

Semaine 9:
Electrodynamique
(champs électromagnétiques dépendants du temps)

Couplage entre champ électrique et champ magnétique

Electrostatique et magnétostatique: couplage «caché»

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

Electrodynamique: couplage «manifeste»

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Un champ $\mathbf{B}$ dépendant du temps «produit» un champ $\mathbf{E}$
 Un champ $\mathbf{E}$ dépendant du temps «produit» un champ $\mathbf{H}$

Transformations entre référentiels inertiels

Principe de la relativité:

toutes les lois de la nature doivent être identiques pour tous les observateurs d'inertie.

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - (\gamma - 1)(\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}}$$

$$\mathbf{B}' = \gamma(\mathbf{B} - (\mathbf{v} \times \mathbf{E} / c^2)) - (\gamma - 1)(\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}}$$

$$\mathbf{D}' = \gamma(\mathbf{D} + (\mathbf{v} \times \mathbf{H} / c^2)) - (\gamma - 1)(\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}}$$

$$\mathbf{H}' = \gamma(\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}) - (\gamma - 1)(\mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}}$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - (\gamma V / c^2)\mathbf{v} \quad V' = \gamma(C - \mathbf{A} \cdot \mathbf{v})$$

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J} - \gamma \rho \mathbf{v} + (\gamma - 1)(\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}} \quad \rho' = \gamma(\rho - \mathbf{J} \cdot \mathbf{v} / c^2)$$

$$\hat{\mathbf{v}} \triangleq (\mathbf{v} / |\mathbf{v}|) \quad \gamma \triangleq (1 / \sqrt{1 - v^2 / c^2})$$

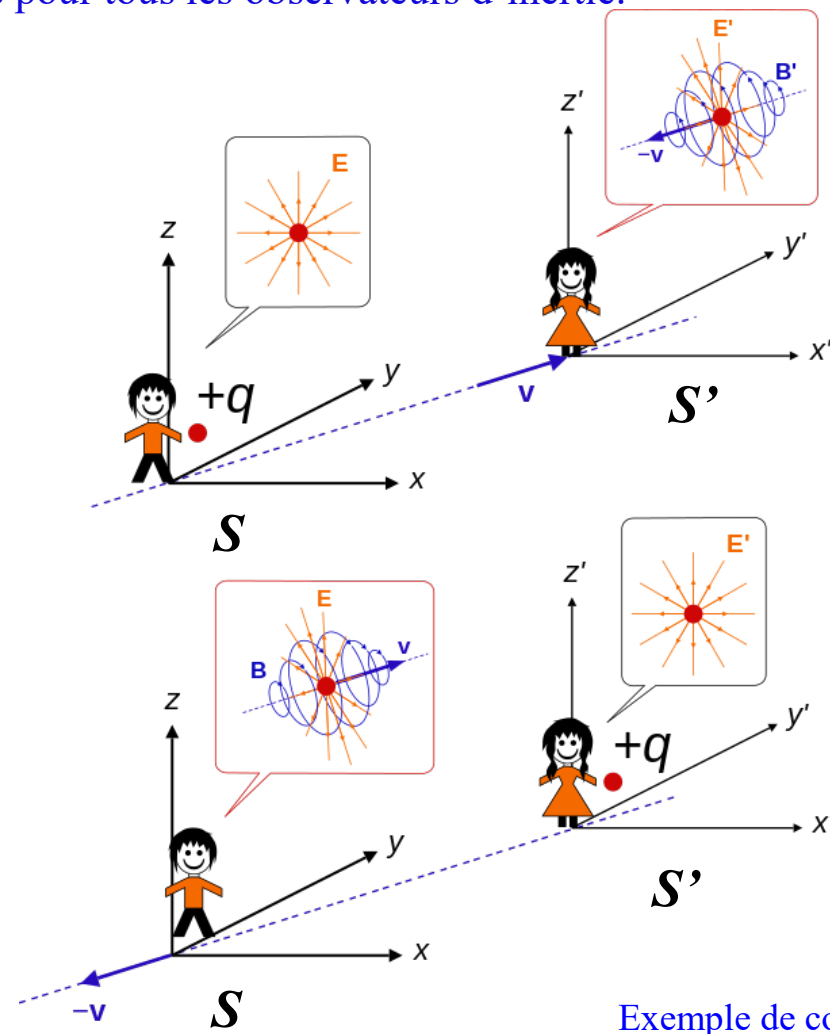
pour $v \ll c$, $\gamma \cong 1$ (approx. non-relativiste) $\Rightarrow$

$$\mathbf{E}' \cong \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \mathbf{B}' \cong \mathbf{B} - (\mathbf{v} \times \mathbf{E} / c^2)$$

$$\mathbf{D}' \cong \mathbf{D} + (\mathbf{v} \times \mathbf{H} / c^2) \quad \mathbf{H}' \cong \mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}$$

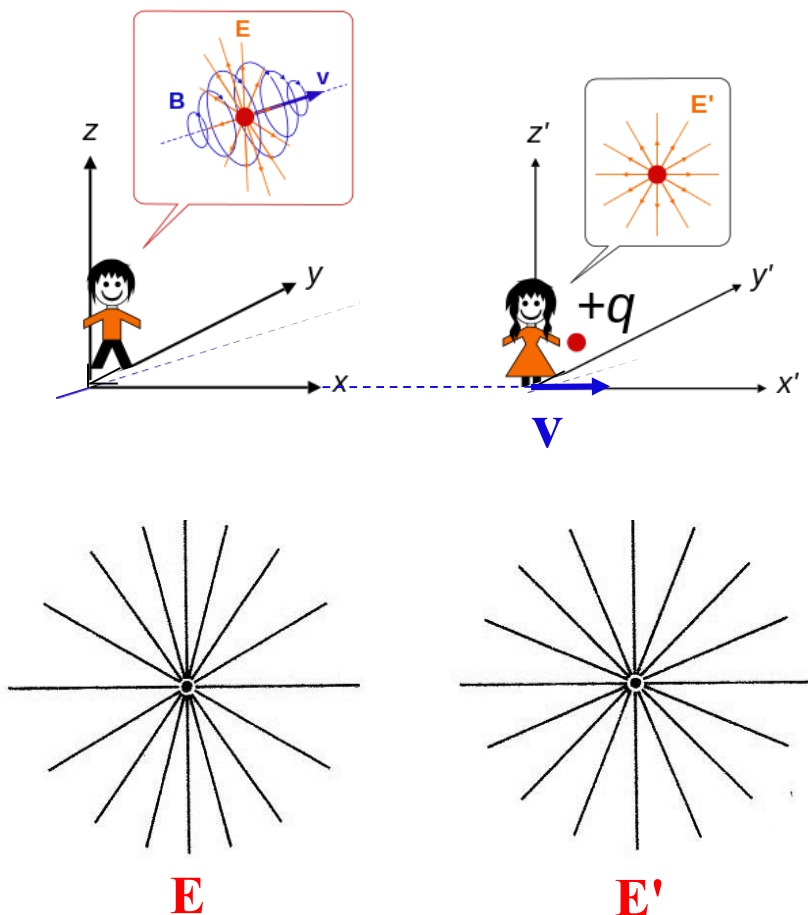
$$\mathbf{A}' \cong \mathbf{A} - \phi \mathbf{v} / c^2 \quad V' \cong V - \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{J}' \cong \mathbf{J} - \rho \mathbf{v} \quad \rho' \cong \rho - \mathbf{J} \cdot \mathbf{v} / c^2$$



Exemple de couplage «caché»
entre $\mathbf{B}$ et $\mathbf{E}$

Exemple: Charge q en mouvement avec vitesse $\mathbf{v}=(v,0,0)$ constante:



A partir des transformations de la page précédente:

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x & B_x &= B'_x \\ E_y &= \gamma(E'_y + v B'_z) & B_y &= \gamma(B'_y - v E'_z / c^2) & \gamma &\equiv \left(1 / \sqrt{1 - v^2 / c^2}\right) \Rightarrow \gamma \geq 1 \\ E_z &= \gamma(E'_z - v B'_y) & B_z &= \gamma(B'_z + v E'_y / c^2) \end{aligned}$$

Dans cet exemple $\mathbf{B}'=0$

$\Rightarrow$

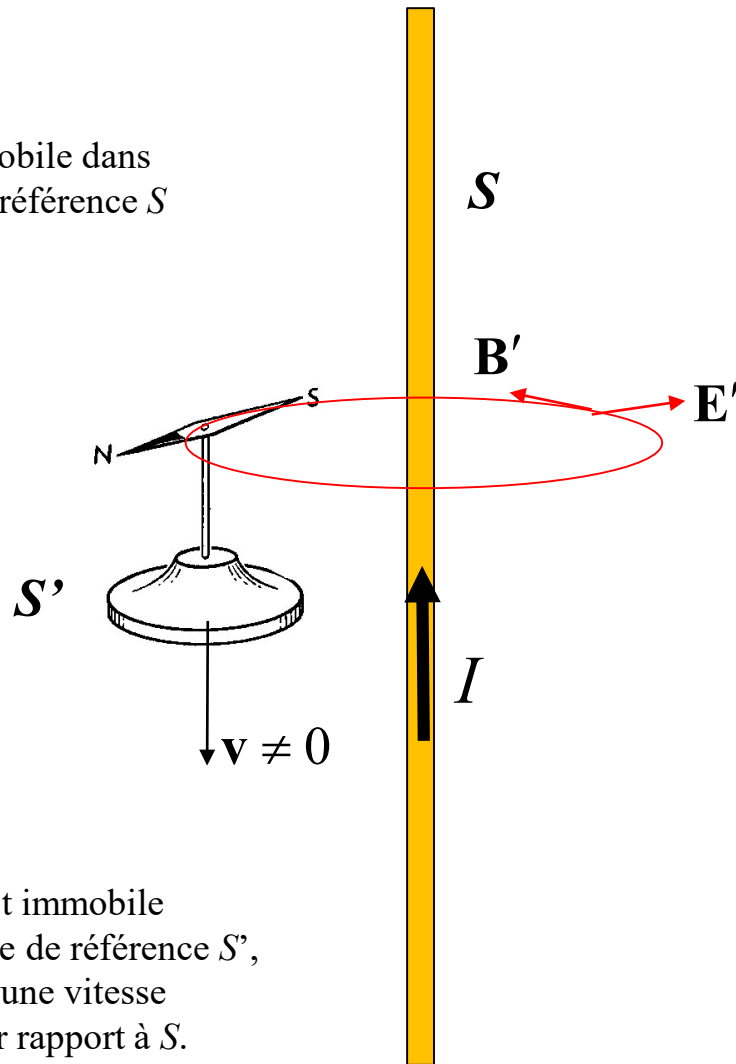
$$E_x = E'_x ; E_y = \gamma E'_y > E'_y ; E_z = \gamma E'_z > E'_z$$

$$B_x = B'_x = 0 ; B_y = -\gamma v E'_z / c^2 = -v E_z / c^2 ; B_z = v E_y / c^2 \quad (\Rightarrow \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E})$$

Dans le système de référence S ,
le champ magnétique est différent de zéro!!

Exemple: Courant I dans un conducteur neutre.

