est la plus petite valeur de d compatible avec ces observations?
- Quelle serait la réponse si un milieu transparent d'indice de réfraction $n=2$ remplissait:
i) l'espace entre les deux écrans ; ii) l'espace entre la source S et le premier écran.



Exercice 13.1

a) En général (voir diapositive du cours):

$$\xi_1(P) = \xi_{01}(r_1) \sin(\omega t - kr_1)$$

$$\xi_2(P) = \xi_{02}(r_2) \sin(\omega t - kr_2 - \phi_0)$$

pour une onde sphérique:

$$\xi_{01}(r_1) = \xi_{01}/r_1$$

$$\xi_{02}(r_2) = \xi_{02}/r_2$$

Par hypothèse $\xi_{01} = \xi_{02}$ (ondes de même amplitude) et $r_1 \cong r_2 \cong r_0$ ($r_1 \gg a$ et $r_2 \gg a$) donc:

$$\xi_1(P) \cong \frac{\xi_0}{r_0} \sin(\omega t - kr_1) = A \sin(\omega t - kr_1) ;$$

$$\xi_2(P) \cong \frac{\xi_0}{r_0} \sin(\omega t - kr_2 - \phi_0) = A \sin(\omega t - kr_2 - \phi_0) ;$$

L'onde résultante en P est:

$$\xi(P) = \xi_1(P) + \xi_2(P) = A' \sin(\omega t - \alpha) ,$$

avec:

$$A' = \sqrt{\xi_{01}(r_1)^2 + \xi_{02}(r_2)^2 + 2\xi_{01}(r_1)\xi_{02}(r_2) \cos \delta} = A\sqrt{2(1 + \cos(\delta))} = 2A \cos\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

et:

$$\delta = k(r_1 - r_2) - \phi_0 = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta - \phi_0 ,$$

L'intensité de l'onde est:

$$I \propto A'^2 = 4A^2 \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = 4A^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta - \frac{\phi_0}{2}\right) .$$

Donc:

$$I = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta - \frac{\phi_0}{2}\right) ,$$

où $I_0 = 4A^2 = 4\left(\frac{\xi_0}{r_0}\right)^2$.

Maxima d'intensité (i.e., $\cos^2(\frac{\delta}{2}) = 1$):

$$\delta/2 = m\pi \quad m \in \mathbb{Z} \quad \rightarrow \quad \sin \theta = \frac{\lambda}{a} \left(m + \frac{\phi_0}{2\pi}\right) .$$

Minima (zéros) d'intensité (i.e., $\cos^2(\frac{\delta}{2}) = 0$):

$$\delta/2 = \pi/2 + m\pi \quad m \in \mathbb{Z} \quad \rightarrow \quad \sin \theta = \frac{\lambda}{a} \left(m + \frac{1}{2} + \frac{\phi_0}{2\pi}\right) .$$

b)

Pour $\phi_0 = \pi$ l'intensité est maximum lorsque:

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{a} \left(m + \frac{\phi_0}{2\pi} \right) = \frac{\lambda}{a} \left(m + \frac{1}{2} \right) .$$

Pour $\phi_0 = \pi$ l'intensité est nulle lorsque:

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{a} \left(m + \frac{1}{2} + \frac{\phi_0}{2\pi} \right) = \frac{\lambda}{a} (m + 1) .$$

c)

Pour $\phi_0 = 0$ l'intensité est nulle lorsque:

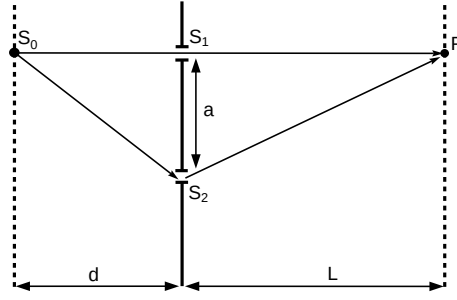
$$\sin \theta = \frac{\lambda}{a} \left(m + \frac{1}{2} + \frac{\phi_0}{2\pi} \right) = \frac{\lambda}{a} \left(m + \frac{1}{2} \right) \quad \rightarrow \quad a = (2m + 1) \frac{\lambda}{2 \sin \theta} .$$

donc:

$$a_{\min} = \frac{\lambda}{2} ,$$

pour $\sin \theta = 1$ et $m = 0$.

Exercice 13.2



a) L'onde sphérique incidente sur S_1 s'écrit:

$$\xi_1(t) = \frac{\xi_0}{d} \sin(\omega t - kd) .$$

En notant la distance entre S_0 et S_2 avec $S_0S_2 = r_{02}$, l'onde sphérique incidente sur S_2 s'écrit:

$$\xi_2(t) = \frac{\xi_0}{r_{02}} \sin(\omega t - kr_{02}) .$$

Par hypothèse $a \ll d$ et donc $r_{02} = \sqrt{d^2 + a^2} \cong d$ et ainsi:

$$\xi_2(t) = \frac{\xi_0}{d} \sin(\omega t - kr_{02}) .$$

Remarque : Nous avons approximé r_{02} avec d dans l'expression de l'amplitude de l'onde mais pas dans l'expression de sa phase.

