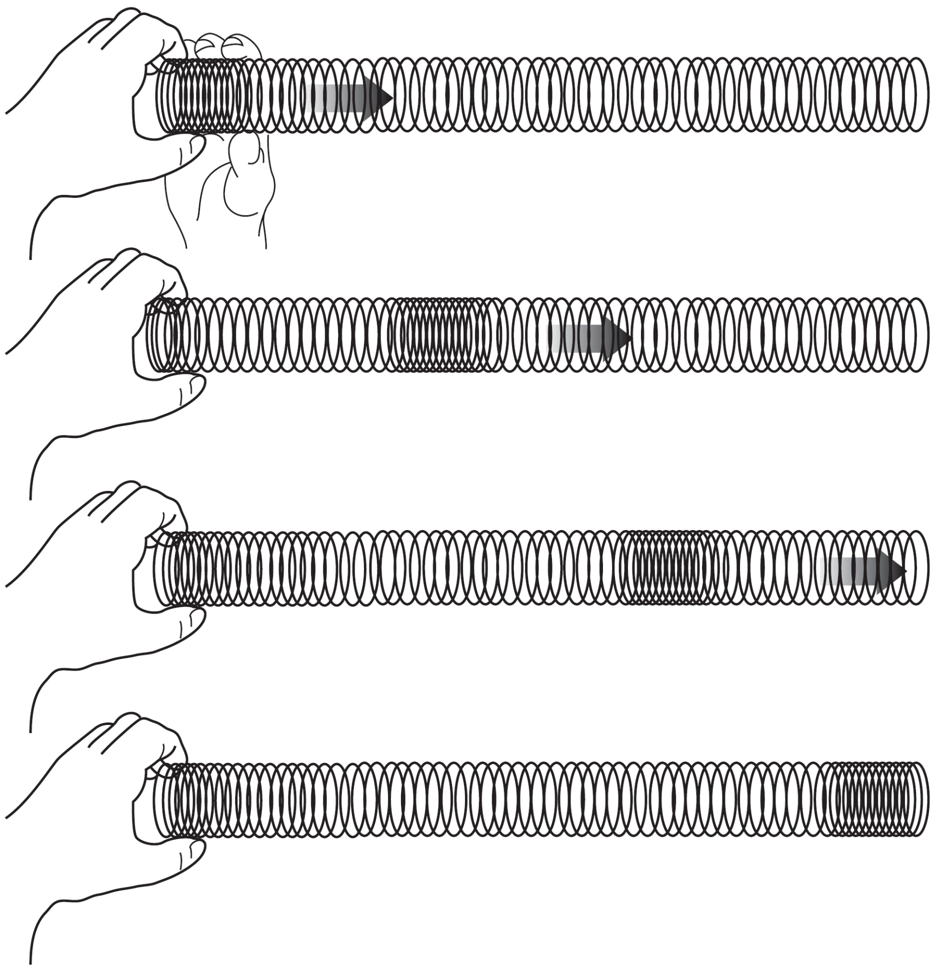
EPFL

Semaine 10:
Ondes

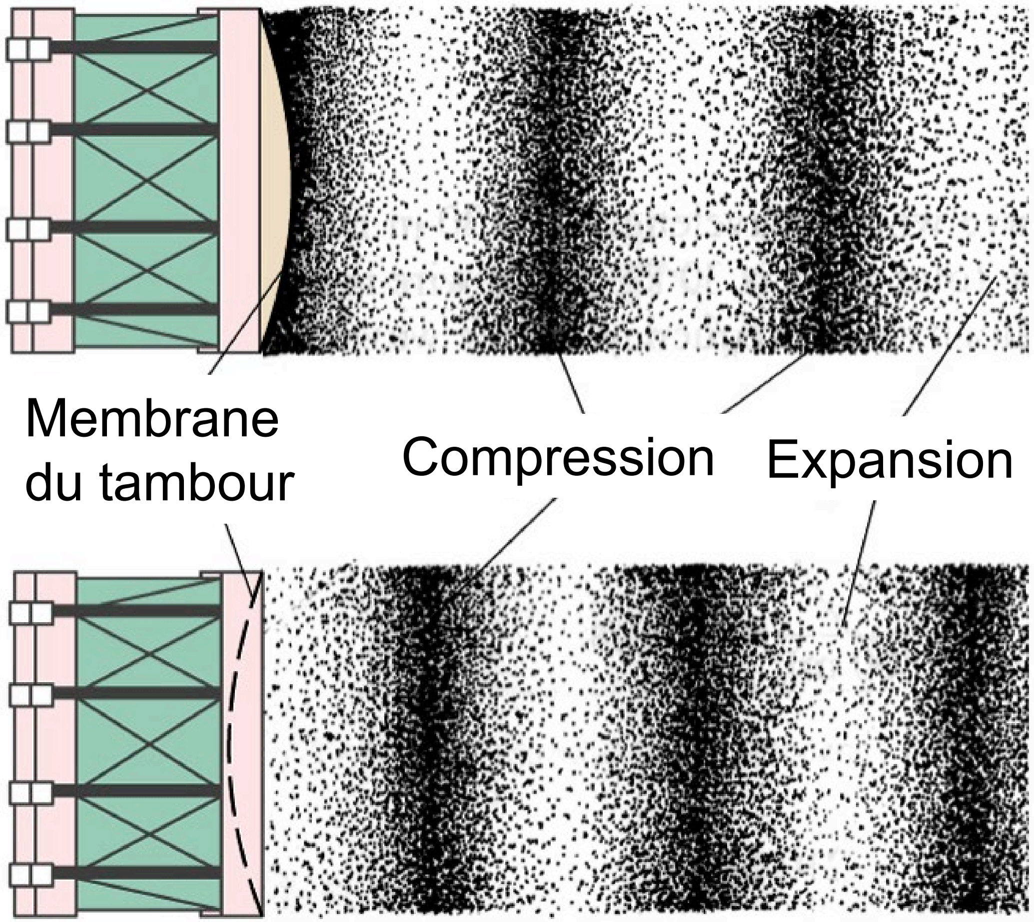
Onde longitudinale

dans un ressort

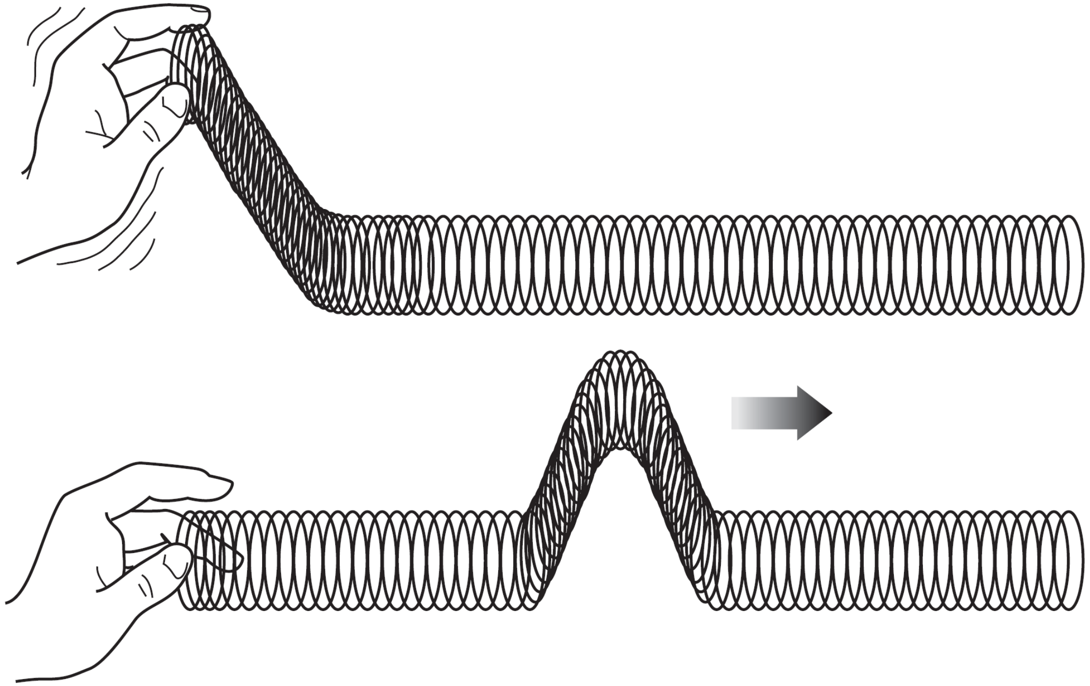


Onde longitudinale

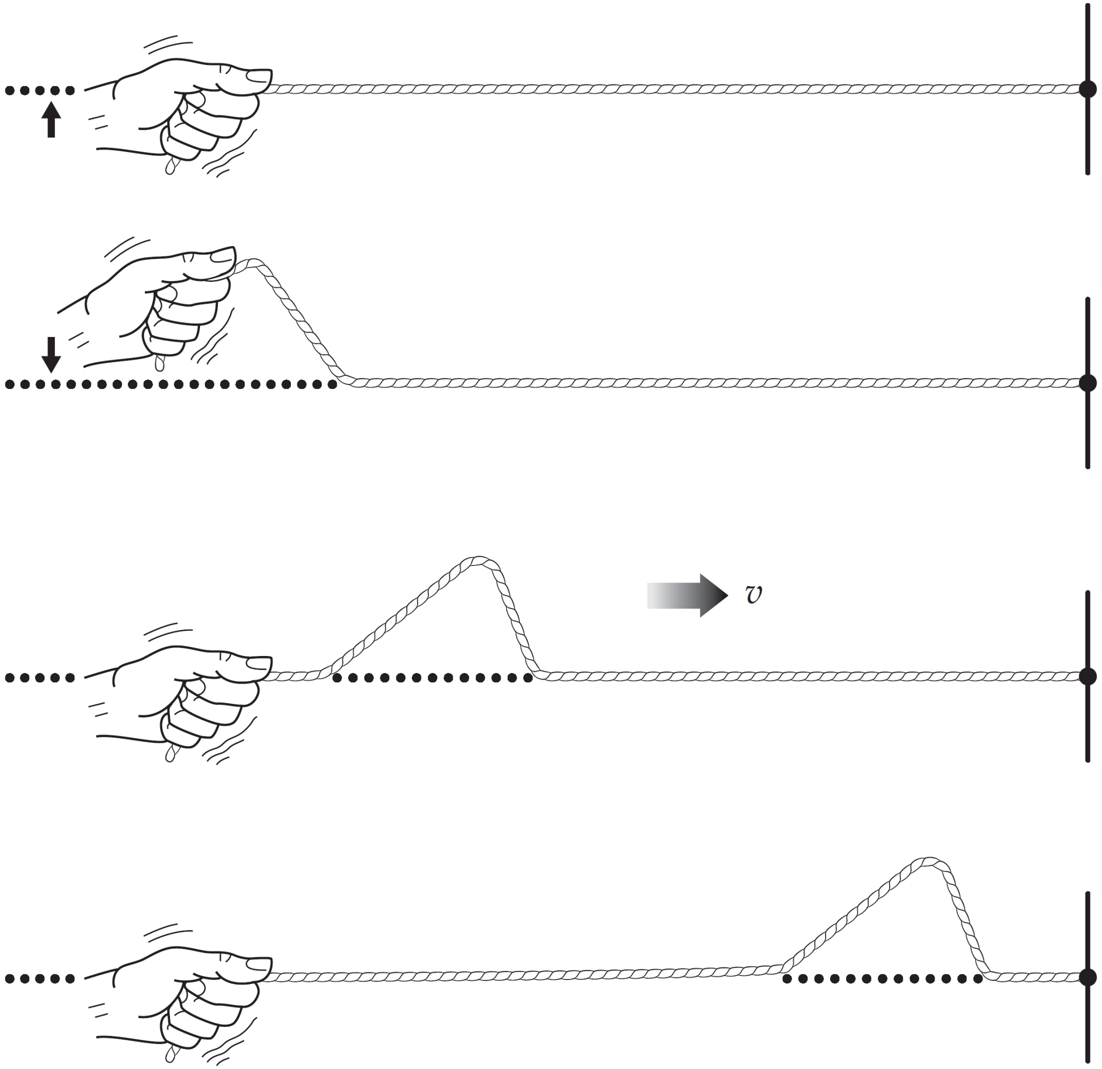
dans un gas



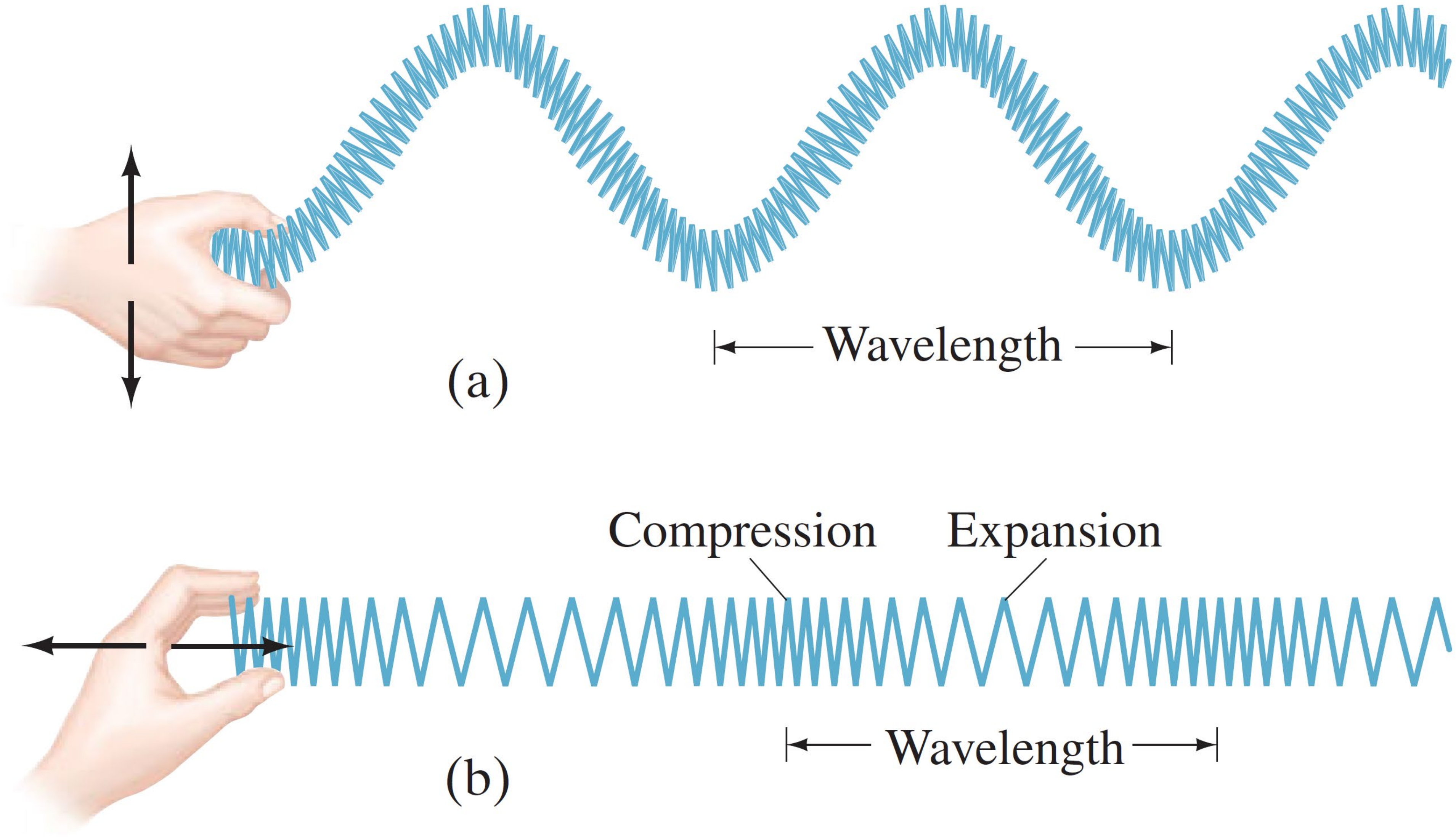