Le fil est immobile dans le système de référence S



La boussole est immobile dans le système de référence S' , se déplaçant à une vitesse constante $\mathbf{v}$ par rapport à S .

$$\mathbf{E}' \cong \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$\text{mais } \rho=0 \Rightarrow \mathbf{E}=0 \Rightarrow \mathbf{E}' \cong \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{B}' \cong \mathbf{B} - (\mathbf{v} \times \mathbf{E} / c^2)$$

$$\text{mais } \mathbf{E}=0 \Rightarrow \mathbf{B}' \cong \mathbf{B}$$

$$\mathbf{J}' \cong \mathbf{J} - \rho \mathbf{v}$$

$$\text{mais } \rho=0 \Rightarrow \mathbf{J}' \cong \mathbf{J}$$

$$\rho' \cong \rho - \mathbf{J} \cdot \mathbf{v} / c^2$$

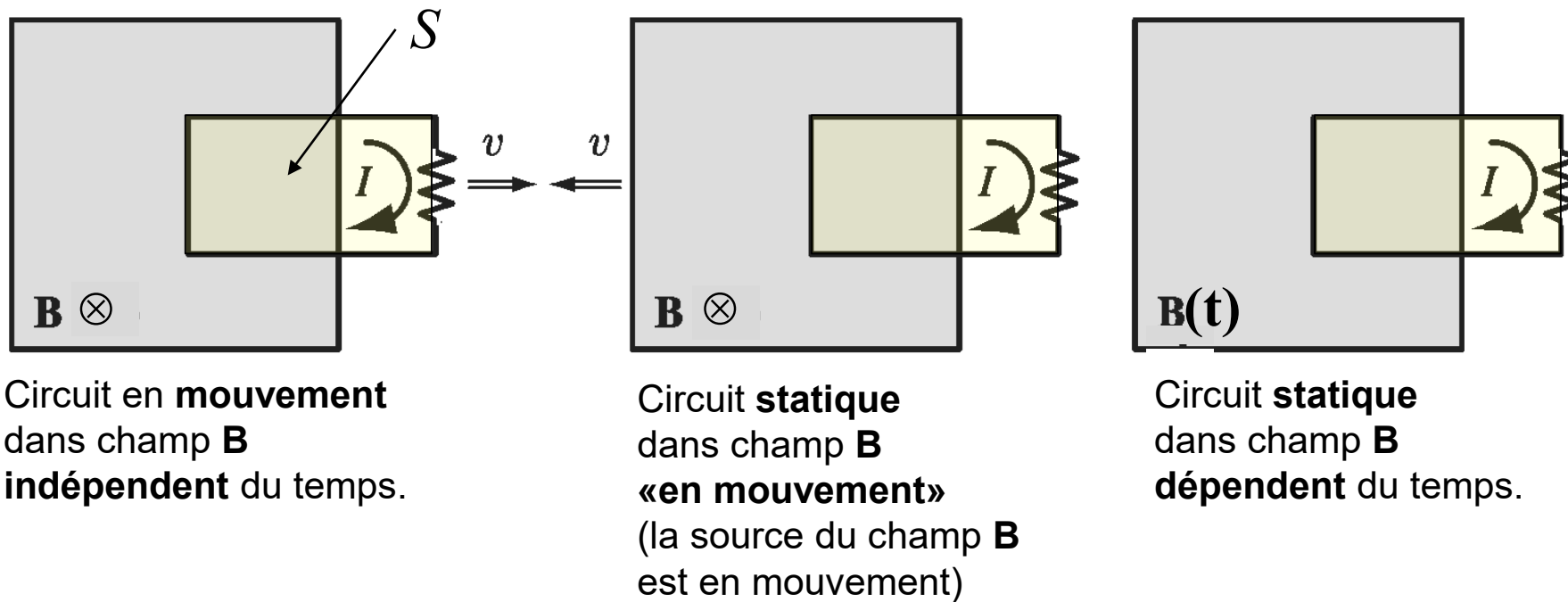
$$\text{mais } \rho=0 \Rightarrow \rho' \cong -\mathbf{J} \cdot \mathbf{v} / c^2$$

Dans le système de référence S' , le champ électrique et la densité de charge sont différents de zéro!!

Les équations de Maxwell (rappel)

	Forme différentielle (locale)	Forme intégrale (globale)
Loi de (Maxwell)- Gauss :	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$
Loi de (Maxwell)- Faraday - Lenz :	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$
Loi de (Maxwell)- Thomson :	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$
Loi de (Maxwell)- Ampère :	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$

Les expériences de Faraday...



Dans les trois cas, Faraday a observé:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} \quad \text{avec} \quad \varepsilon = -\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

S : surface à l'intérieur du chemin fermé C

Note:

Les unités de la force électromotrice induite sont les volts [V].

Les expériences de Faraday ont:

1) "permis" à Maxwell d'écrire la loi de (Maxwell)-Faraday-Lenz

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

2) "sollicités" l'introduction du concept de force électromotrice "induite" ε .

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

Loi de (Maxwell)-Faraday-(Lenz)

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \qquad \nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Un champ $\mathbf{B}$ dépendant du temps «produit» un champ $\mathbf{E}$

Note:

L'équation de (Maxwell)-Faraday-(Lenz):

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

est valable en général, i.e., pour un parcours C (et donc pour la surface S) fixe, mobile, ou en déformation avec les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ dans un référentiel solidaire avec C ou en mouvement par rapport à C .

De la loi de (Maxwell)-Faraday-(Lenz) a la «force» électromotrice induite

L'équation de (Maxwell)-Faraday-(Lenz) est:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

Si l'on permet à la surface S (et donc au chemin C) de se déplacer et déformer arbitrairement en assignant une vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ à chaque élément différentiel $d\mathbf{s}$, on trouve (pour un champ vectoriel arbitraire....voir math. Z 10 et 462):

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} + \int_{S(t)} \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} - \int_{S(t)} \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}$$

mais:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Equation de Maxwell})$$

$$\int_{S(t)} \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_{C(t)} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{Théorème de Stokes})$$

donc:

$$\int_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} = \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{C(t)} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

et enfin:

$$\oint_{C(t)} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

Pour un chemin C fermé dans un conducteur:

la vitesse des électrons par rapport au référentiel fixe $\mathbf{v}_e(\mathbf{r}, t)$ est donnée par (pour $\mathbf{v}_e, \mathbf{v}_d, \mathbf{v} \ll c$) :

$$\mathbf{v}_e(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}_d(\mathbf{r}, t)$$

ou: $\mathbf{v}_d(\mathbf{r}, t)$ est la vitesse de drift des électrons par rapport aux ions du conducteur.

et $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ est la vitesse du conducteur

Donc:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_e(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}_d(\mathbf{r}, t) \quad \text{et}$$

(note: $\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \neq \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$ si S est mobile
par rapport au référentiel ou $\mathbf{B}$ est considérée)

$$\oint_{C(t)} (\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{C(t)} (\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

La **force électromotrice** (de toutes origines inclus les batterie, les dynamos, ...) est définie comme:

$$\varepsilon_{12} \triangleq \frac{1}{q} \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

ou $\mathbf{F}$ est une force associée à toute source d'énergie apte à entraîner un courant entre les points 1 et 2.

On peut donc dire qu'une **force électromotrice** (appelé de Faraday ou induite):

$$\varepsilon = \oint_{C(t)} (\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad \varepsilon = -\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{C(t)} (\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad \varepsilon = -\int_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{C(t)} (\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

existe dans le conducteur C . Les trois équations sont équivalents.

1) Pour $\mathbf{v}_d \parallel d\mathbf{l}$ (e.g., fil conducteur)

$$\Rightarrow (\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{C(t)} (\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \Phi_B$$

$\Rightarrow$

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

La force électromotrice induite est égal à la dérivée **total** du flux magnétique à travers la surface S . Le flux magnétique peut être modifié en changeant **B** ou en changeant la **forme**, l'**orientation** ou la **position** du circuit C (et sa surface S).

(valable pour tous les surfaces S fixes ou mobiles avec countour C , avec **B** dans le referentiel fixe ou en mouvement par rapport à S)

2) Pour $\mathbf{v}_d \ll \mathbf{v}$:

$$\mathbf{v}_e \cong \mathbf{v} \Rightarrow \mathcal{E} = \oint_{C(t)} (\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \cong \oint_{C(t)} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \Rightarrow$$

$$\mathcal{E} \cong \oint_{C(t)} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \oint_{C(t)} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}$$

La force électromotrice induite est égale à l'intégrale de la force de Lorentz (divisée par la charge) le long du circuit C . Donc la fem induite est le travail du champ électromagnétique par unité de charge.

(valable pour tous les countours C en mouvement avec vitesse $\mathbf{v}$ par rapport au référentiel fixe, **E** et **B** dans le référentiel fixe, **E'** dans le referentiel en mouvement avec C)

Pour un chemin C **ouvert** ou **fermée** dans un conducteur:
(sans démonstration)

$$\varepsilon \cong \int_C (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \cong \int_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}$$

ε : "force" électromotrice induit [V]

C : chemin arbitraire, se déplaçant à une vitesse $\mathbf{v}$ par rapport au référentiel fixe

$\mathbf{E}'$: champ électrique dans le référentiel **en mouvement** avec C

$\mathbf{E}$: champ électrique dans le référentiel **fixe**

$\mathbf{B}$: champ magnétique dans le référentiel **fixe**

«Force» électromotrice induite... approximativement...

La force électromotrice induite ε , toujours calculée dans le système solidaire avec le contour C , est:

$$\varepsilon \cong -\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \Phi_B$$

(valable pour tous les surfaces S fixes ou mobiles avec contour C ,
avec $\mathbf{B}$ dans le référentiel fixe ou en mouvement par rapport à S)

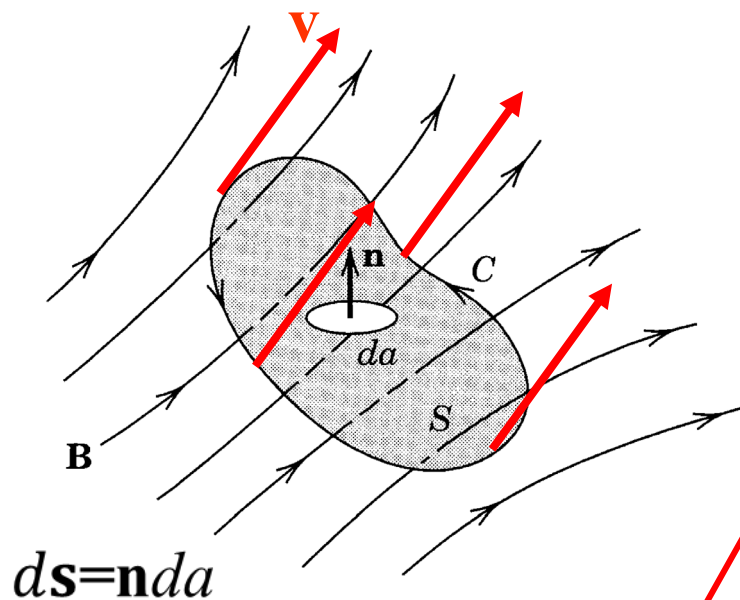
mais aussi:

$$\varepsilon \cong \int_{C(t)} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \cong \int_{C(t)} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}$$

(valable pour tous les contours C en mouvement avec vitesse $\mathbf{v}$
par rapport au référentiel fixe, $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ dans le référentiel fixe,
 $\mathbf{E}'$ dans le référentiel en mouvement avec C)

Nous pouvons choisir d'utiliser l'une ou l'autre équation en fonction de laquelle est plus facile à appliquer.