D'après le principe de Huygens, les points S_1 et S_2 sont sources d'ondes secondaires sphériques $\xi_3(t)$ et $\xi_4(t)$, en phase avec les ondes incidentes. Puisque les deux sources ont approx. la même intensité nous pouvons écrire: $\xi_3(S_1, t) = c'\xi_1(S_1, t)$ et $\xi_4(S_2, t) = c'\xi_2(S_2, t)$, avec la même constante c' . Donc:

$$\begin{aligned} \xi_3(P, t) &= c' \frac{\xi_0}{dL} \sin[\omega t - k(L + d)] = A \sin(\omega t - \phi_3) , \\ \xi_4(P, t) &= c' \frac{\xi_0}{dL} \sin[\omega t - k(r_{02} + r_{2P})] = A \sin(\omega t - \phi_4) . \end{aligned}$$

Comme dans l'exercice précédent, l'onde en P peut être écrite comme suit:

$$\xi(P) = \xi_3(P) + \xi_4(P) = A' \sin(\omega t - \alpha) ,$$

avec

$$A' = 2A \cos\left(\frac{\delta_{43}}{2}\right)$$

et:

$$\delta_{43} = \phi_4 - \phi_3 = k[(r_{02} + r_{2P}) - (L + d)] .$$

Pour $a \ll d$ et $a \ll L$:

$$r_{02} = \sqrt{d^2 + a^2} \approx d + \frac{a^2}{2d}; \quad r_{2P} = \sqrt{L^2 + a^2} \approx L + \frac{a^2}{2L} ,$$

donc:

$$\delta_{43} = \frac{\pi a}{\lambda} \left(\frac{a}{d} + \frac{a}{L} \right) .$$

L'amplitude de l'onde résultante en P s'écrit alors :

$$A' = 2A \cos\left(\frac{\delta_{43}}{2}\right) = 2A \cos\left(\frac{\pi a}{2\lambda} \left(\frac{a}{d} + \frac{a}{L}\right)\right)$$

b) L'intensité est proportionnelle au carré de l'amplitude de l'onde:

$$I \propto 4A^2 \cos^2\left(\frac{\delta_{43}}{2}\right) = \propto \frac{\xi_0^2}{d^2 L^2} \cos^2\left(\frac{\delta_{43}}{2}\right) .$$

c) L'intensité est maximale lorsque $\cos(\delta_{43}/2) = \pm 1 \Leftrightarrow \delta_{43} = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$ et donc pour:

$$\delta_{43} = \frac{\pi a}{\lambda} \left(\frac{a}{d} + \frac{a}{L} \right) = 2m\pi .$$

L'intensité est minimale lorsque $\cos(\delta_{43}/2) = 0 \Leftrightarrow \delta_{43} = (2m+1)\pi$, $m \in \mathbb{Z}$ et donc pour:

$$\delta_{43} = \frac{\pi a}{\lambda} \left(\frac{a}{d} + \frac{a}{L} \right) = (2m+1)\pi .$$

Remarque: On peut arriver au même résultat en considérant la différence des chemins $s(S_0S_1P)$ et $s(S_0S_2P)$:

$$\begin{aligned} s(S_0S_1P) &= (d + L) \\ s(S_0S_2P) &= \sqrt{(d^2 + a^2)} + \sqrt{(L^2 + a^2)} \approx (d + L) + \frac{a}{2} \left(\frac{a}{d} + \frac{a}{L} \right) , \end{aligned}$$

La différence de chemin est donc:

$$s(S_0S_1P) - s(S_0S_2P) = \frac{a}{2} \left(\frac{a}{d} + \frac{a}{L} \right)$$

Une interférence constructive (max) est obtenue lorsque la différence de trajet est:

$$\frac{a}{2} \left(\frac{a}{d} + \frac{a}{L} \right) = m\lambda ;$$

Une interférence destructive (min) est obtenue lorsque la différence de trajet est:

$$\frac{a}{2} \left(\frac{a}{d} + \frac{a}{L} \right) = (2m+1) \frac{\lambda}{2} .$$

d) Pour $d = d_1$, l'intensité est maximale; δ_{43} vaut alors $2m\pi$. Le prochain maximum a lieu pour $d = d_2$ et $\delta_{43} = 2(m+1)\pi$. On en déduit alors:

$$d_2 = d_1 \frac{1}{1 + \frac{2d_1\lambda}{a^2}} .$$

e) Application numérique: $\lambda = 5 \times 10^{-7}$ m, $a = 10^{-3}$ m, $L = 5 \times 10^{-2}$ m, $d_1 = 0.1$ m.
 $\Rightarrow d_2 = 11.11$ cm et $d_2 = 9.09$ cm .