Onde **transversal** dans un ressort



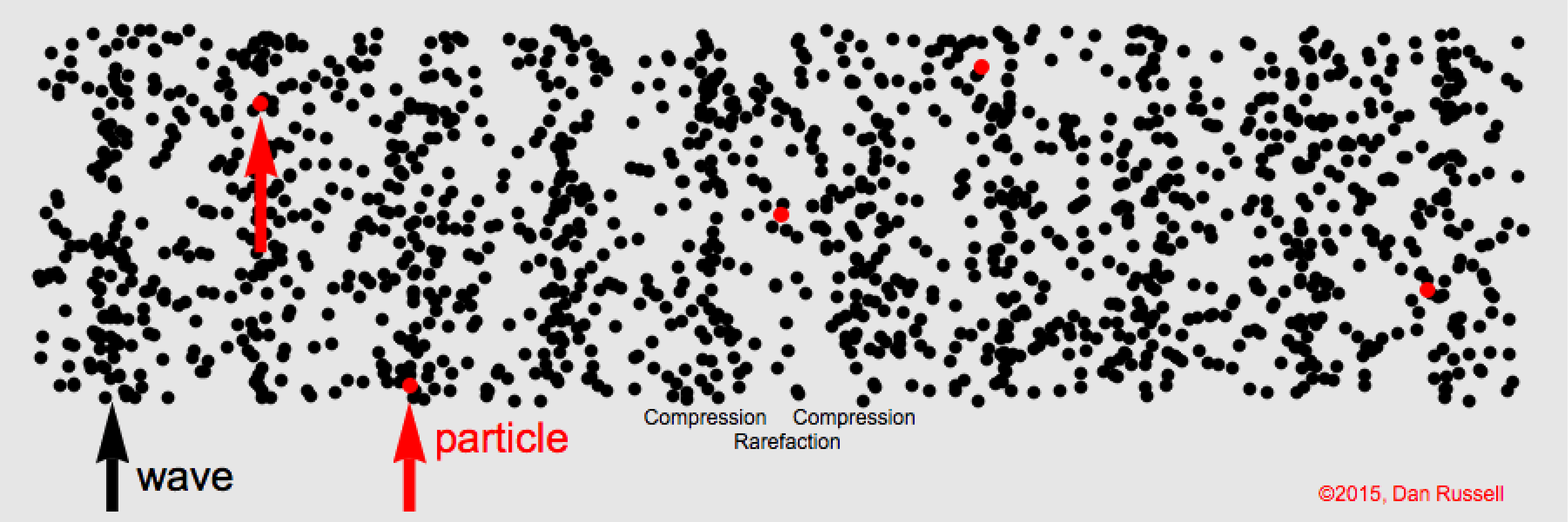
Onde **transversal** dans une corde



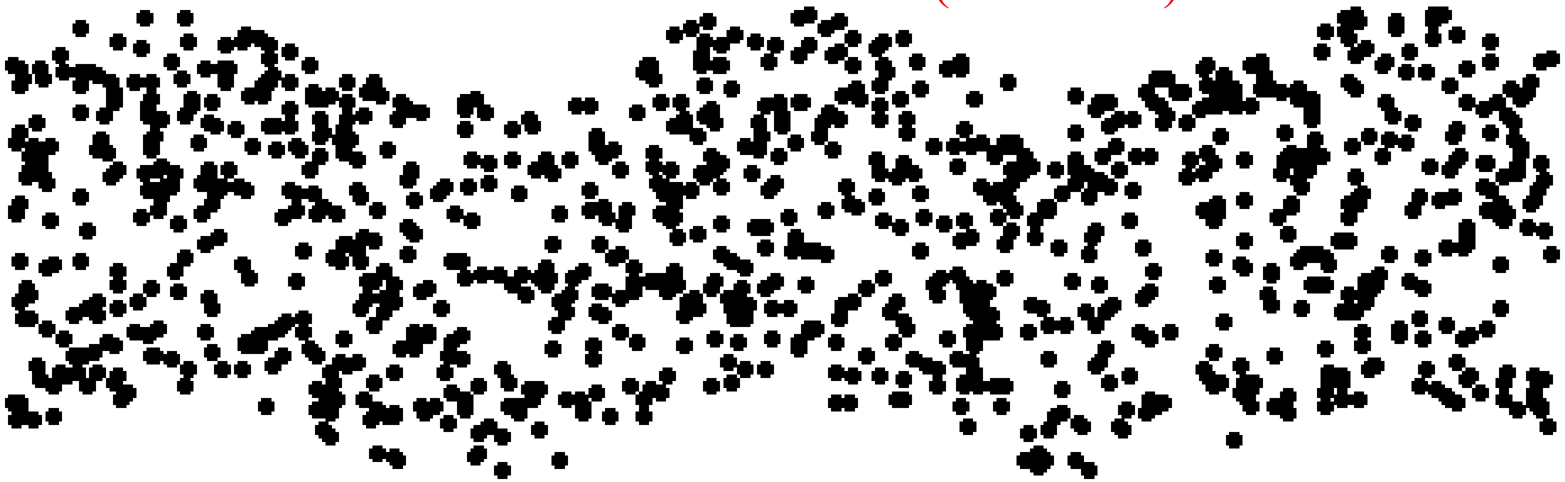
Onde **longitudinale** et onde **transversal** dans un ressort



Onde longitudinale (animation)

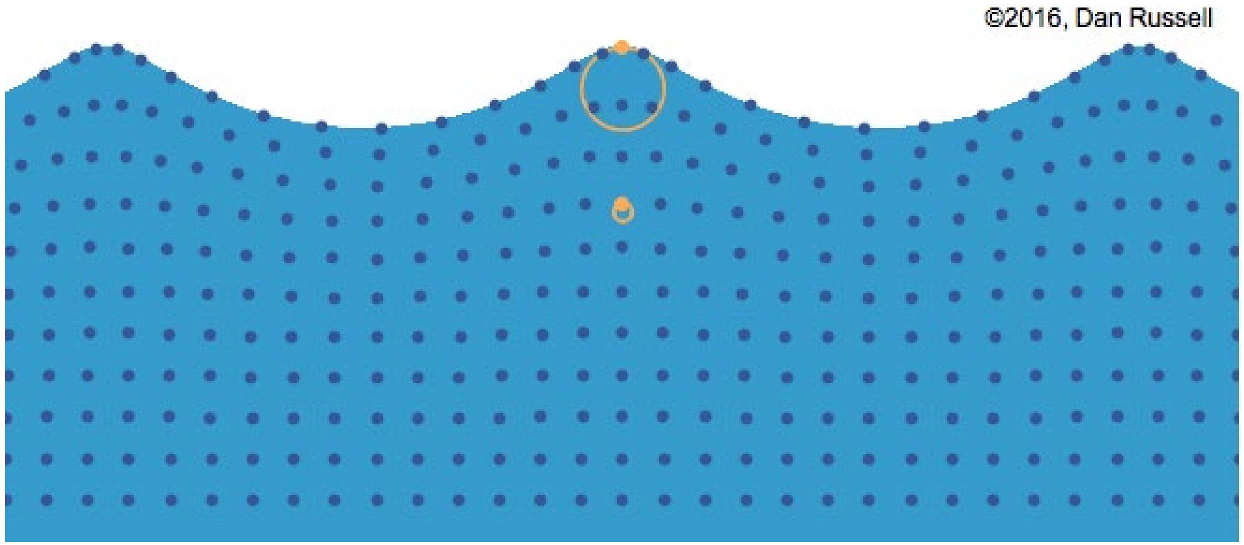


Onde transversale (animation)