Exemple: force électromotrice induite dans un circuit fermé C se déplaçant avec vitesse $\mathbf{v}$ dans le champ magnétique statique $\mathbf{B}$



Champ électrique
dans le référentiel
en mouvement

Champ électrique
dans le référentiel
fixe

Champ magnétique
dans le référentiel
fixe

Force électromotrice induite
dans le circuit en mouvement

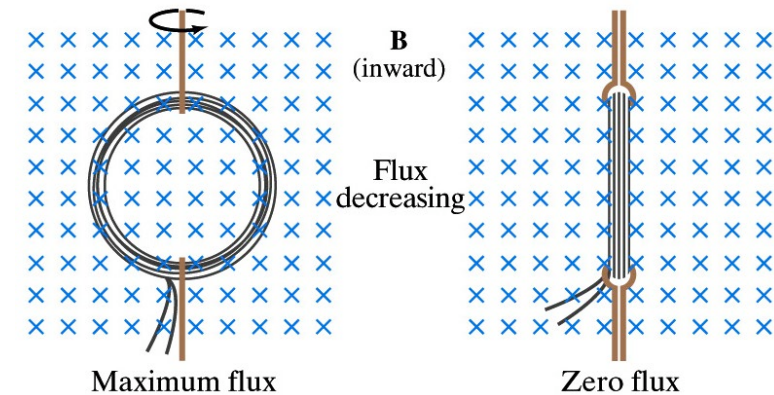
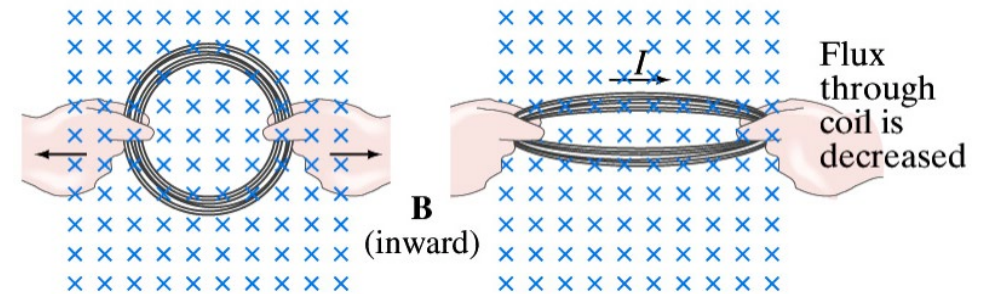
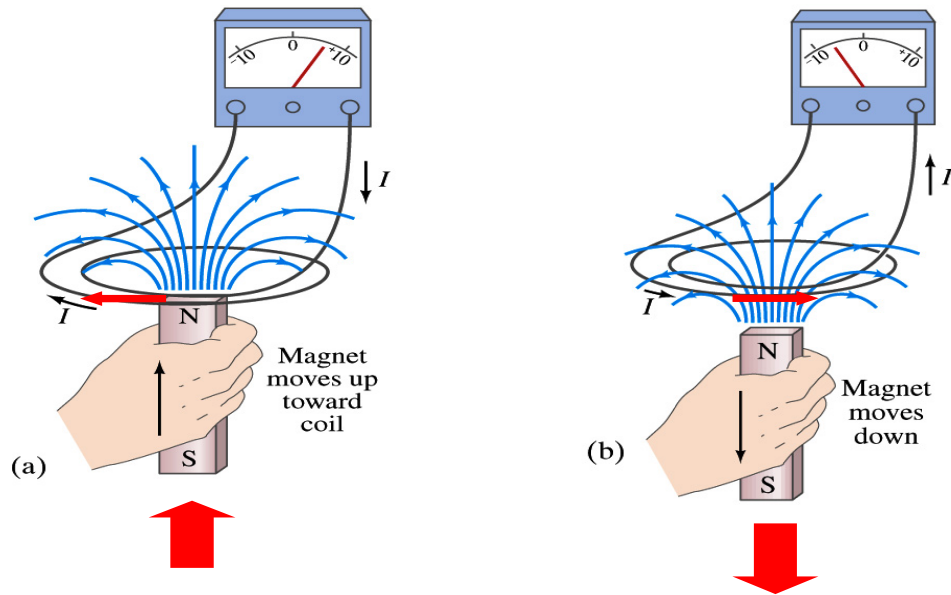
$$\varepsilon = \oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = \oint_C (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

mais $\mathbf{E} = 0 \Rightarrow \varepsilon = \int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$

Note:

- 1) Si $\mathbf{v} \parallel \mathbf{B}$ partout sur $C \Rightarrow \varepsilon = 0$
- 2) Si $\mathbf{v} = 0$ partout sur $C \Rightarrow \varepsilon = 0$
- 3) Si $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \perp d\mathbf{l}$ partout sur $C \Rightarrow \varepsilon = 0$

Exemple: force électromotrice induite dans un circuit fermé C



Pour **tous** les chemins **fermés** C fixes ou mobiles avec surface interne S :

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \Phi_B$$

flux du champ magnétique à travers la surface fermée S : $\Phi_B \equiv \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$

Exemple: fil se déplaçant dans un champ magnétique uniforme

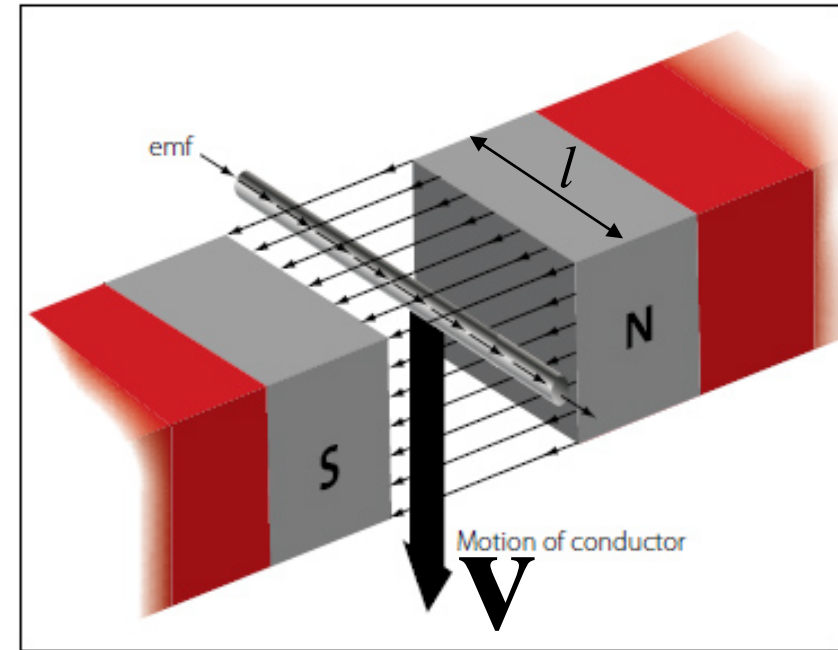
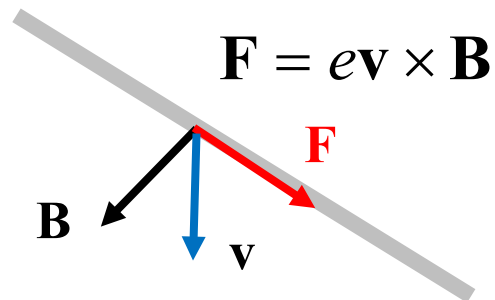
$$\mathcal{E} = \int_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = \int_C (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

Si $\mathbf{E} = 0 \Rightarrow$

$$\mathcal{E} = \int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = vBl$$

explications intuitives:

(Vu à partir du référentiel fixe):
force de Lorentz sur les électrons
en mouvement

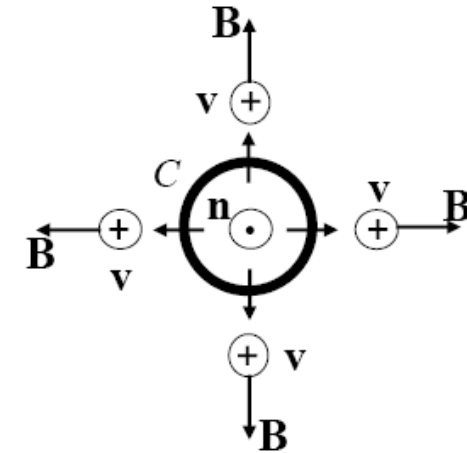
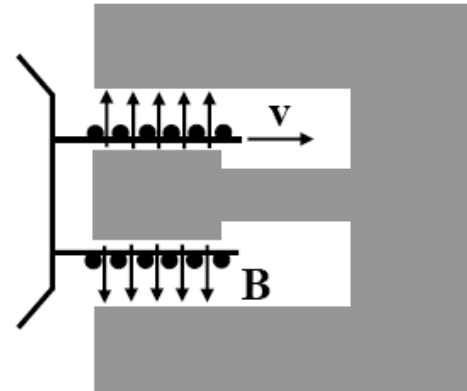
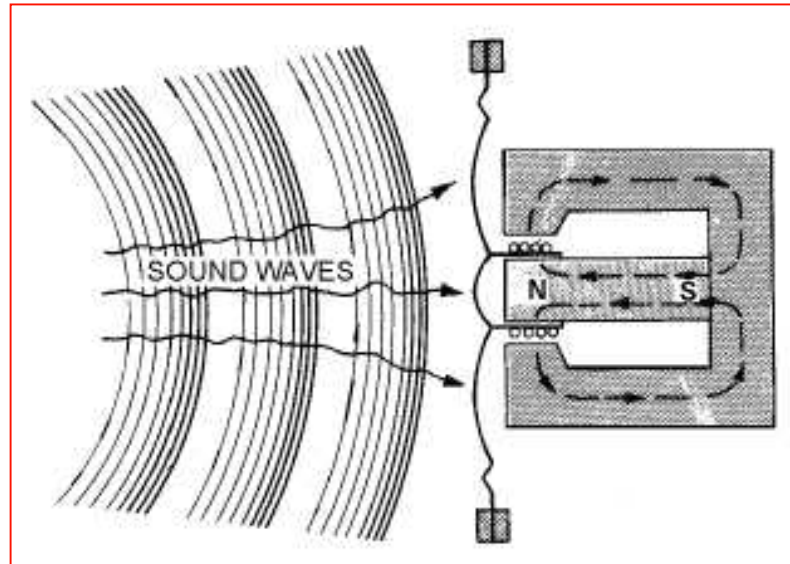


(Vu à partir du référentiel mobile):
force de Lorentz sur les électrons «statiques»
en raison du champ électrique non nul dans le
cadre mobile

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E}' = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Exemple: microphone électrodynamique

(bobine en mouvement dans un champ B radial)



$$\varepsilon = \int_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = \int_C (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

$$\mathbf{E} = 0 \Rightarrow$$

$$\varepsilon = \int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = NvBl$$