Exercice 13.3

a)

Réponse intuitive sans calcul.

La différence de chemin $(r_1 - r_2)$ est nulle pour $\theta = 0$ et maximale pour $\theta = \frac{\pi}{2}$. Donc pour $\theta = 0$ on a un maximum d'interférence. Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ la différence de chemin est 4λ , ce qui conduit donc à un autre maximum d'interférence. Lorsque θ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, le détecteur passe du maximum d'ordre 0 au maximum d'ordre 4. Donc nous nous attendons à trouver 16 maxima d'intensité pour le cercle entier (voir figure).

Réponse avec calculs.

On peut calculer exactement la différence de chemin $(r_1 - r_2)$ en fonction de θ . Néanmoins nous utilisons ici l'approximation $r \gg d$:

$$r_1 = \sqrt{\left(\frac{d}{2} + r \sin \theta\right)^2 + (r \cos \theta)^2} = r \sqrt{\frac{d^2}{2r^2} + 1 + \frac{d}{r} \sin \theta} \cong r \sqrt{1 + \frac{d}{r} \sin \theta} \cong r \left(1 + \frac{d}{2r} \sin \theta\right)$$
$$r_2 = \sqrt{\left(-\frac{d}{2} + r \sin \theta\right)^2 + (r \cos \theta)^2} = r \sqrt{\frac{d^2}{2r^2} + 1 - \frac{d}{r} \sin \theta} \cong r \sqrt{1 - \frac{d}{r} \sin \theta} \cong r \left(1 - \frac{d}{2r} \sin \theta\right)$$

donc:

$$(r_1 - r_2) \cong d \sin \theta$$

Nous avons des maxima d'interférence pour:

$$(r_1 - r_2) = m\lambda$$

et donc pour

$$d \sin \theta \approx m\lambda$$

La distance entre les sources est $d = 4\lambda$ donc:

$$\theta \approx \arcsin(m/4)$$

et enfin:

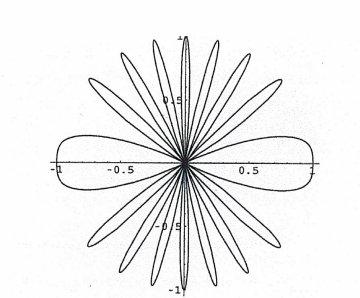
$$\theta \approx \{0^\circ, 14^\circ, 30^\circ, 49^\circ, 90^\circ\}$$

qui correspondent à:

$$(r_1 - r_2) \approx (0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda, 4\lambda).$$

b)

Voir la figure ci-dessous.



Exercice 13.4

a)

S_1 et S_2 sont les sources de deux ondes qui, au point P , ont la même intensité, et donc la même amplitude $A \propto I^{1/2}$, mais pas nécessairement la même phase. Le déphasage est dû à la différence des chemins optiques:

$$\delta = k(s(SS_2) - s(SS_1)).$$

En général, nous pouvons exprimer l'amplitude de l'onde au point P résultant de l'interférence des deux ondes comme:

$$A'(P) = 2A \cos(\delta/2) ;$$

Par hypothèse, l'intensité mesurée au point P est égale à $3I$, donc son amplitude est $\sqrt{3}I$. Donc: L'amplitude de l'onde résultante au point P est donc:

$$\sqrt{3}A = 2A \cos(\delta/2) ;$$

et donc:

$$\cos(\delta/2) = \sqrt{3}/2 \rightarrow \delta_{min} = \pi/3 ;$$

La différence de chemin optique est:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} [(L^2 + d^2)^{1/2} - L] \approx \frac{2\pi}{\lambda} [L(1 + \frac{d^2}{2L^2}) - L] = \frac{\pi d^2}{\lambda L}$$

donc

$$\frac{\pi d^2}{\lambda L} = \frac{\pi}{3} \rightarrow d = \sqrt{\frac{\lambda L}{3}} = 0.498 \text{ mm} .$$

b)

i) aucune différence (les chemins optiques entre les deux écrans sont les mêmes, donc les déphasages supplémentaires sont les mêmes).

ii) dans ce cas il faut tenir compte du fait que la longueur d'onde dans le milieu est $\lambda' = \lambda/n$ et donc $k' = 2\pi n/\lambda$. Le déphasage est:

$$\delta' = \frac{2\pi n}{\lambda} (s(SS_2) - s(SS_1)) \approx \frac{\pi d^2 n}{\lambda L}$$

et donc:

$$\frac{\pi d^2 n}{\lambda L} = \frac{\pi}{3} \rightarrow d' = \sqrt{\frac{\lambda L}{3n}} = 0.35 \text{ mm} .$$