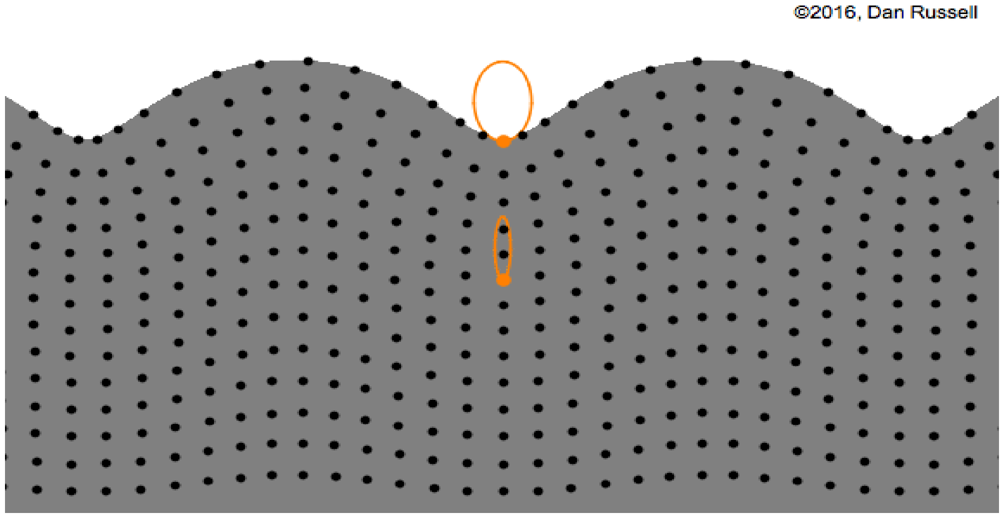
Onde de surface dans un liquide (transversale plus longitudinale) (animation)

Circulaire

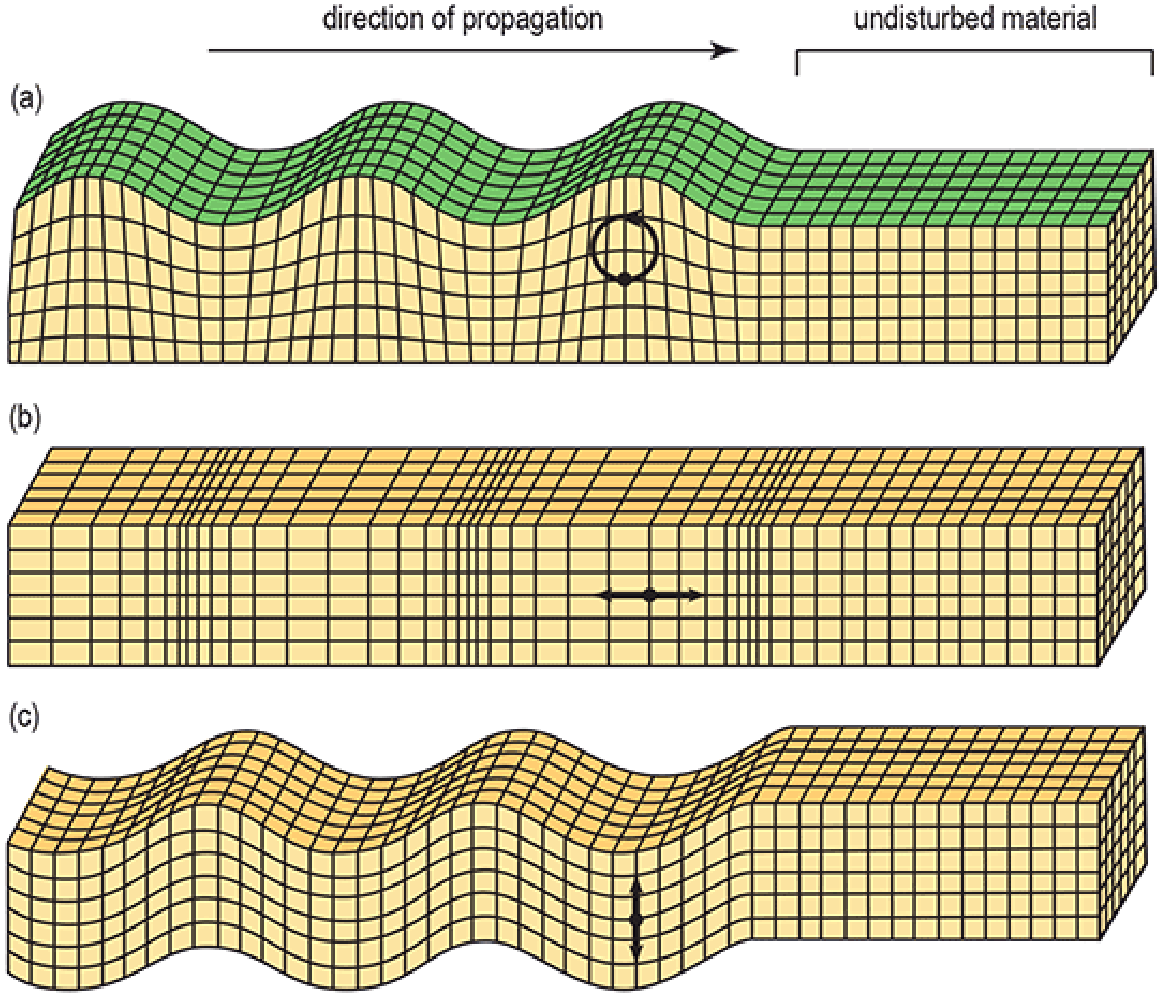


Onde de surface dans un solide (transversale plus longitudinale) (animation)

Eliptique



Ondes dans un solide



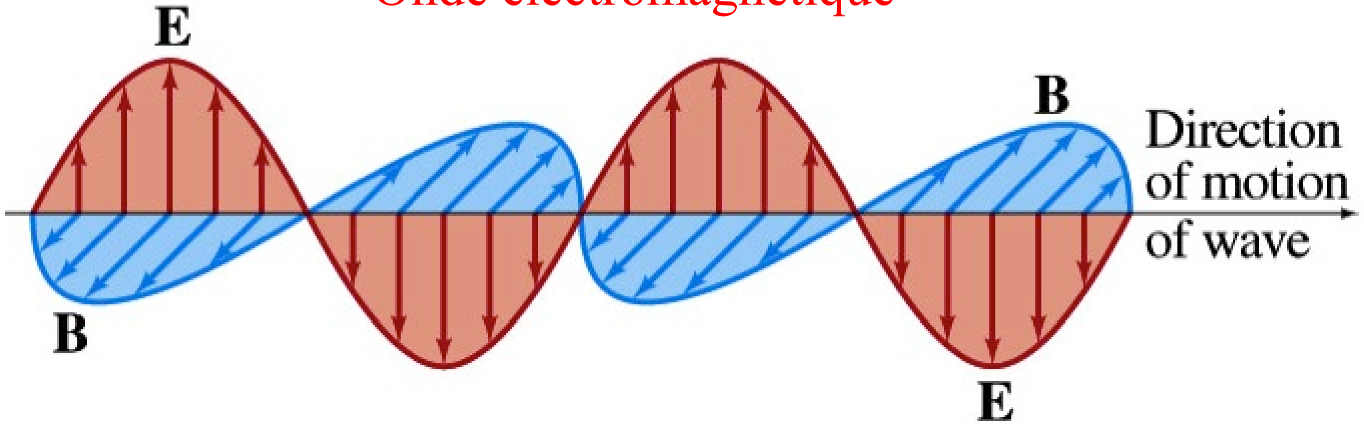
Onde de «surface»