N : number of turns

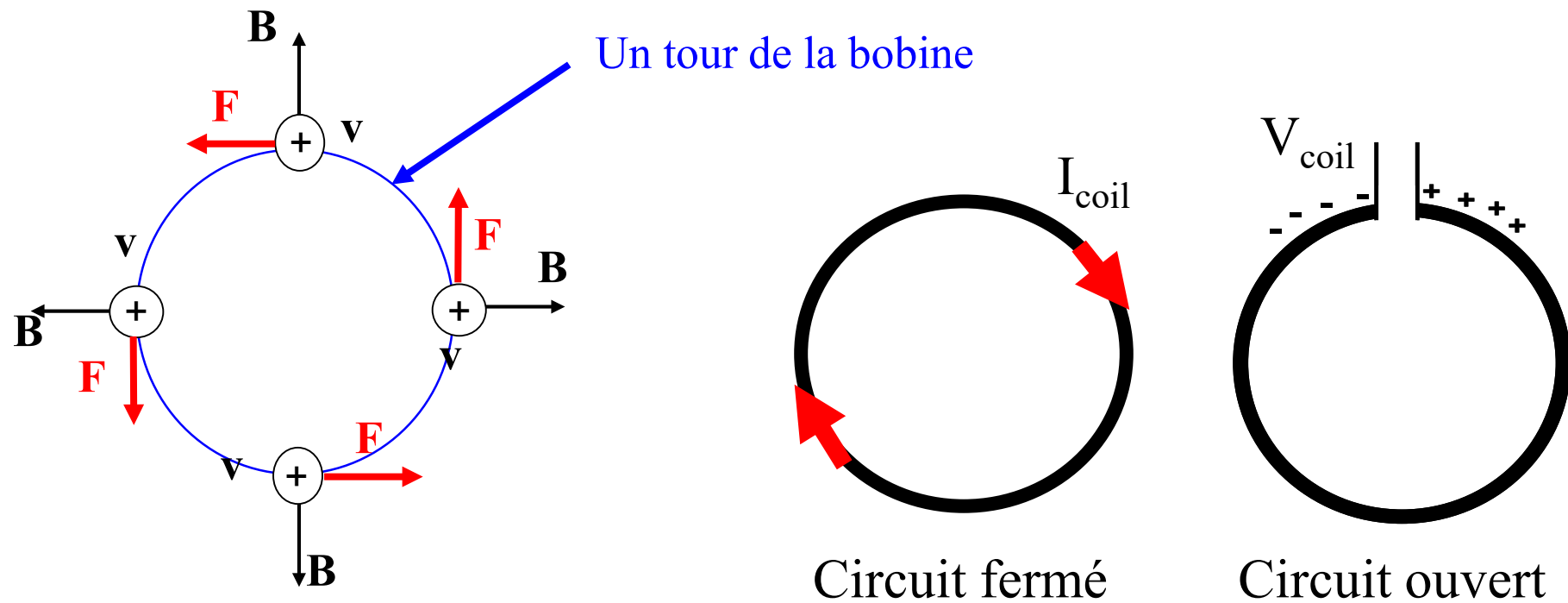
l : length of a single turn

Il y a une force électromotrice même si $\mathbf{B}$ ne change pas au fil du temps et est perpendiculaire à la boucle!

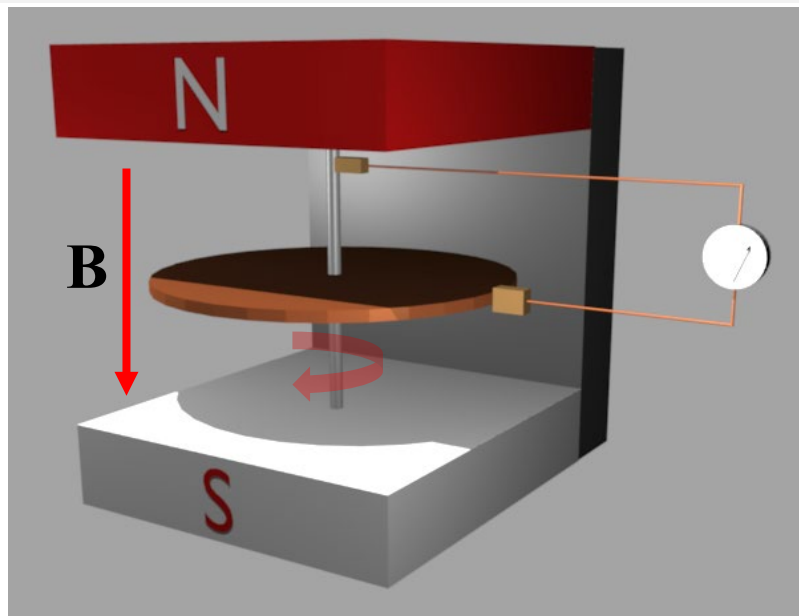
(Il existe un champ électrique $\mathbf{E}'$ agissant sur les électrons dans la bobine **mobile**!)

Explication intuitive (vu à partir du référentiel fixe):
 Force de Lorentz agissant sur les électrons qui se déplacent

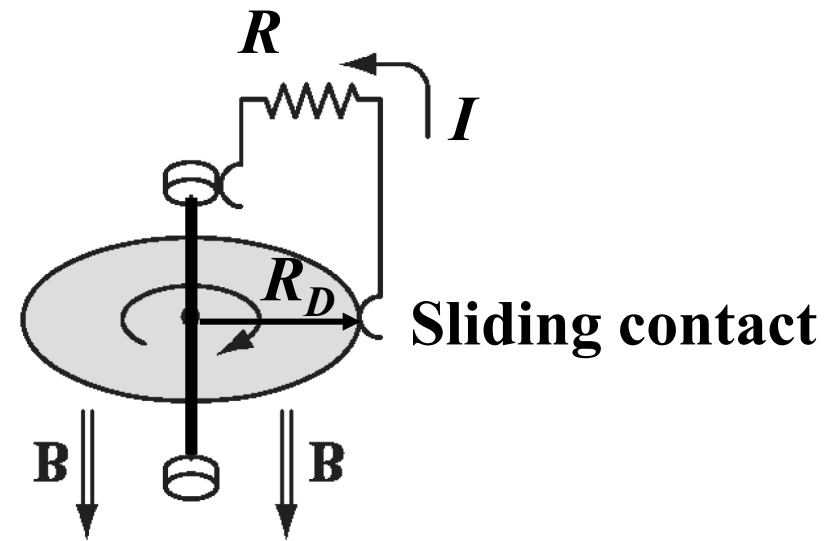
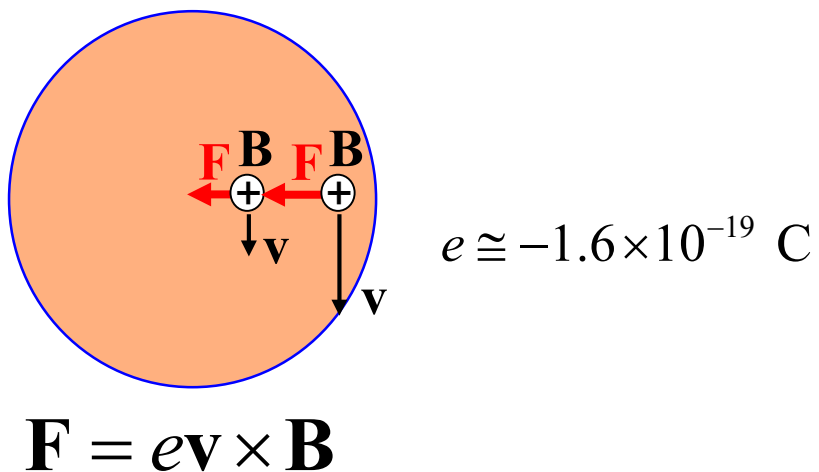
$$\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$



Exemple: Générateur homopolaire (disque de Faraday)



Explication «intuitif» (vu à partir du référentiel fixe):
Force de Lorentz agissant sur les électrons mobiles



Explication «rigoureuse»:

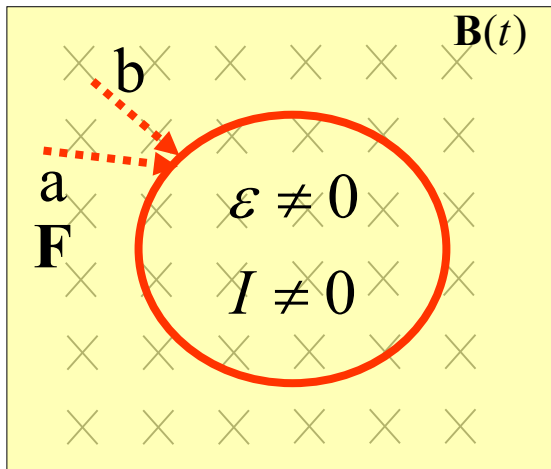
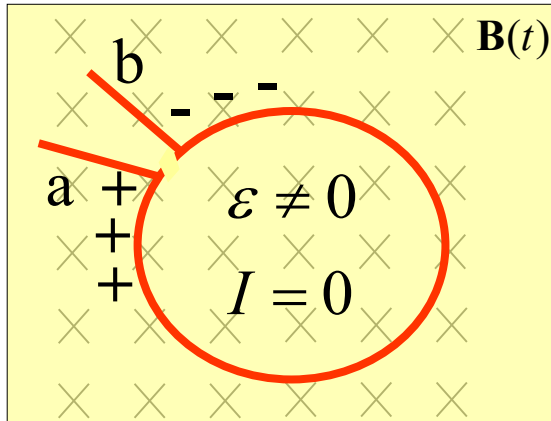
$$\varepsilon = \int_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = \int_C (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad \text{mais: } \mathbf{E} = 0 \Rightarrow$$

$$\varepsilon = \int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{R_D} \omega r B dr = \frac{1}{2} \omega R_D^2 B \Rightarrow$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\omega R_D^2 B}{2R}$$

La «fem» induite et le courant sont indépendants du temps (i.e., «DC»).

Exemple: Boucle fermée et presque fermée fixe dans un champ magnétique variable uniforme



$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

est valable pour tous les chemins **fermés**
(et presque fermée) fixes ou mobiles.

$$I = \frac{\mathcal{E}}{Z} \Rightarrow$$

circuit presque fermée: $Z = \infty \Rightarrow I = 0$

circuit fermée: $Z \neq \infty \Rightarrow I \neq 0$

$$(\text{pour } \omega L \ll R \Rightarrow Z = \omega L + R \cong R \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R})$$

Explication microscopique «intuitif»:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

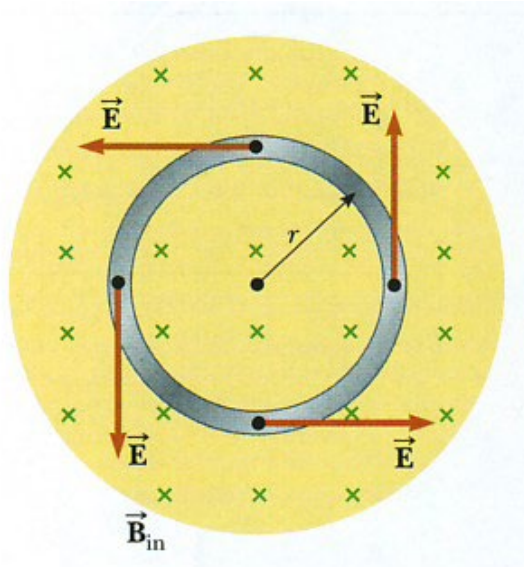
$\Rightarrow$

un champ $\mathbf{B}$ dépendant du temps produit un champ $\mathbf{E}$

Les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ agissent sur les électrons par
la force de Lorentz $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$

Explication microscopique «rigoureuse»:

Circuit immobile $\Rightarrow \mathbf{v} = 0$



$$\varepsilon = \int_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = \int_C (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} + \oint_C (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

Mais $\mathbf{E} \cong E_\phi \hat{\phi}$ (demonstration pas facile !)