Onde longitudinale

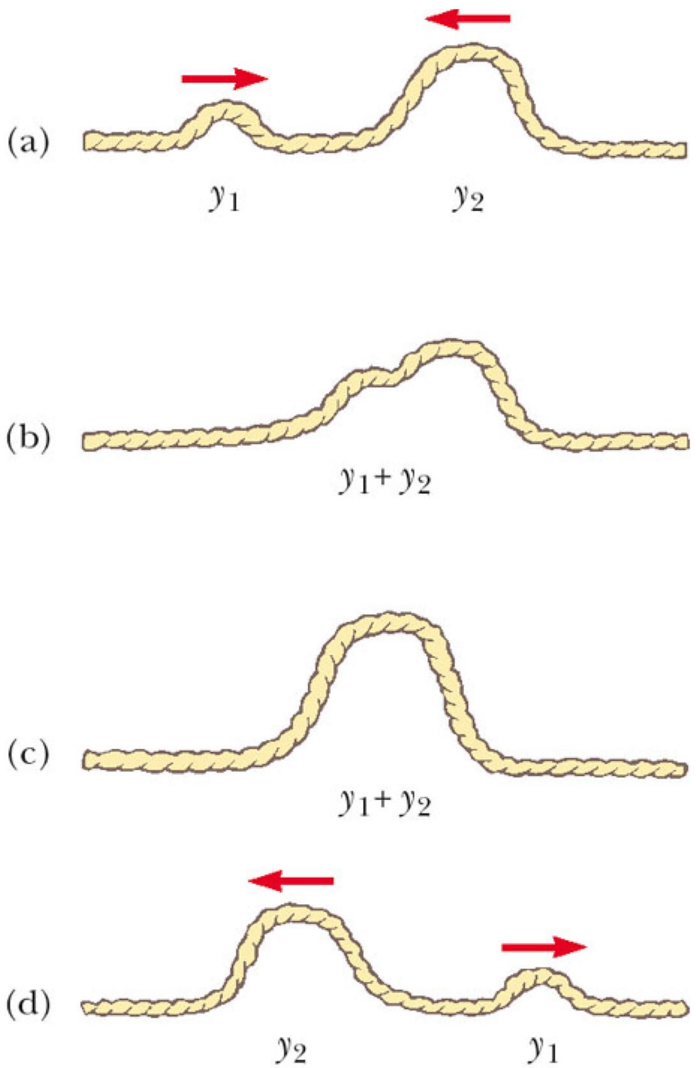
Onde transversale

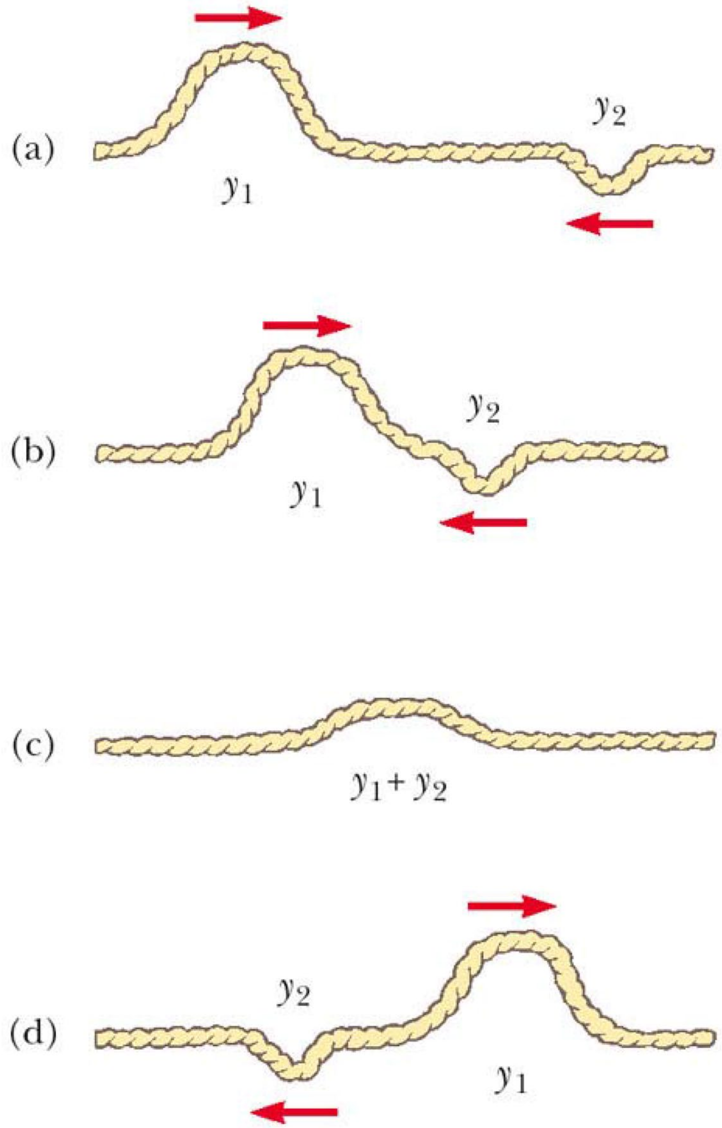
Onde de surface dans un liquide

Onde électromagnétique



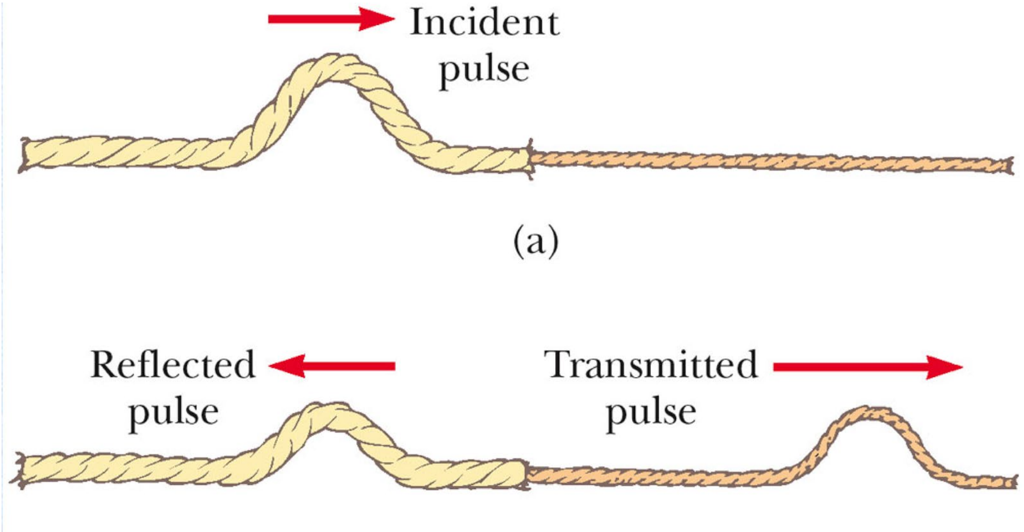
Note: Superposition «sans interaction» de deux ondes

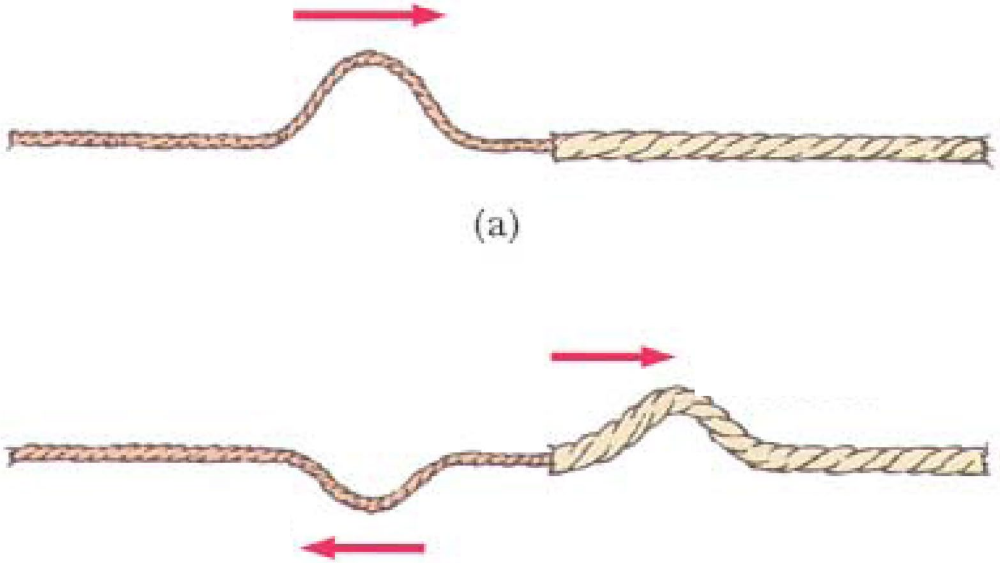




Note: Transmission et réflexion d'une onde à l'interface de deux «milieux» de propagation différentes

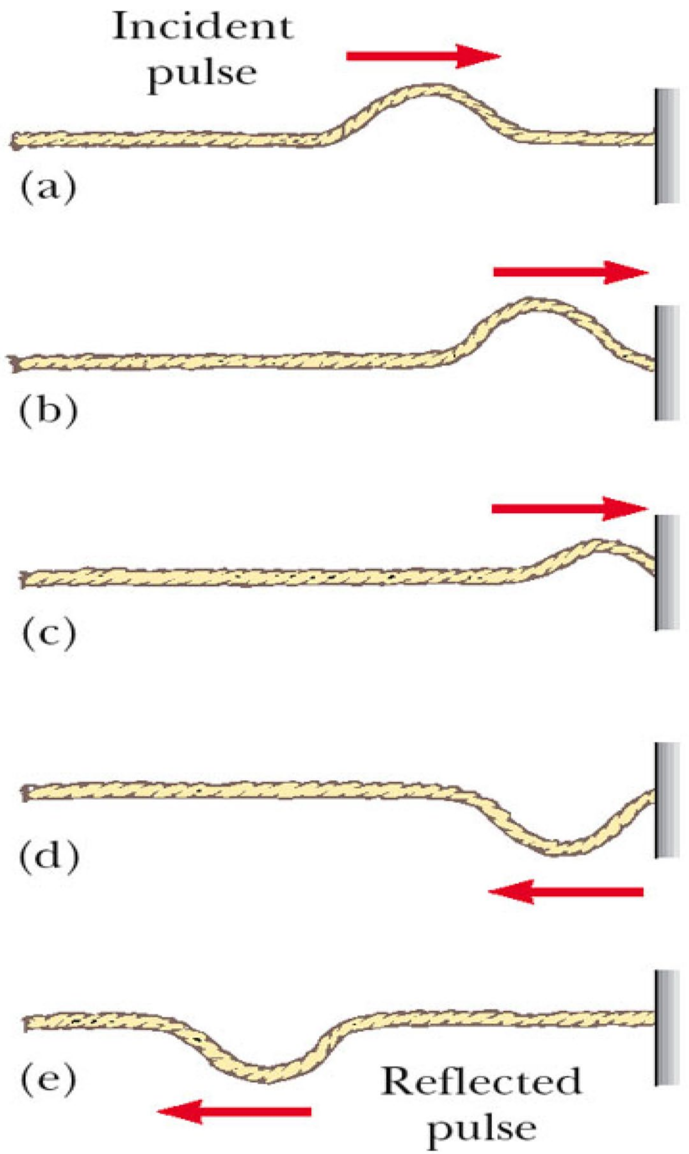
L'onde peut changer de signe et aussi de vitesse.

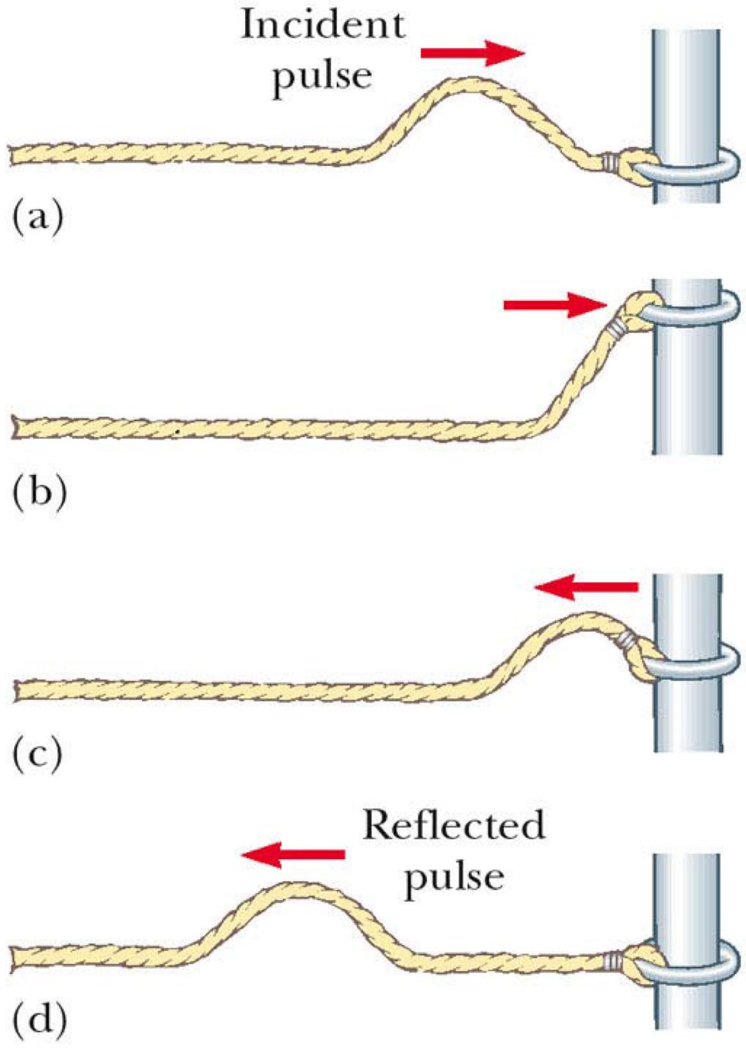




Note: Réflexion avec extrémité fixe ou libre

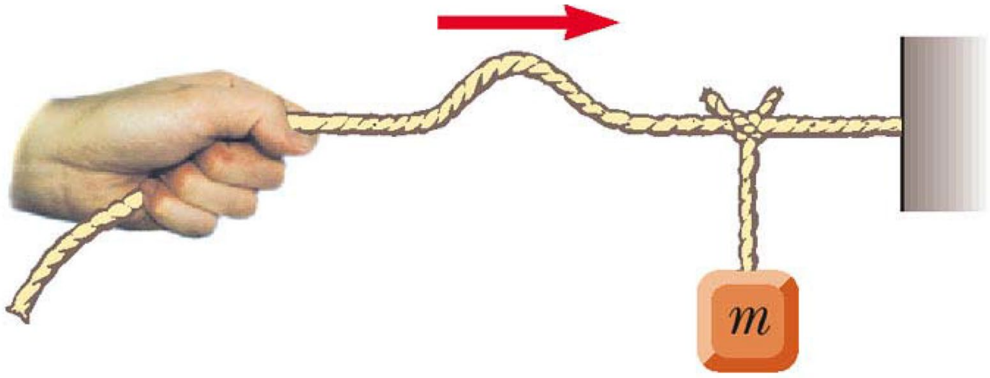
Extrémité fixe



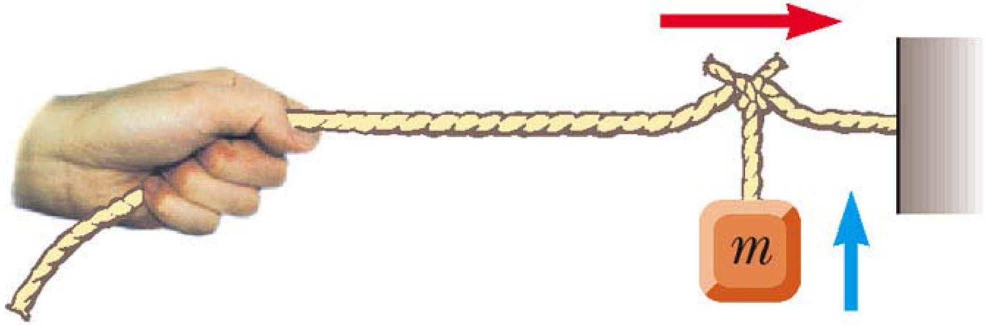


Extrémité libre

Note: Dans une onde il y a un **transport d'énergie**
(sans transport «net» de masse)



(a)



(b)

Le fait que la masse *m* se déplace vers le haut (et acquière donc de l'énergie potentielle) est la «preuve» que l'onde transporte de l'énergie.