$\Rightarrow$

$$\varepsilon = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r E_\phi$$

$$\varepsilon = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

$\Rightarrow$

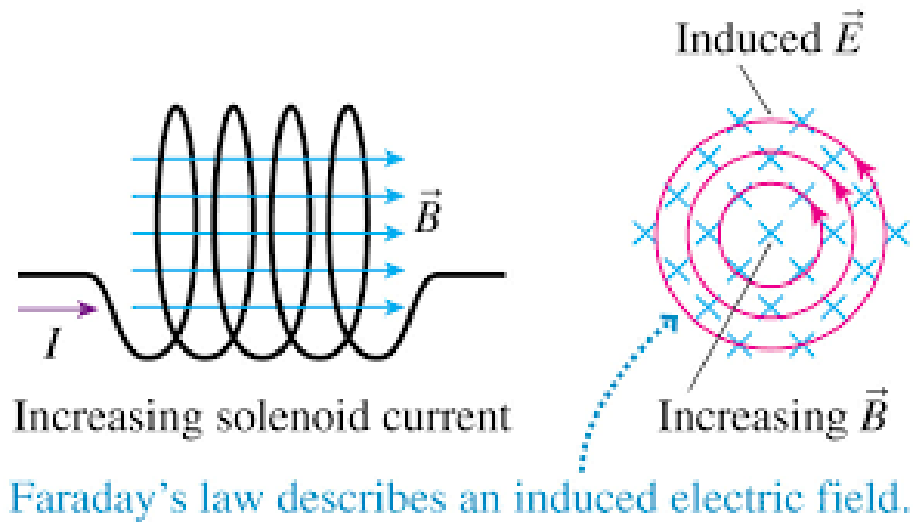
$$\mathbf{E} = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \hat{\phi}$$

Note:

Si les charges sont initialement immobiles, le champ magnétique ne produit aucune force sur les charges. Cependant, un champ magnétique variable produit un champ électrique variable qui peut agir sur une charge initialement immobile "localement" avec la force de Lorentz. Une fois les charges en mouvement, elles ressentent à la fois la force magnétique et la force électrique de Lorentz.

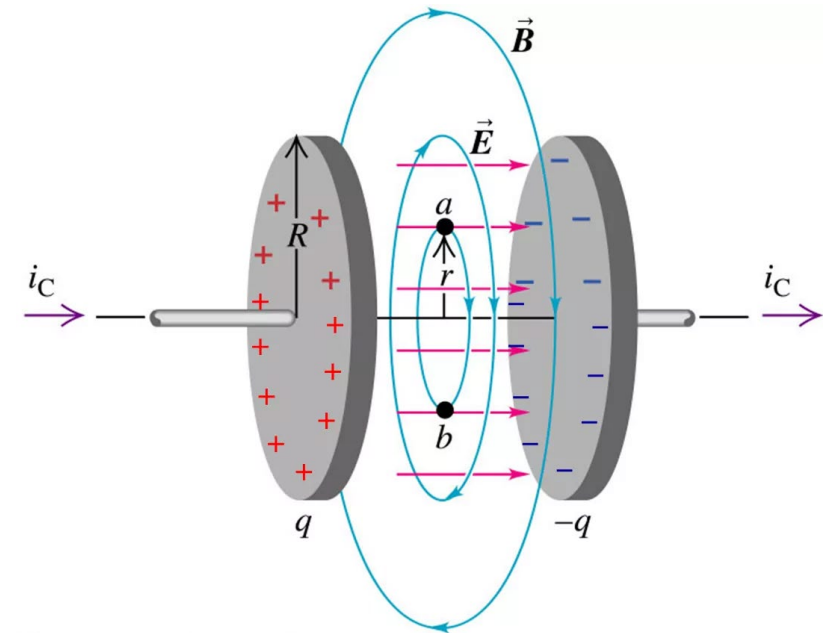
Note 1:

Dans un solénoïde,
un champ magnétique variable
produit un champ électrique
(sans démonstration).

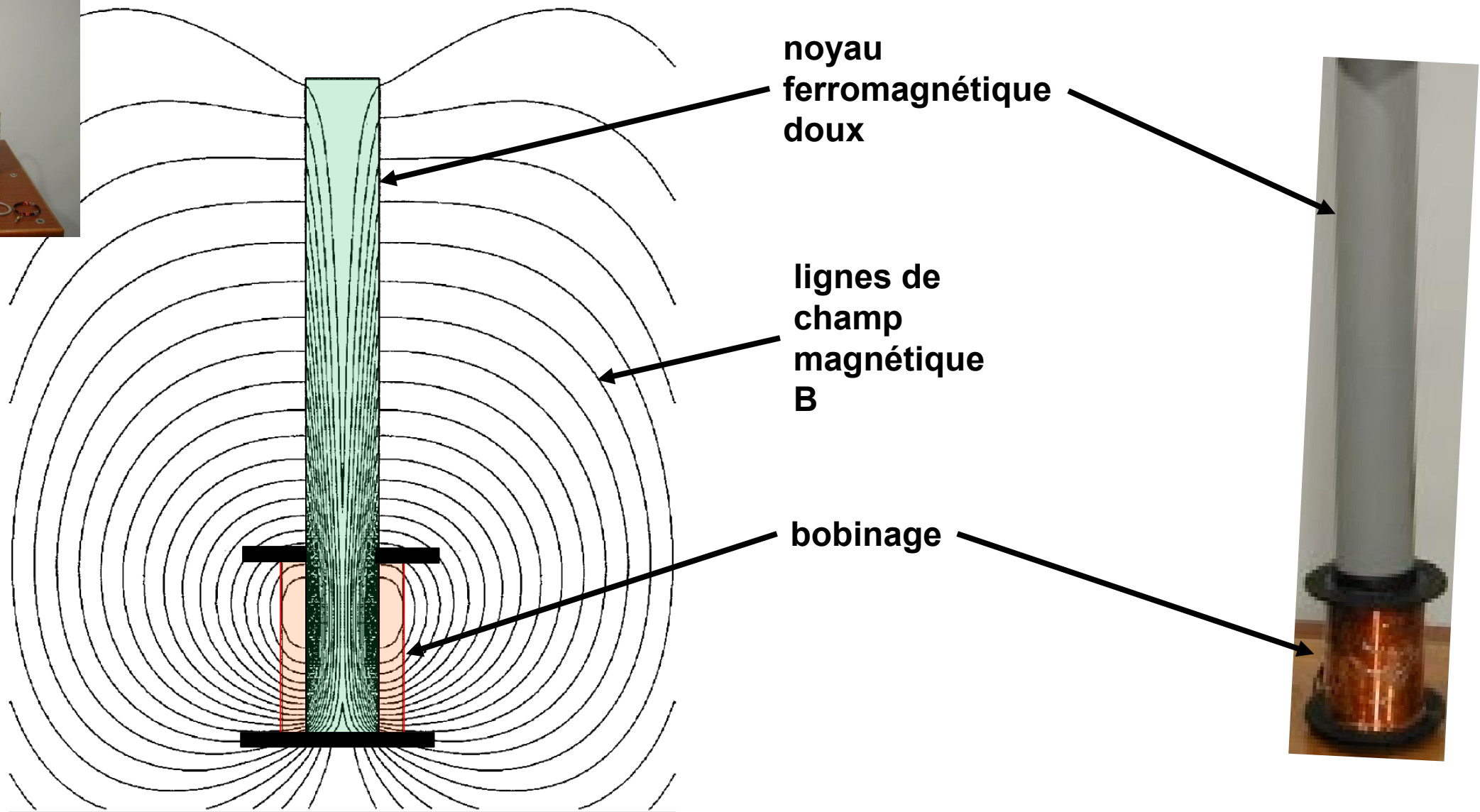


Note 2:

Dans un condensateur,
un champ électrique variable
produit un champ magnétique
(sans démonstration).



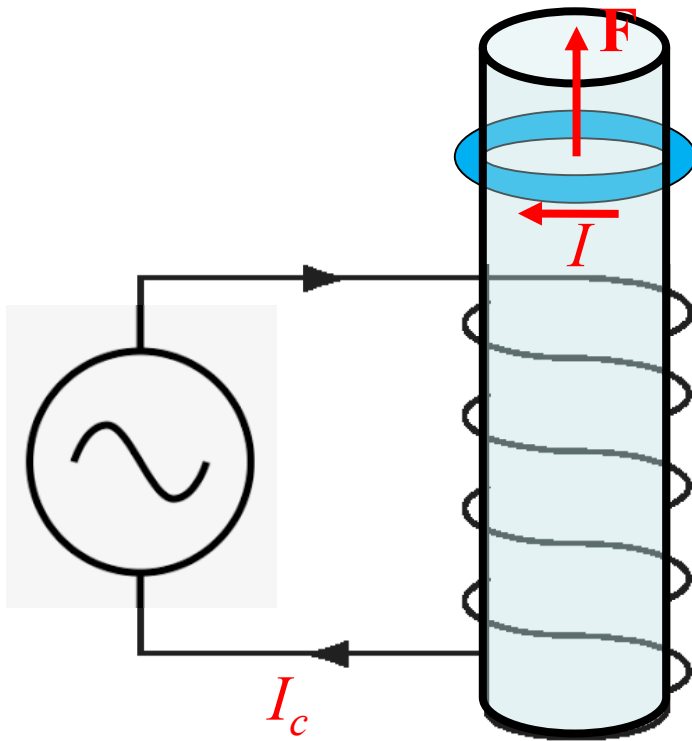
Exemple: le «saut d'anneau» (tour de Jufer)



I : Courant induit dans l'anneau

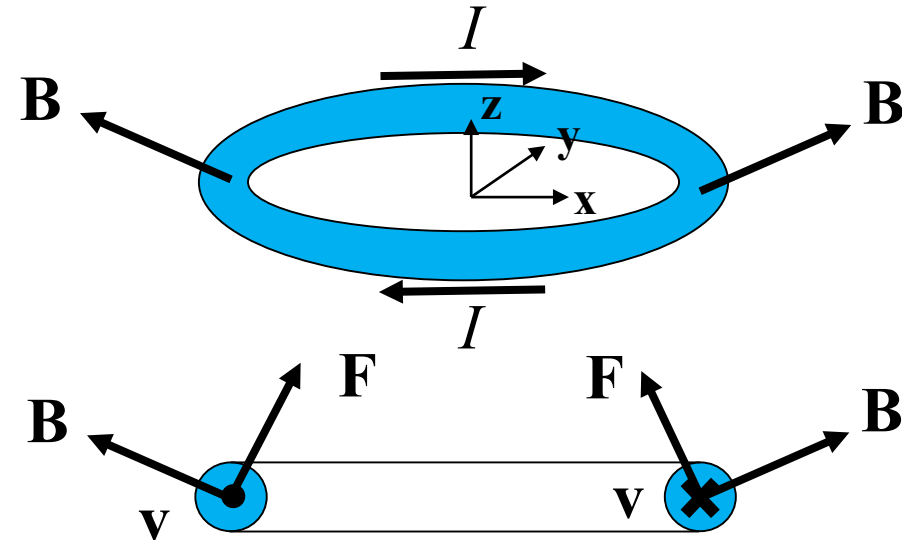
$$I = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d}{dt} \Phi_B$$

$\mathbf{F}$: Force sur l'anneau



I_c : Courant imposée dans le bobinage

Explication «microscopique» intuitif
(force de Lorentz sur les électrons)

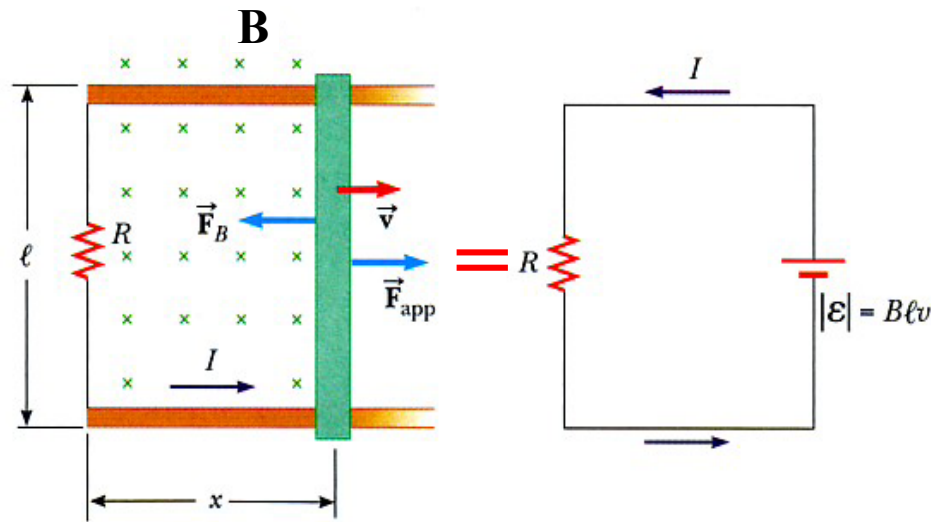


Un champ $\mathbf{B}$ dépendant du temps produit un champ $\mathbf{E}$ qui met les électrons en mouvement.