Equation différentielle d'onde unidimensionnelle

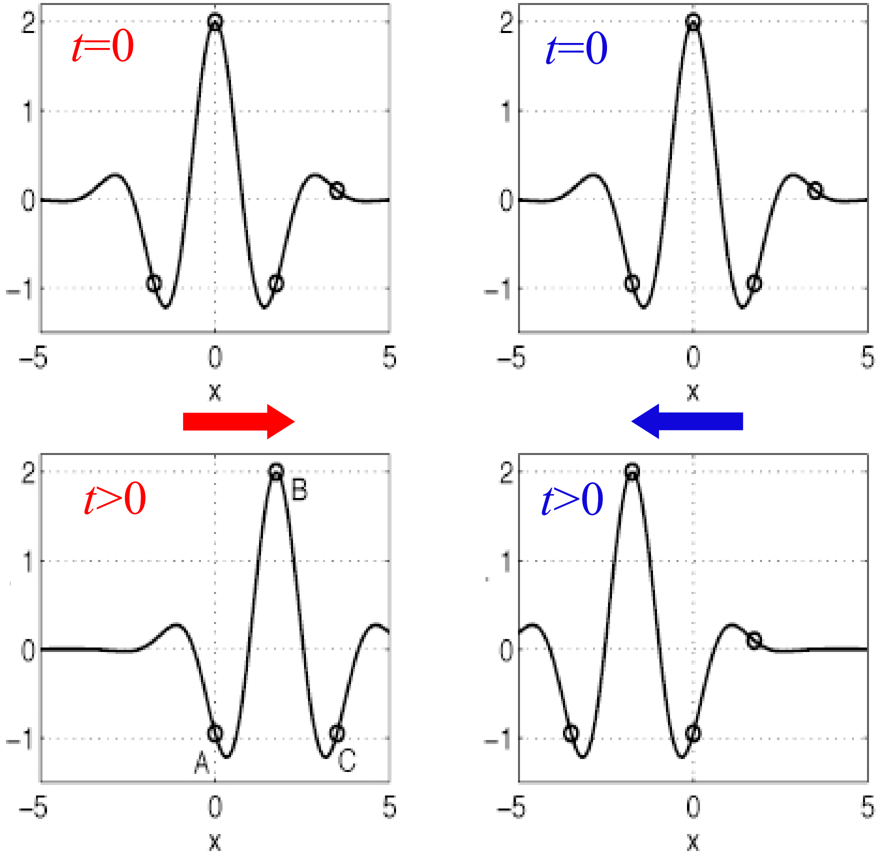
Définition: une **perturbation** se propage comme une **onde** sans déformation et avec une vitesse déterminée si:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}}$$

Equation de d'Alembert
unidimensionnelle ou équation différentielle du mouvement ondulatoire unidimensionnelle

La solution générale de l'équation de d'Alembert est:

$$\psi(x,t) = f(x - vt) + f(x + vt)$$



onde progressive

onde rétrograde

Equation différentielle du mouvement ondulatoire unidimensionnelle:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

Solution générale:

$$\psi(x,t) = f(x - vt) + f(x + vt)$$

Démonstration:

Posons: $u = x \pm vt$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial u} \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = \pm v\frac{\partial\psi}{\partial u}$$

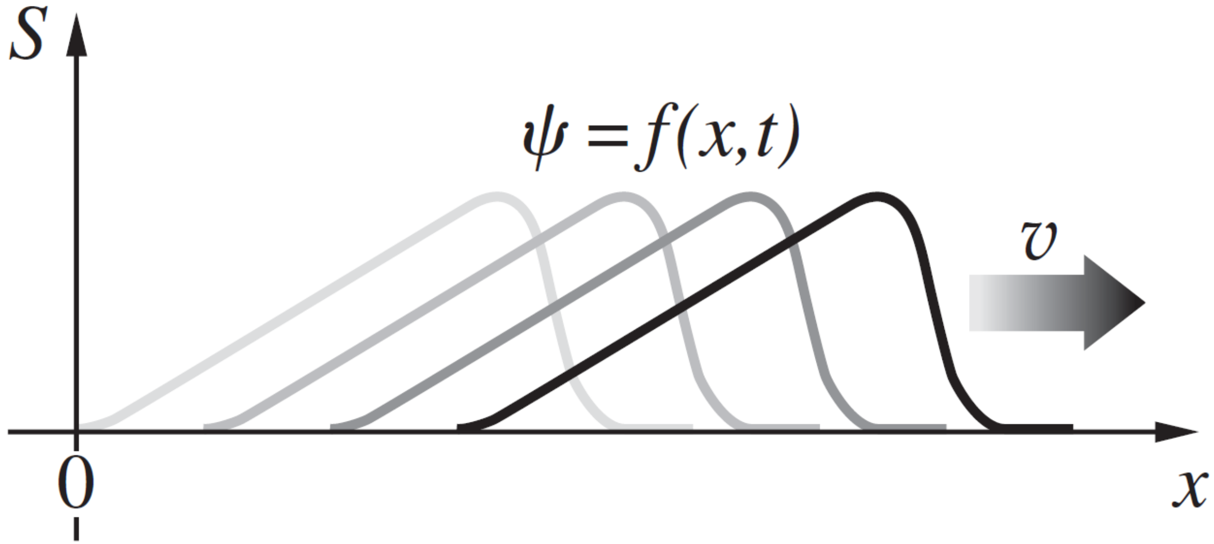
Prenant les dérivées secondes on obtient

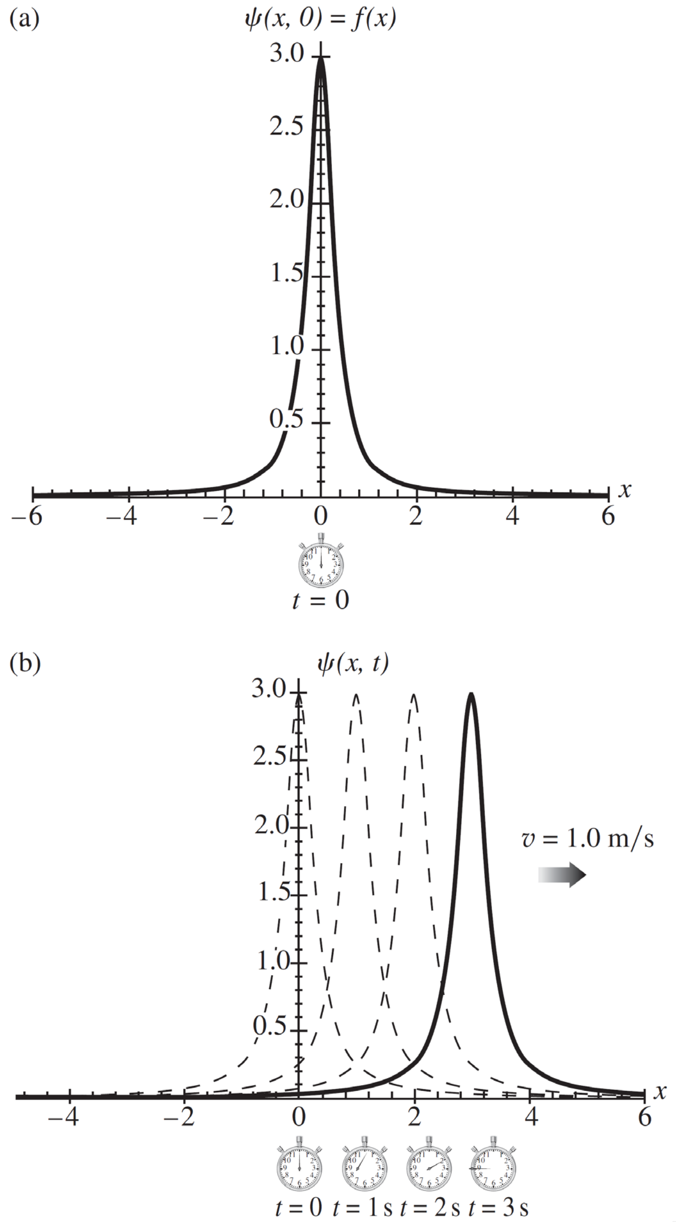
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial t} = v^2\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

Propagation de la perturbation sans déformation





L'équation différentielle d'onde tridimensionnelle

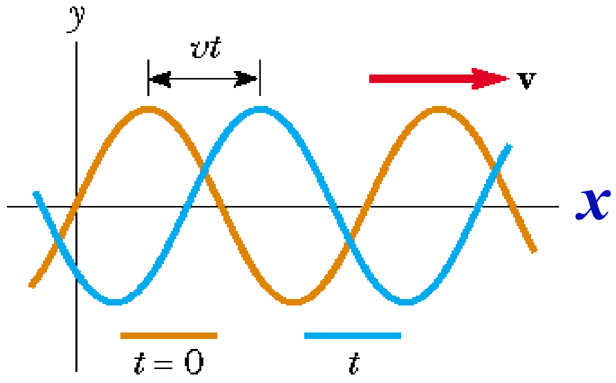
1D $$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}}$$

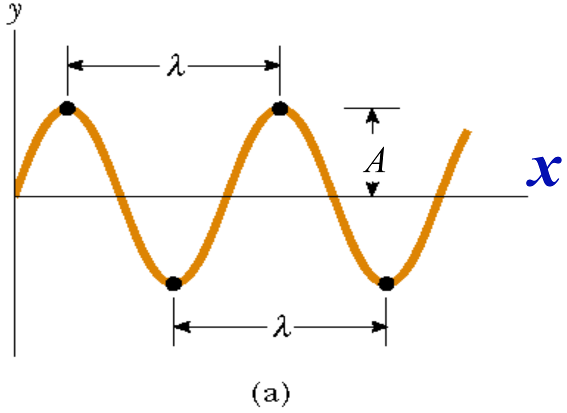
Equation de d'Alembert **unidimensionnelle** ou équation différentielle du mouvement ondulatoire **unidimensionnelle**