Les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ agissent sur les électrons par la force de Lorentz $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$

La composante de $\mathbf{B}$ dans le plan xy détermine une force avec composante dans la direction z sur les électrons en mouvement.

Exemple: Conducteur en mouvement dans champ B indépendant du temps



"Méthode" 1:

Pour **tous** les chemins **fermés** C fixes ou mobiles avec surface interne S :

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \Phi_B$$

$$\Phi_B = -Blx \Rightarrow \frac{d\Phi_B}{dt} = -Bl \frac{dx}{dt} = -Blv \Rightarrow \mathcal{E} = Blv$$

"Méthode" 2:

$$\mathcal{E} = \int_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = \int_C (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

$$\mathbf{E} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\mathcal{E} = \int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_0^l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = vBl$$

$\Rightarrow$

$$\mathcal{E} = Blv$$

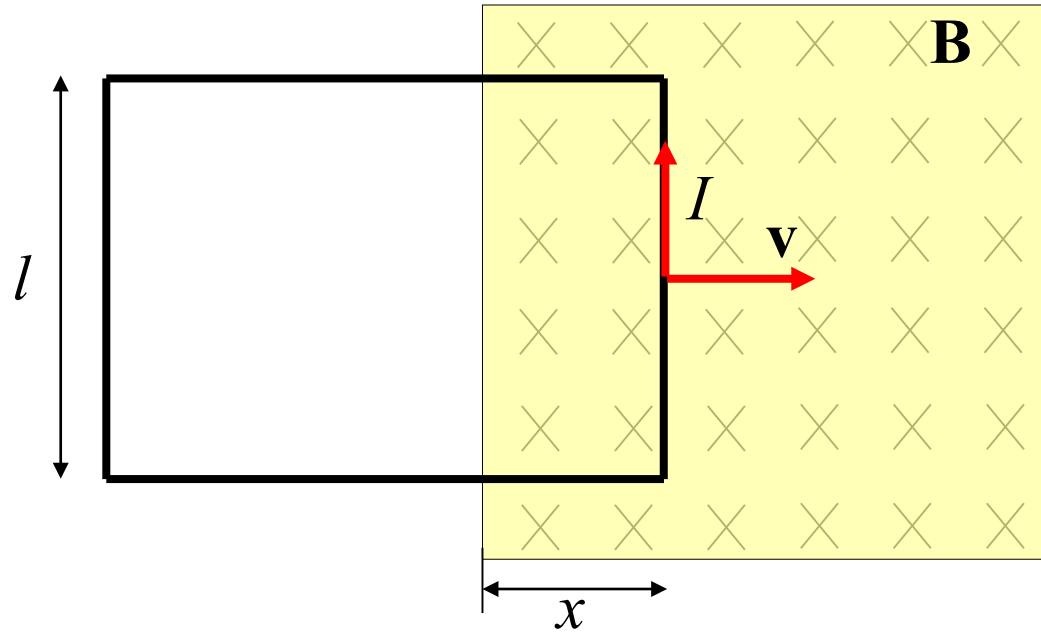
Note:

$$P = F_{app} v = (IlB) v = \frac{B^2 l^2 v^2}{R} = \frac{V^2}{R} = P_R$$

$$I = \frac{V}{R} = \frac{Blv}{R}$$

La puissance nécessaire pour déplacer le conducteur à vitesse constante est égale à la puissance dissipée dans la résistance.

Exemple: Bobine en mouvement à vitesse v dans champ B indépendant du temps



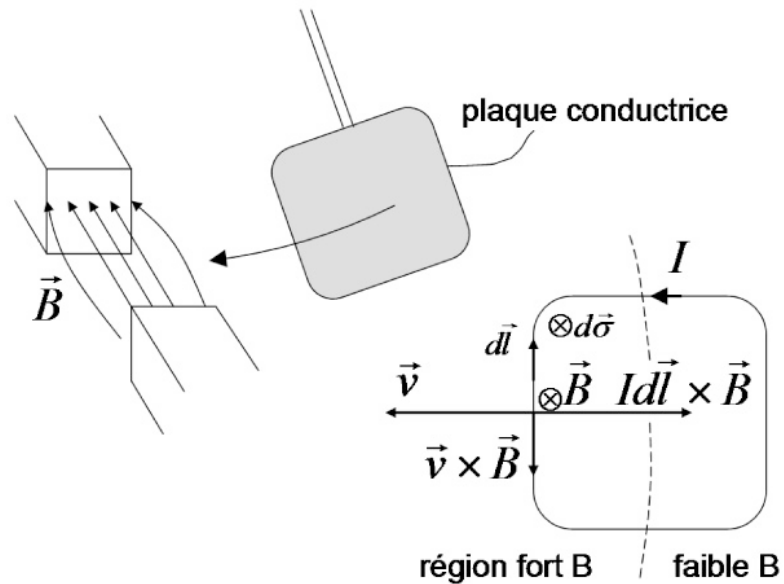
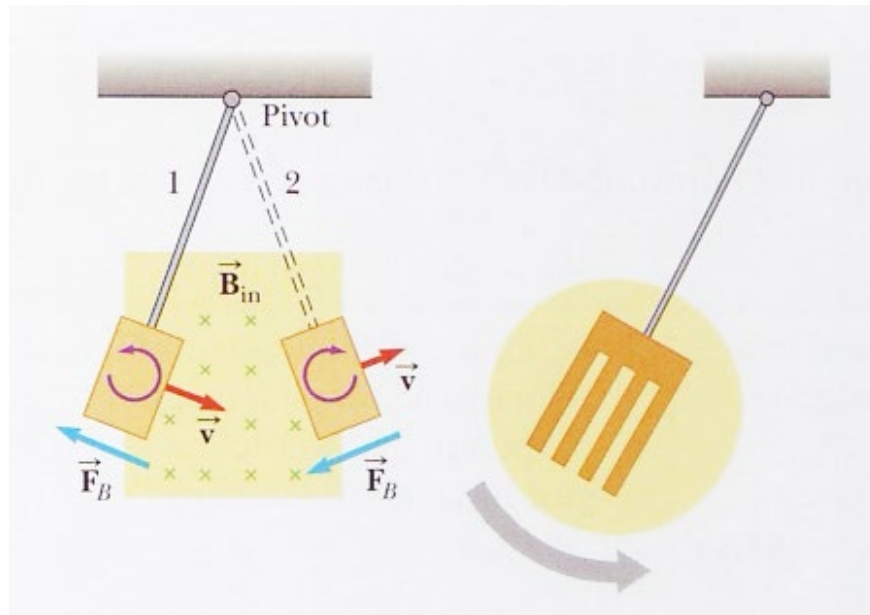
$$\begin{aligned}\varepsilon &= -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \Phi_B \\ \Phi_B &= -Blx \Rightarrow \\ \frac{d\Phi_B}{dt} &= -Bl \frac{dx}{dt} = -Blv \\ \Rightarrow \varepsilon &= Blv \Rightarrow \\ I &= \frac{\varepsilon}{R} = \frac{Blv}{R}\end{aligned}$$

$\mathbf{B}$: champ magnetique $(0, 0, -B_z)$

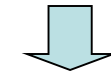
I : courant induit dans la bobine par le mouvement de la bobine dans le champ $\mathbf{B}$

$\mathbf{v}$: vitesse de la bobine

Exemple: Courants électriques convectifs (de Foucault)



$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$



Courant induit I

$$I = \frac{\varepsilon}{R}$$

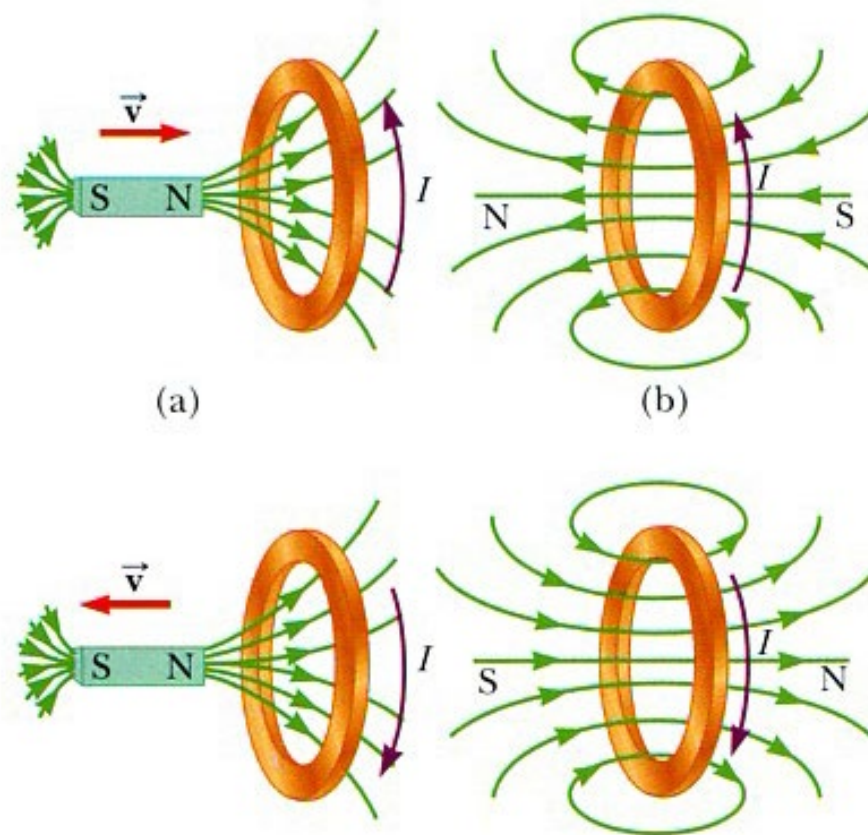
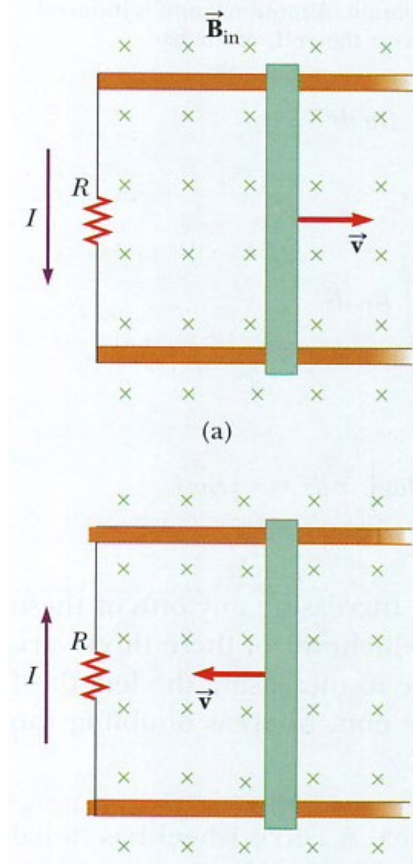