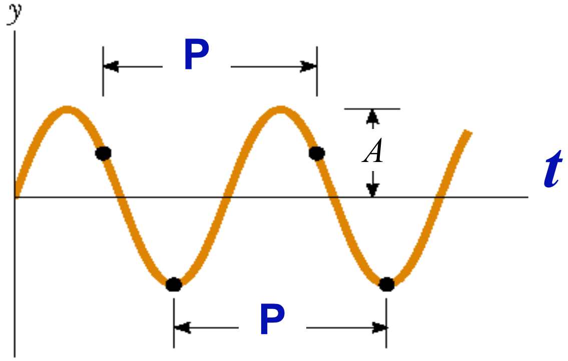
3D $$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) = v^2\nabla^2\psi}$$

Equation de d'Alembert **tridimensionnelle** ou équation différentielle du mouvement ondulatoire **tridimensionnelle**

Onde plane sinusoïdale avec propagation selon x







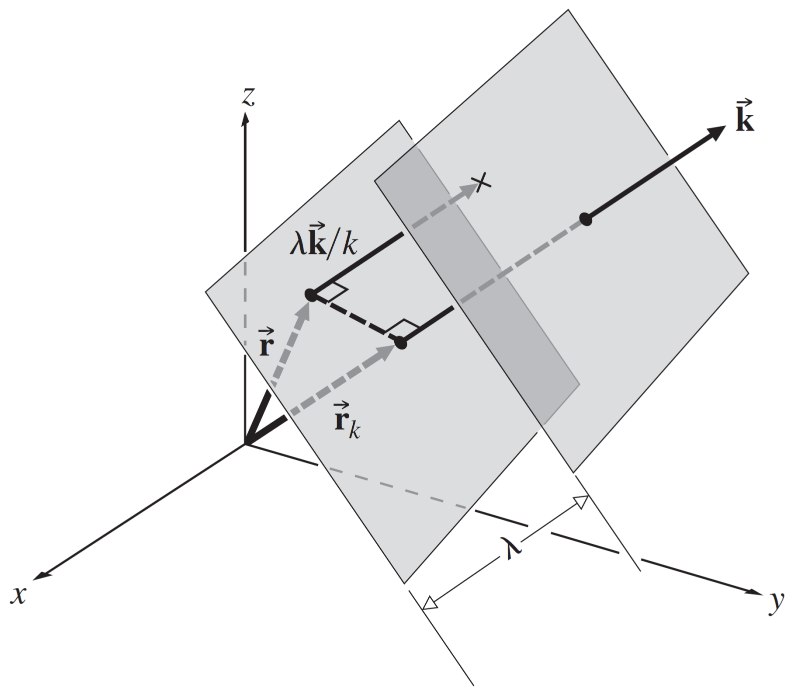
Onde sinusoïdale (formes équivalents):

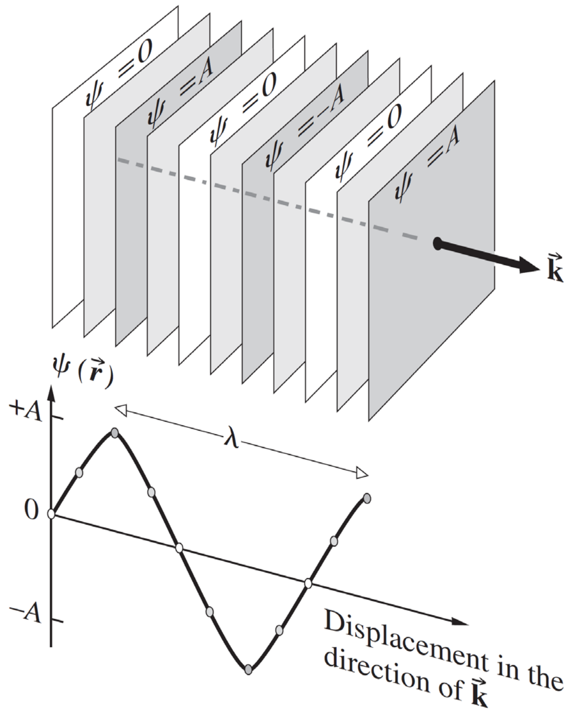
$$\psi(x,t) = A\sin[k(x \pm vt)] = A\sin(kx \pm \frac{2\pi}{\lambda}vt) = A\sin(\frac{2\pi}{\lambda}(x \pm vt)) = A\sin(kx \pm \omega t)$$

(forme plus usuelle)

λ	Longeur d'onde [m]
$k = \frac{2\pi}{\lambda}$	Nombre d'onde [m^{-1}]
$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{P} = \lambda f = \frac{\omega}{k}$	Vitesse de phase [m/s]
$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{\omega}{2\pi}$	Frequence [Hz]
$P = \frac{1}{f}$	Periode [s]

Ondes planes avec direction de propagation arbitraire





Onde sinusoïdale plane se propageant suivant l'axe $\hat{\mathbf{k}}$: $\psi(\mathbf{r},t) = A\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} \pm \omega t)$

Vecteur d'onde $\mathbf{k}$: $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{k}}$ $\quad k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = 2\pi/\lambda = \omega/v$

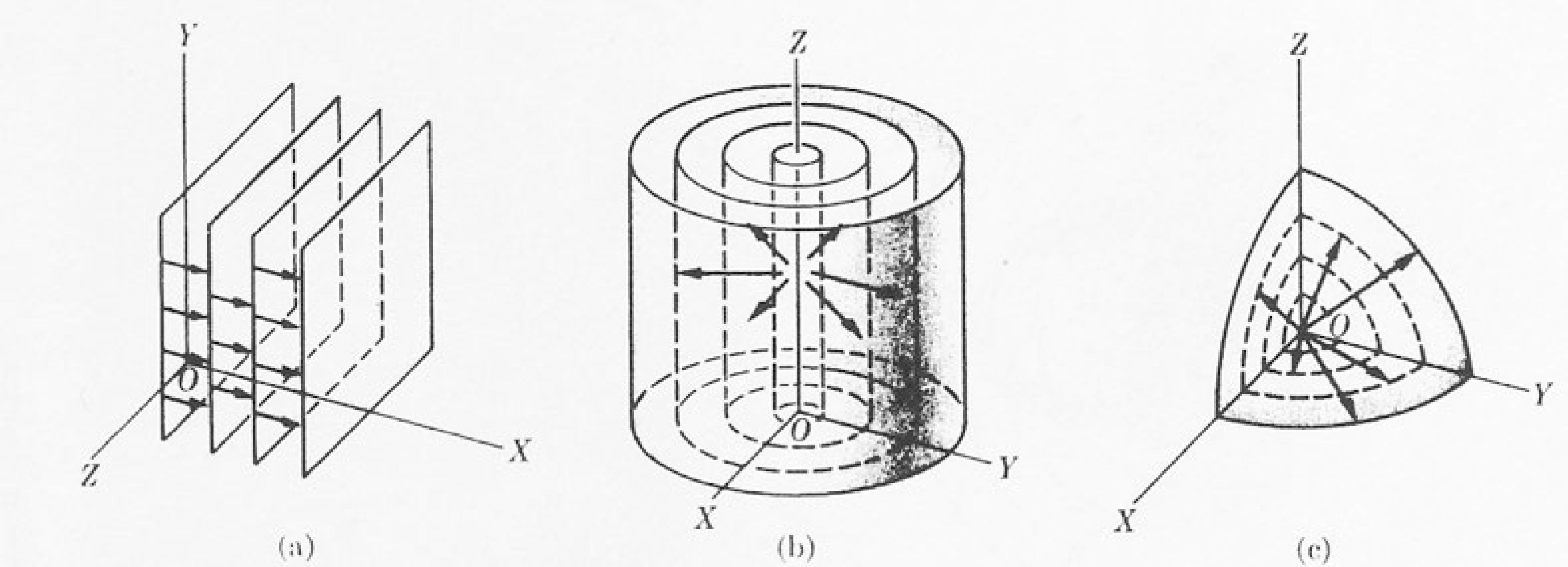
$\Rightarrow$

$\psi(\mathbf{r},t) = A\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} \pm \omega t) = A\sin(k_x x + k_y y + k_z z \pm \omega t)$ (forme complexe: $\psi(\mathbf{r},t) = Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} \pm \omega t)}$)

Ondes planes, cylindriques, et sphériques

Note: Toute onde tridimensionnelle peut être exprimée sous la forme d'une combinaison d'ondes planes

Surfaces d'onde (même phase)

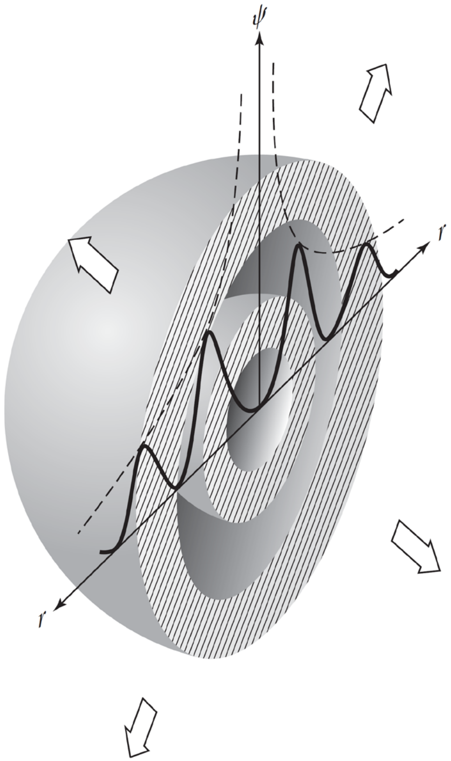


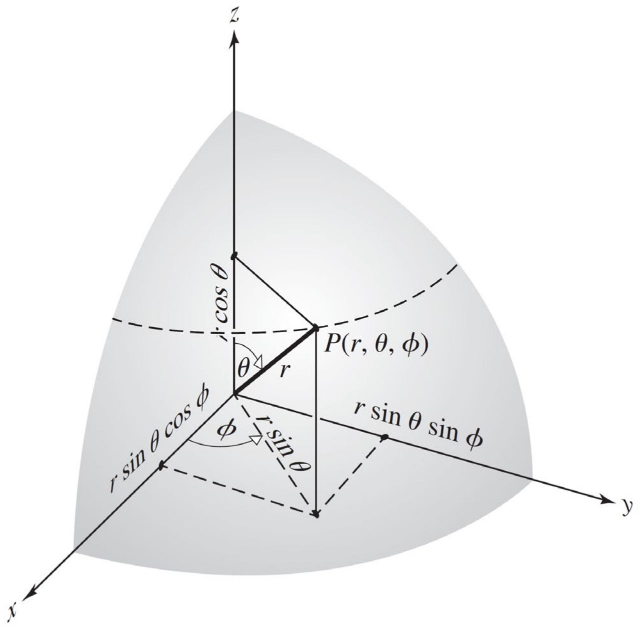
plane **cylindrique** **sphérique**

Les ondes cylindriques et sphériques sont aussi solutions de l'équation de d'Alembert:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) = v^2\nabla^2\psi$$

Source ponctuelle: onde sphérique

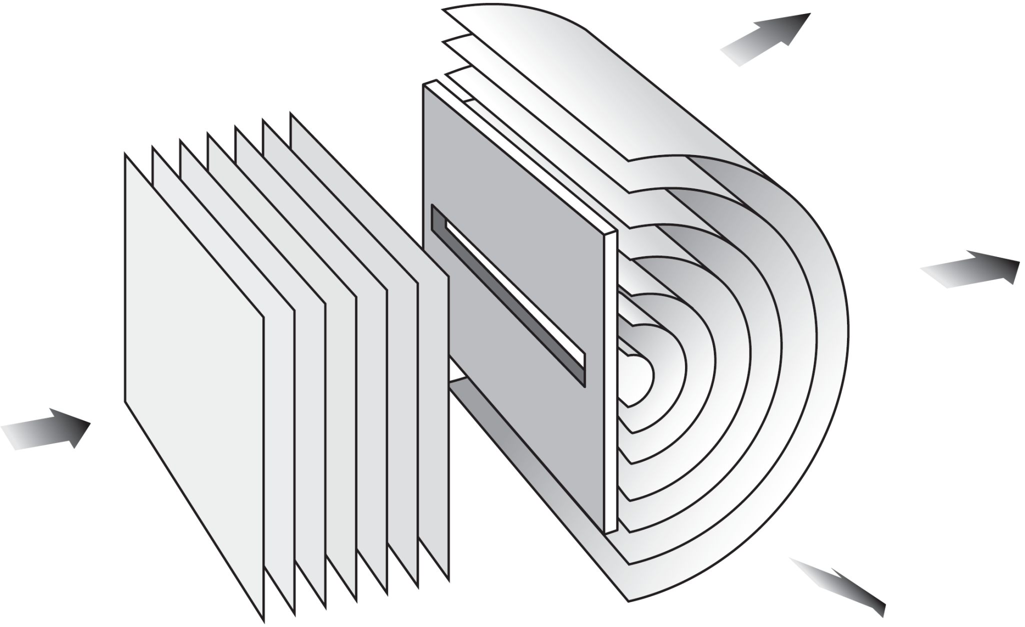


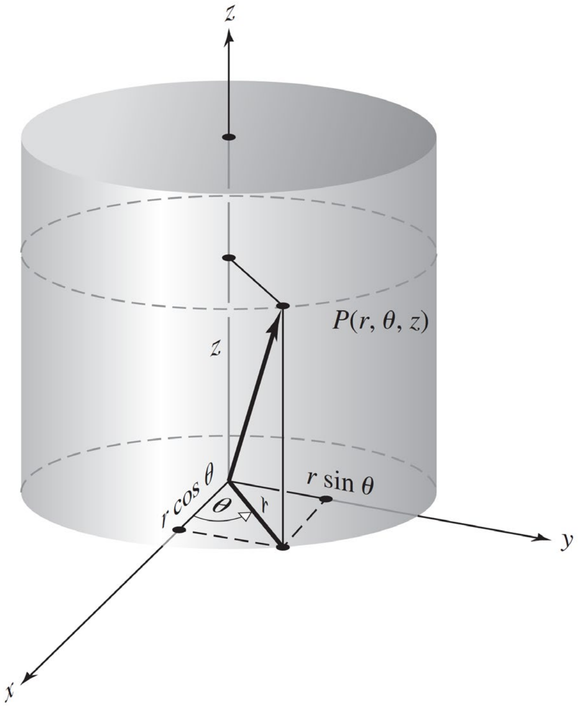


$$\psi(r,t) = \frac{A}{r}\cos(kr \pm \omega t) = \frac{A}{r}\cos\left(k\left(r \pm vt\right)\right)$$

En forme complexe: $\psi(r,t) = \dfrac{A}{r} e^{i(kr \pm \omega t)}$

Source très fine: onde cylindrique





$$\psi(r,t) = \frac{A}{\sqrt{r}} \cos(kr \pm \omega t) = \frac{A}{\sqrt{r}} \cos\left(k\left(r \pm vt\right)\right)$$

En forme complexe: $\psi(r,t) = \frac{A}{\sqrt{r}} e^{i(kr \pm \omega t)}$

Notes:

1) Intérêt de la forme complexe:

profiter de la facilité avec laquelle les exponentielles complexe peuvent être manipulées : addition/soustraction, multiplication/division par des quantités réelles, différentiation/intégration par des variables réelles.
Après être arrivé au résultat finale il faut prendre la partie réelle.

2) Principe de superposition:

Si ψ_1 et ψ_2 sont solutions de l'equation d'onde $\Rightarrow$
$(\psi_1 + \psi_2)$ est aussi solution de l'equation d'onde

3) Superposition sans "dommages permanents":

Lorsque deux ondes distinctes arrivent à la même place dans l'espace ils se chevauchent sans perturber l'une ou l'autre onde.
La perturbation résultante à chaque point dans la région de chevauchement est la somme algébrique des ondes. Une fois avoir passé à travers la région où les deux ondes coexistent, chacun va sortir et s'en aller sans être affecté par la rencontre.

Décomposition de Fourier d'une onde

Onde de forme "arbitraire" (paquet d'onde):

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} A(k)\,e^{i(kx\pm\omega t)}dk \qquad \text{avec:} \qquad A(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x,0)e^{-ikx}dk$$

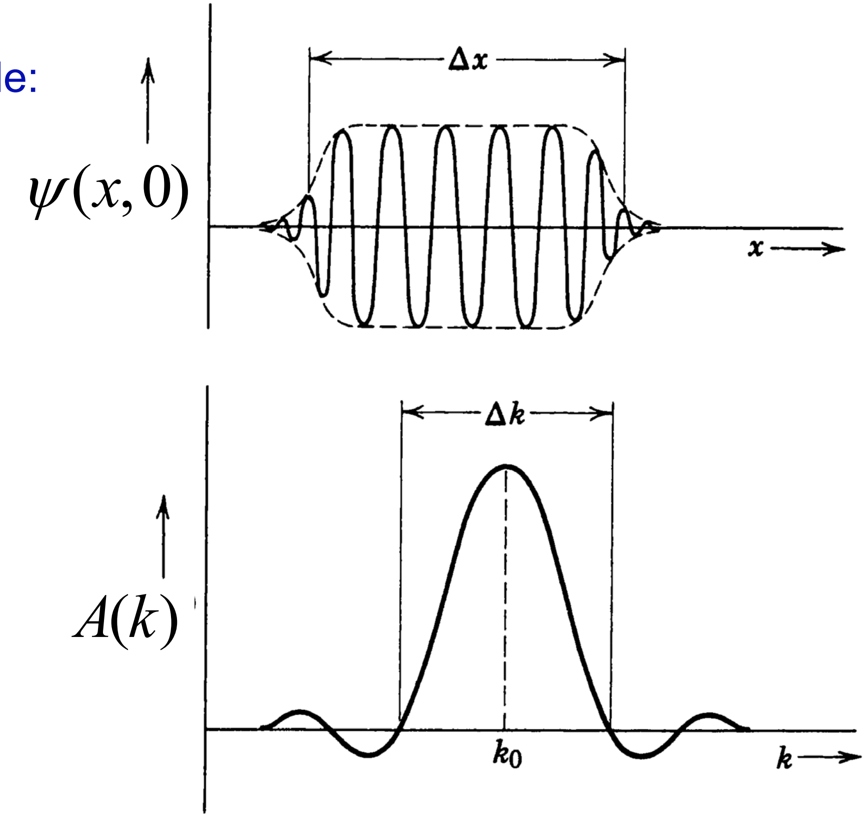
$k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$ Nombre d'onde [m^{-1}]

λ Longeur d'onde [m]

(somme infinie et "continue" d'ondes sinusoïdales)

(animation)

Exemple:



Une onde **non-périodique** est la **somme** d'ondes sinus et cosinus sur un **continuum** de valeurs de k et ω.

Onde de forme "arbitraire" mais "périodique" dans l'espace:

$$\psi(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-in(k_0 x\pm\omega t)} \qquad \text{avec:} \qquad A_n=\frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda/2}^{+\lambda/2}\psi(x,0)e^{-ink_0x}dx \qquad k_0=\frac{2\pi}{\lambda}$$

(somme infinie mais "discrète" d'ondes sinusoïdales)

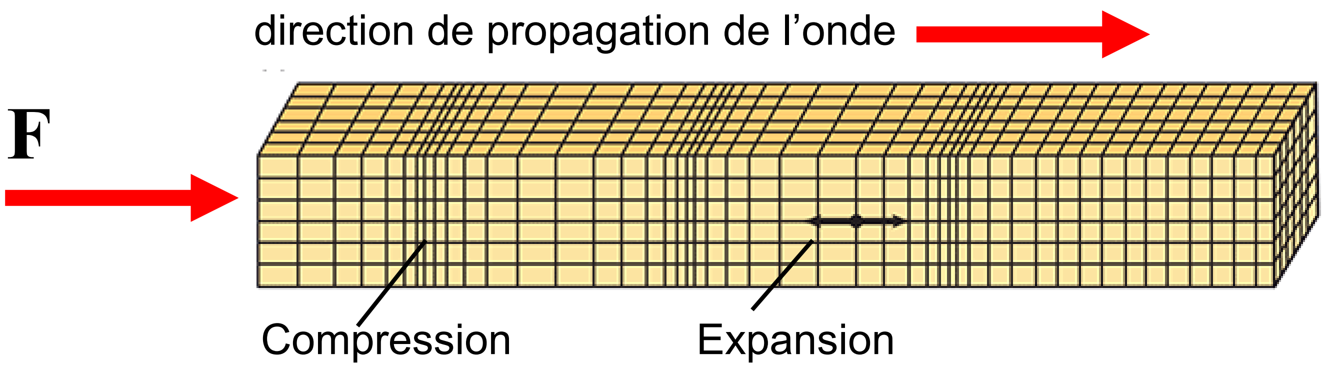
Une onde **périodique** peut s’exprimer comme une **somme discrète,** à priori infinie, d’ondes sinus et cosinus.

Exemple:

(animation)

Onde mécanique longitudinale dans un barreau solide

Déformation à l'extrémité du barreau solide (p.e. en le frappant avec un marteau).
Hypothèse: la déformation se propage le long du barreau (**onde longitudinale**)



$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \qquad \text{avec } v = \sqrt{Y/\rho}}$$

ξ : Déplacement ξ [m]

Y : Module d'élasticité de Young $\left[\mathrm{N/m^2 = Pa}\right]$

ρ : Densité $[\mathrm{kg/m^3}]$

v : Vitesse de l'onde [m/s]

Démonstration:

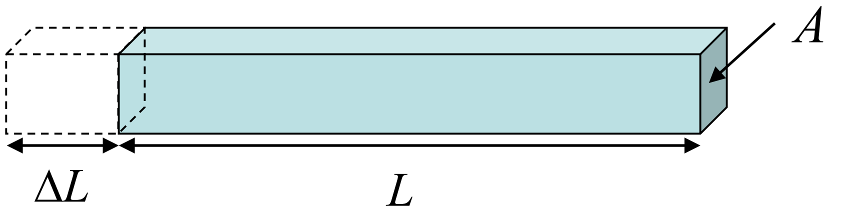
Quand une onde est excitée le long de la tige, chaque tranche fine se déplace de son emplacement d'origine. Aux même temps, chaque tranche est aussi déformée.