Force sur le courant induit I

$$\mathbf{F} = \oint_{\Gamma} I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

La force $\mathbf{F}$ s'oppose au mouvement
~ frottement visqueux

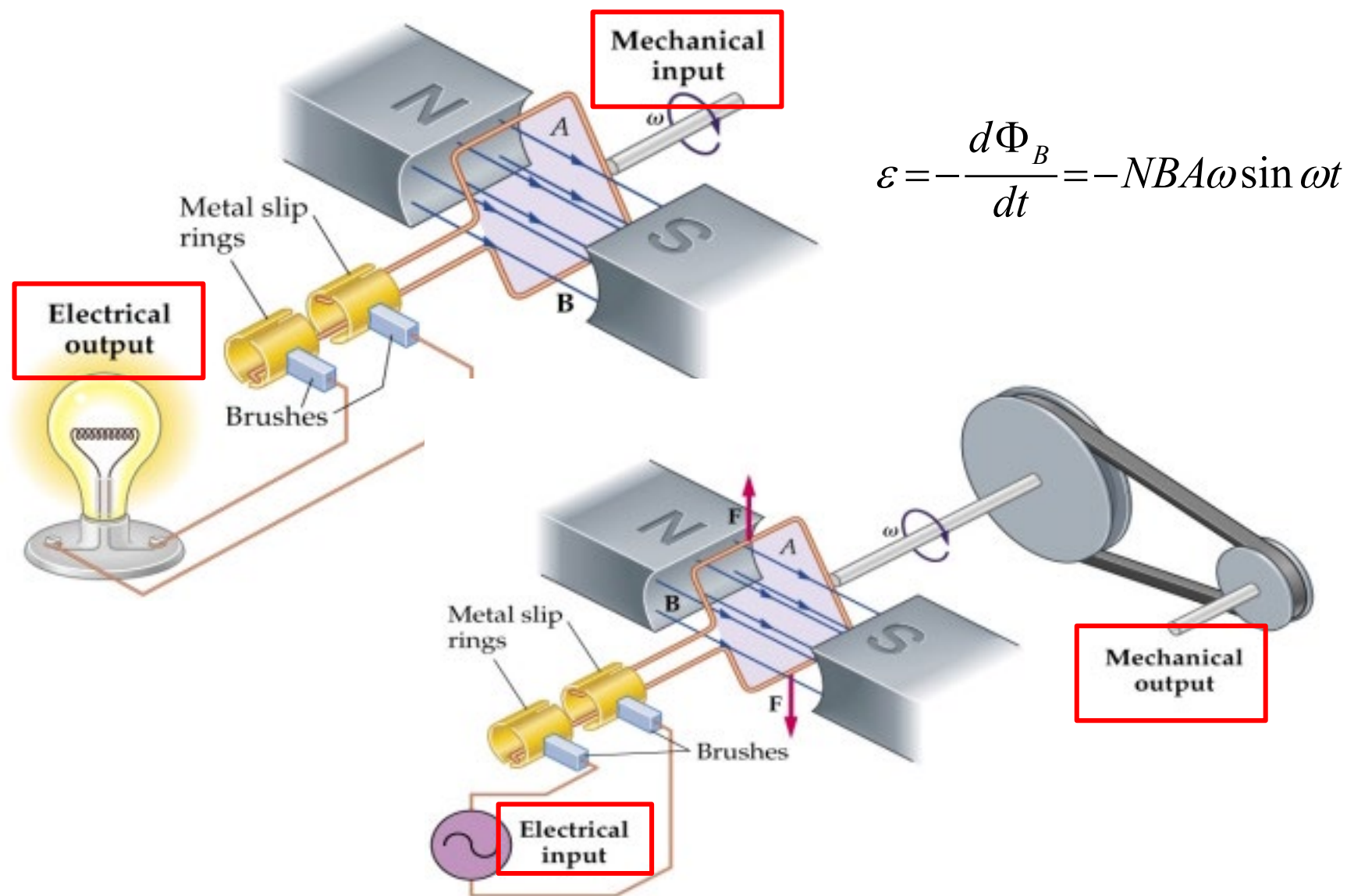
Note: Le signe de la f.e.m (*loi de Lenz*)



Le flux créé par le courant induit **s'oppose**
à la variation du flux extérieur (*feedback négatif*)

Applications de la loi de Faraday-Lenz:

Conversion de l'énergie électrique en énergie mécanique (et vice versa)



Conditions quasi-statiques

En général:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\rho = \rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

$$\mathbf{E} \equiv -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{A}$$

$$V(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x'$$

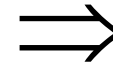
$$t' = t - (|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| / c)$$

En conditions quasi-statiques
nous supposons que:

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = 0$$

$$t' = t$$



Conditions quasi-statiques:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mathbf{0}$$

$$\rho = \rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \nabla \times \mathbf{M} + \mathbf{0}$$

$$\mathbf{E} \equiv -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{A}$$

$$V(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x'$$

$$t' = t$$

Equations de la magnétostatique

Loi de Biot-Savart

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

Loi d'Ampère

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{s}$$



$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{x}', t) \times \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J}(\mathbf{x}', t) \cdot d\mathbf{s}$$

En général il est **faux**...mais en conditions quasi-statiques:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \cong \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{x}', t) \times \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{l} \cong \mu_0 \int_S \mathbf{J}(\mathbf{x}', t) \cdot d\mathbf{s}$$

Question: Si le champ magnétique est généré par des densité de courant dépendant du temps, pouvons-nous encore utiliser les lois magnétostatiques (i.e., la loi de Biot-Savart ou la loi d'Ampère) pour calculer le champ magnétique?

Reponse: En général, ce n'est pas correct mais l'erreur est généralement négligeable à moins que:

1) les courants (et les densités de charge) changent "très" rapidement (courant de déplacement non négligeable)

et / ou

2) le point d'intérêt est «très» loin des sources (retard non négligeable)

Le régime dans lequel les lois magnétostatiques peuvent encore être utilisées pour calculer le champ magnétique $\mathbf{B}$ est appelé quasi-statique.

Loi de (Maxwell)-Ampère

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \mu_0 \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

Quatre "sources" sont capables de produire le champ magnétique $\mathbf{B}$:

Deux familiers en **magnétostatique** :

1) La densité des courants libres:

$\mathbf{J}_f$

2) La densité des courants liés (ou des dipôles magnétiques) (aimantation):

$\mathbf{M}$

Deux présents seulement en **électrodynamique** :

3) La variation temporelle du champ électrique:

$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

4) La variation temporelle de la densité des dipôles électriques:

$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$

Le «courant de déplacement»

Equation de Maxwell-Ampère:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

mais:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

$\Rightarrow$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left(\int_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s} + \int_S (\nabla \times \mathbf{M}) \cdot d\mathbf{s} + \int_S \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} + \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \right)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J}_f + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

Courant libre [A]:

$$\int_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s}$$

Densité de courant libre [A/m²]:

$$\mathbf{J}_f$$

Courant lié [A]:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{M}) \cdot d\mathbf{s}$$

Densité de courant lié [A/m²]:

$$\nabla \times \mathbf{M}$$

"Courant de déplacement" [A]:

$$\int_S \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} + \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

Densité de "courant de déplacement" [A/m²]: $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

Les courants de déplacement ont les mêmes unités [A] que les courants dus au mouvement des charges, c'est pourquoi ils sont appelés aussi courants.

Loi de (Maxwell)-Ampère: formes équivalentes

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \mu_0 \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

avec

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

Note:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

Densité de "courant de déplacement" [A/m²]

$$\int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s}$$

"Courant de déplacement" [A]

Considérations sur le «courant de déplacement»

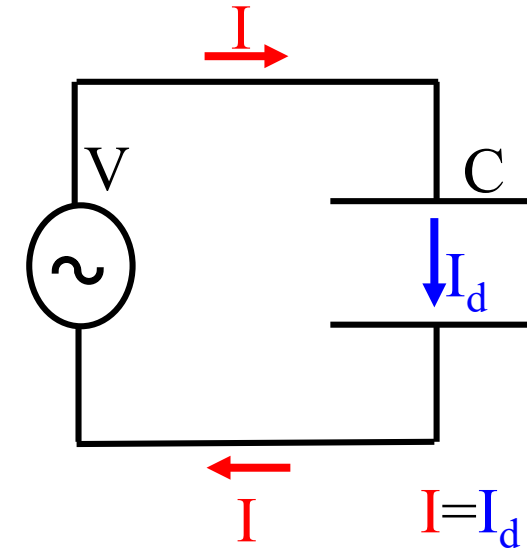
Densité de courant de déplacement

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

Courant de déplacement

«Conservation» du courant



Symétrie

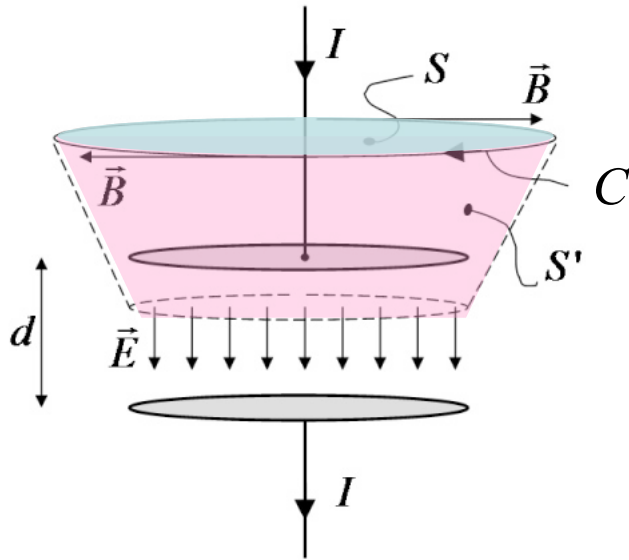
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Un champ $\mathbf{B}$ dépendant du temps génère un champ $\mathbf{E}$

Un champ $\mathbf{D}$ dépendant du temps génère un champ $\mathbf{H}$

Le courant de déplacement est «nécessaire»... dans un condensateur pour des courant AC



$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S'} \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s} + \int_{S'} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

Supposons par l'absurde que $\int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S'} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} = 0$

$\Rightarrow$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s} = I$$

$$\Rightarrow \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S'} \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s} \quad \text{mais } \mathbf{J}_f = 0 \text{ en } S' \quad \Rightarrow \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

↑ Résultats incompatibles.

Le terme $\int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$ est nécessaire !!

Le courant de déplacement est «nécessaire»... pour pouvoir déplacer une charge...

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Supposons par l'absurde que $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$

$\Rightarrow$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

mais (math.): $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$

$\Rightarrow$

$$\nabla \cdot \mu_0 \mathbf{J} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Le terme $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ est nécessaire !!

Résultat incompatible avec les observations expérimentales.

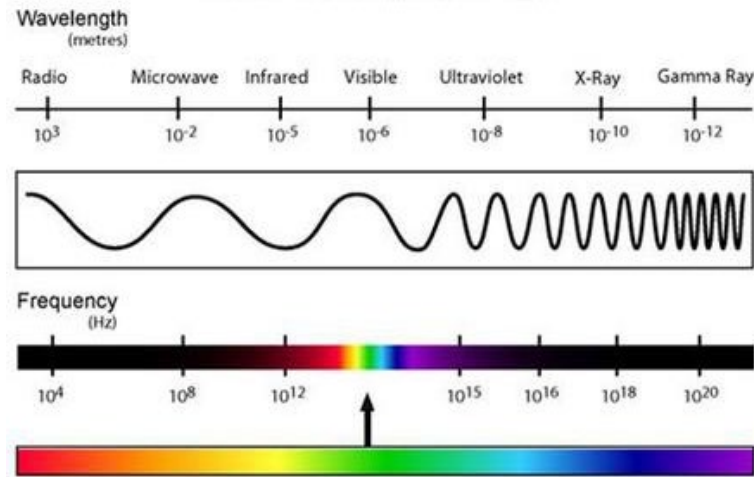
La densité de charge devrait être constante dans le temps partout dans l'Univers.

Il serait impossible de déplacer une charge !

Le courant de déplacement est «nécessaire» pour.... les ondes électromagnétiques

Si $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ Absence des ondes électromagnétiques !!

(pas de lumière visible, pas de telephone portable, pas de X-ray,...)



Conservation de la charge (eq. continuité)

Forme locale

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Forme globale

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = 0$$

Interprétation physique:

le taux de variation dans le temps de la charge électrique dans un certain volume est égale à la charge à travers les surfaces limites du volume par unité de temps.

Demonstration:

$$\text{Maxwell equations: } \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) \quad \text{mais (math.) } \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0 \quad \forall \mathbf{B} \Rightarrow$$

$$\nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) = 0 \Rightarrow \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \cdot (\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} \Rightarrow \varepsilon_0 (\frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{E}}{\partial t}) = -\nabla \cdot \mathbf{J}$$

$$\text{mais } \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}$$

Conservation de l'énergie pour le champs EM

(dans un milieu linéaire, non dispersif et sans pertes)

Puissance EM «dissipée» dans le volume V (W)

Variation d'énergie EM dans le volume V (W)

Flux d'énergie EM à travers la surface S du volume V (W)

$$\int_V P_{diss} dV + \int_V \frac{\partial u_{EM}}{\partial t} dV + \oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

Forme globale

$$\mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial u_{EM}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0$$

Forme locale

Densité de puissance électromagnétique convertie en densité de puissance mécanique ou thermique.
La matière étant finalement composée de particules chargées (électrons et noyaux), on peut considérer que les formes thermique et mécanique de l'énergie «convergent» vers la forme mécanique.

ou:

$$P_{diss} = \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E}$$

$$u_{EM} = (1/2)(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$$

$$\mathbf{S} = (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

densité de puissance EM "dissipée" (W/m³)

densité d'énergie EM (J/m³)

densité de flux de puissance traversant

la surface S (W/m²)(vecteur de Poynting)

Conservation de l'énergie pour le champs EM: «démonstration»

En général, la conservation de l'énergie
dans le volume V entouré par la surface S est:

$$\int_V P_{diss} dV + \int_V \frac{\partial u_{EM}}{\partial t} dV + \oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \text{Forme globale}$$

u_{EM} : densité d'énergie EM (J/m³)

$\mathbf{S}$: densité de flux de puissance EM traversant la surface S (W/m²)

P_{diss} : densité de puissance EM «dissipée» (W/m³)

Théorème de Gauss: $\oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{S} dV$

$$\Rightarrow \int_V \left(\nabla \cdot \mathbf{S} + P_{diss} + \frac{\partial u_{EM}}{\partial t} \right) dV = 0 \quad \text{mais } V \text{ est arbitraire} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{S} + P_{diss} + \frac{\partial u_{EM}}{\partial t} = 0 \quad \text{Forme locale}$$

Densité de puissance "dissipée" P_{diss}

Force de Lorentz:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Taux de travail sur la particule par unité de temps (puissance) est:

$$P_{diss} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \quad ((\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = 0)$$

Taux de travail sur une densité de particules chargée n :

$$n\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = nq\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = nq\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E}$$

$\Rightarrow$ (sans autres forces que la force de Lorentz)

$$P_{diss} = \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E}$$

La puissance $\mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E}$ est en effet une puissance "dissipée" par le champ $\mathbf{E}$ transformée en énergie mécanique des particules chargées.

Densité d'énergie et densité de flux de puissance:

$$\text{Maxwell equation: } \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \mathbf{J}_f = \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\text{mais: } \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \quad (\text{math: identité vectorielle})$$

$$\text{et: } \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Maxwell equation})$$

$$\Rightarrow \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$\Rightarrow$

Pour un matériau linéaire: $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$

sans pertes: μ et ε sont réelles

non dispersif: μ et ε sont indépendantes de la fréquence

et (math.) $\mathbf{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial |\mathbf{a}|^2}{\partial t}$

$$\Rightarrow \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu} \frac{\partial |\mathbf{B}|^2}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{D} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial |\mathbf{D}|^2}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{\partial t}$$

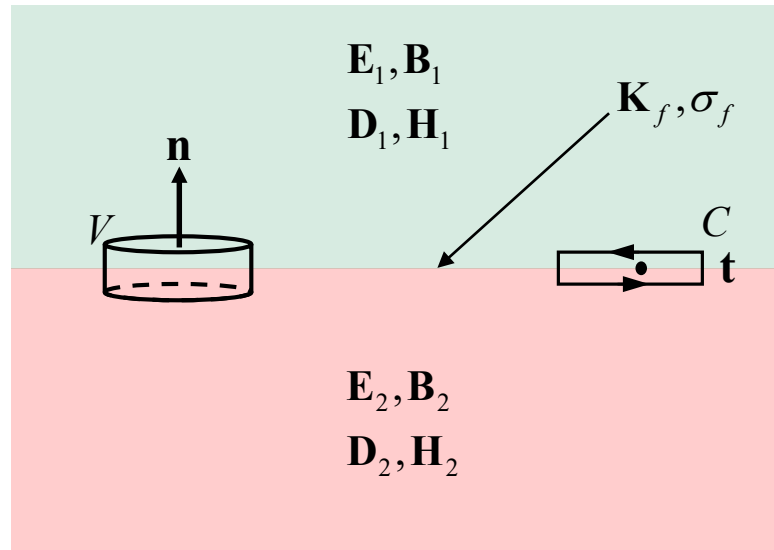
$\Rightarrow$

$$\mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{\partial t}$$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \right) = 0$$

Conditions à l'interface entre deux matériaux



σ_f : Densité de charges "libres"
de surface (C/m^2)

$\mathbf{K}_f$: Densité de courant "libres"
de surface (A/m)

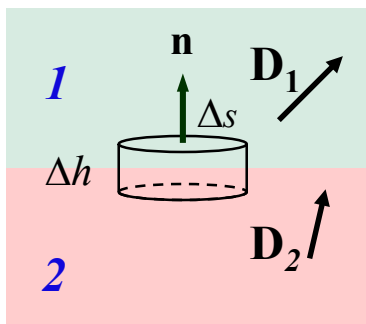
A partir des équations de Maxwell en forme intégrale:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \sigma_f \\ (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \\ (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{n} = 0 \\ (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \times \mathbf{n} = \mathbf{K}_f \end{array} \right. \quad \text{pour } \mathbf{K}_f = 0, \sigma_f = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} D_{2n} = D_{1n} \\ B_{2n} = B_{1n} \\ E_{2t} = E_{1t} \\ H_{2t} = H_{1t} \end{array} \right.$$

Relations	Conditions nécessaires	Relations	Conditions nécessaires
$B_{1n} = B_{2n}$	aucune	$E_{1t} = E_{2t}$	aucune
$H_{1t} = H_{2t}$	pas de courants libres	$D_{1n} = D_{2n}$	pas de charges libres
$B_{1t} = \frac{\mu_1}{\mu_2} B_{2t}$	pas des courants libre, matériau linéaire	$E_{1n} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} E_{2n}$	pas de charges libre matériau linéaire
$H_{1n} = \frac{\mu_2}{\mu_1} H_{2n}$	matériau linéaire	$D_{1t} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} D_{2t}$	matériau linéaire

n : normale à la surface de séparation entre les deux matériaux
 t : tangent à la surface de séparation entre les deux matériaux

Démonstrations:



$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho_f dV \quad (\text{Maxwell})$$

$$\int_V \rho_f dV = 0 \quad (\text{pas de charges "libres"})$$

Pour $\Delta h \rightarrow 0 \Rightarrow$

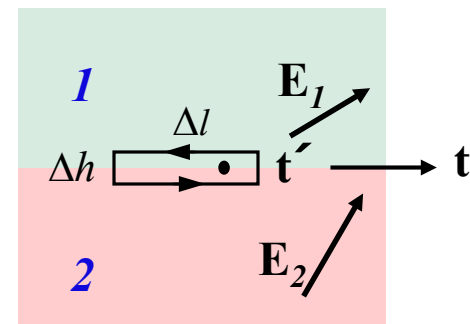
$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \cong (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} \Delta s = (D_{2n} - D_{1n}) \Delta s = 0$$

$\Rightarrow$

$$(D_{1n} - D_{2n}) = 0$$

$\Rightarrow$

$$D_{1n} = D_{2n}$$



$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{Maxwell})$$

$$\text{Pour } \Delta h \rightarrow 0 \Rightarrow \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \cong 0$$

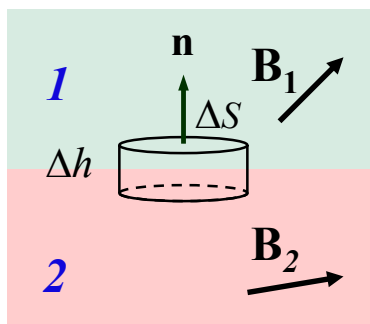
$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \cong (\mathbf{t}' \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \Delta l = 0$$

$\Rightarrow$

$$(E_{1t} - E_{2t}) = 0$$

$\Rightarrow$

$$E_{1t} = E_{2t}$$



$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (\text{Maxwell})$$

Pour $\Delta h \rightarrow 0 \Rightarrow$

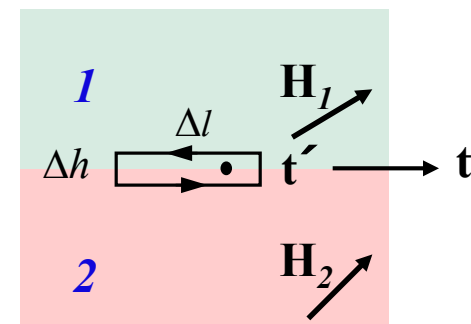
$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \cong (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} \Delta S = (B_{1n} - B_{2n}) \Delta S = 0$$

$\Rightarrow$

$$(B_{1n} - B_{2n}) = 0$$

$\Rightarrow$

$$B_{1n} = B_{2n}$$



$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{Maxwell})$$

$$\int_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (\text{pas de courants "libre"})$$

$$\text{Pour } \Delta h \rightarrow 0 \Rightarrow \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \cong 0$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \cong (\mathbf{t}' \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \Delta l = 0$$

$\Rightarrow$

$$(H_{1t} - H_{2t}) = 0$$

$\Rightarrow$

$$H_{1t} = H_{2t}$$