Contrainte σ sur une section du barreau A $\left[\text{N/m}^2\text{=Pa}\right]$: $\sigma \triangleq \dfrac{F}{A}$

Relation entre la contrainte σ (stress) et la deformation relatif ε (strain): $\varepsilon \triangleq \dfrac{\Delta L}{L} = \dfrac{\sigma}{Y}$

(Loi de Hooke, valide dans le limite élastique)

ε : déformation relatif [-] Y : Module d'élasticité de Young $\left[\text{N/m}^2 = \text{Pa}\right]$



Déplacement: ξ

Déformation relatif : $\varepsilon = \partial\xi / \partial x$

Contrainte: $\sigma = Y\varepsilon$

$\Rightarrow F = YA\varepsilon = YA\dfrac{\partial\xi}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial F}{\partial x} = YA\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$

A l'équilibre: F=const $\Rightarrow \xi(x) = \dfrac{F}{YA}x$

Hors équilibre: $F(x+\Delta x) - F(x) = \Delta m\, a = (\rho A \Delta x)\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$ et $F(x+\Delta x) - F(x) = \dfrac{\partial F}{\partial x}\Delta x$

$\Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial x} = \rho A \dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$ mais $\dfrac{\partial F}{\partial x} = YA\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$

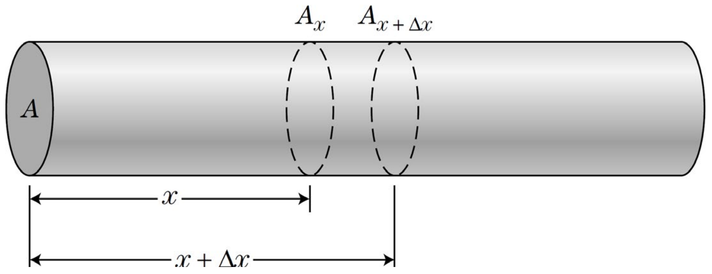
$\Rightarrow \dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \dfrac{\rho}{Y}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \quad \Rightarrow$

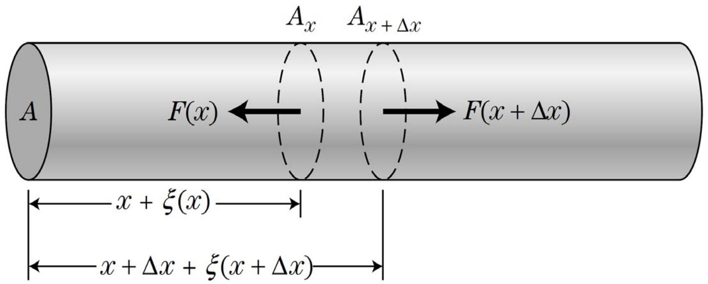
$\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \dfrac{\rho}{Y}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \Rightarrow \dfrac{\partial^3\xi}{\partial x^3} = \dfrac{\rho}{Y}\dfrac{\partial^3\xi}{\partial x \partial t^2}$ mais $F = YA\dfrac{\partial\xi}{\partial x} \Rightarrow$

$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \dfrac{\rho}{Y}\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2} \quad \Rightarrow$

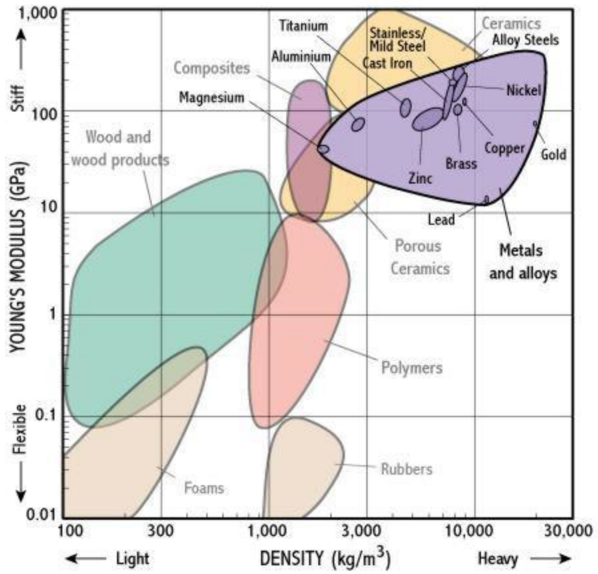
$$\boxed{\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \qquad \text{avec } v = \sqrt{Y/\rho} \qquad \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2}}$$

Equations d'ondes pour le **déplacement** et la **force**

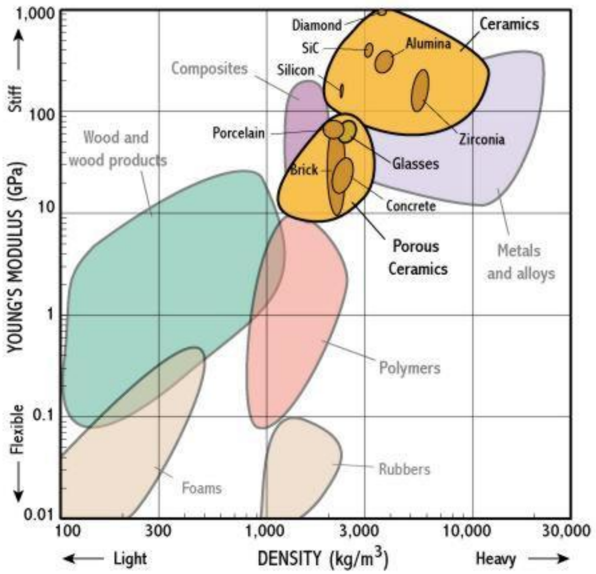




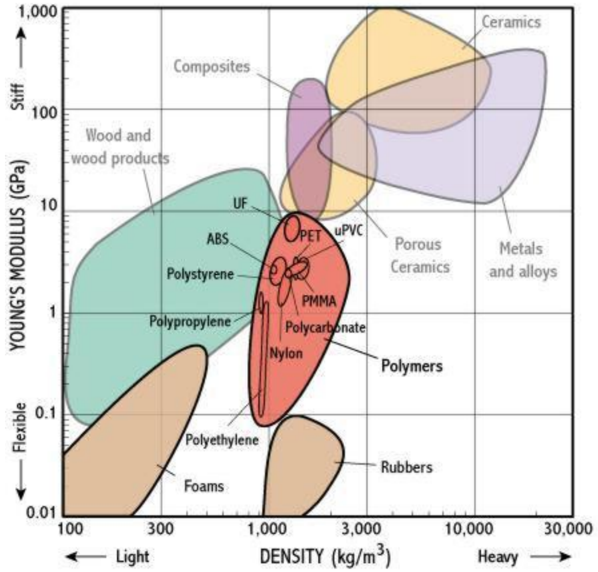
Metals and alloys



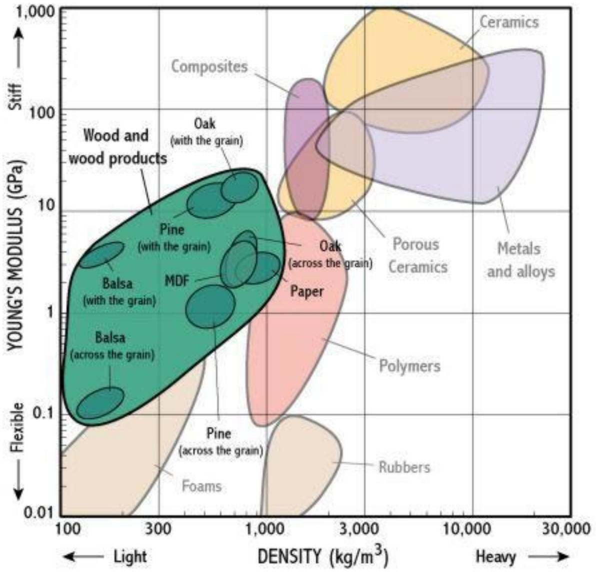
Ceramics



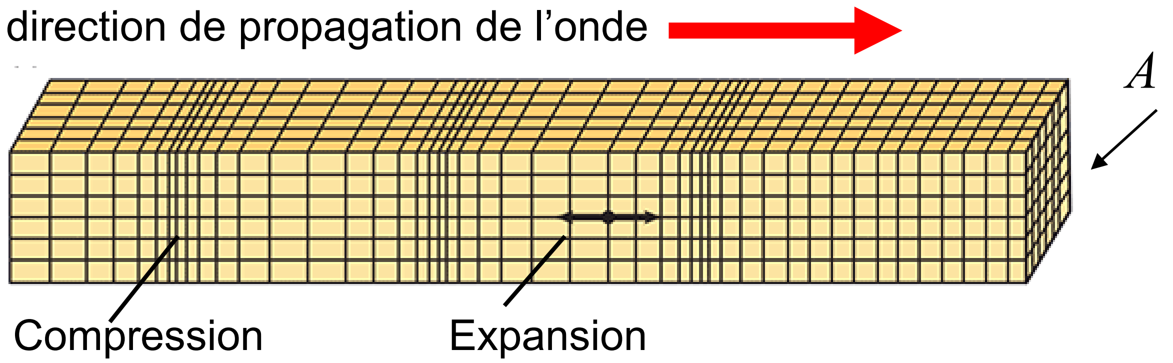
Polymers



Wood and wood products



Intensité et densitè d'énergie d'une onde mécanique
dans un barreau solide



$$\boxed{I \triangleq \frac{1}{A}\langle\frac{\partial W}{\partial t}\rangle = v\frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2 = v\langle u\rangle}$$

$$\boxed{\langle u\rangle = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2}$$

I : Intensité de l'onde [J/sm² = W/ m²]

$\langle u\rangle$: Densité d'énergie [J/m³]

ξ_0: Amplitude de l'onde [m]

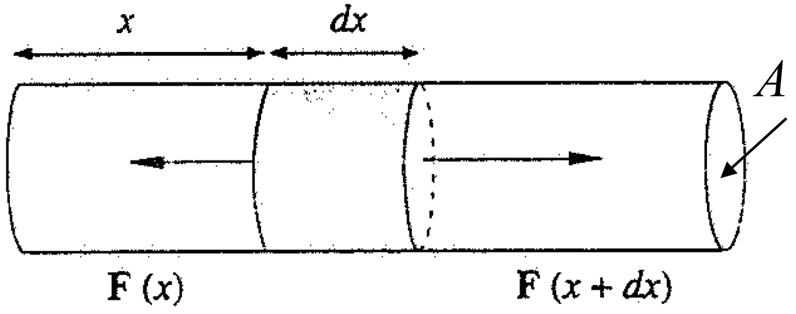
v : Vitesse de propagation de l'onde [m/s]

ω : Frequence de l'onde [rad/s]

ρ : Densité du barreau [kg/m³]

I= Intensité de l'onde =
= énergie transmise par unité de temps et surface =
= puissance transmise par unité de surface

Démonstration:



$$\frac{\partial W}{\partial t} = -F\,\frac{\partial \xi}{\partial t}$$ Puissance transmise (W: travail)

$$\xi(x,t)=\xi_0 \sin(kx-\omega t) \;\Rightarrow\; \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\omega \xi_0 \cos(kx-\omega t)$$

$$F = YA\frac{\partial \xi}{\partial x} = YAk\,\xi_0 \cos(kx-\omega t)$$

$$v=\sqrt{Y/\rho} \Rightarrow Y = \rho v^2$$
$$v=\omega/k \Rightarrow k=\omega/v$$

$$\Rightarrow \frac{\partial W}{\partial t} = YA\omega k \xi_0^2 \cos^2(kx-\omega t) = \rho v^2 A\frac{\omega^2}{v}\xi_0^2 \cos^2(kx-\omega t) = vA\rho\omega^2\xi_0^2\cos^2(kx-\omega t)$$

$$\Rightarrow \langle\frac{\partial W}{\partial t}\rangle = vA\rho\omega^2\xi_0^2\langle\cos^2(kx-\omega t)\rangle = vA\rho\omega^2\xi_0^2\,\frac{1}{2} = vA\langle u\rangle\;; \qquad \langle u\rangle \triangleq \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2$$

$$\Rightarrow I \triangleq \frac{1}{A}\langle\frac{\partial W}{\partial t}\rangle = v\langle u\rangle = v\frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2$$

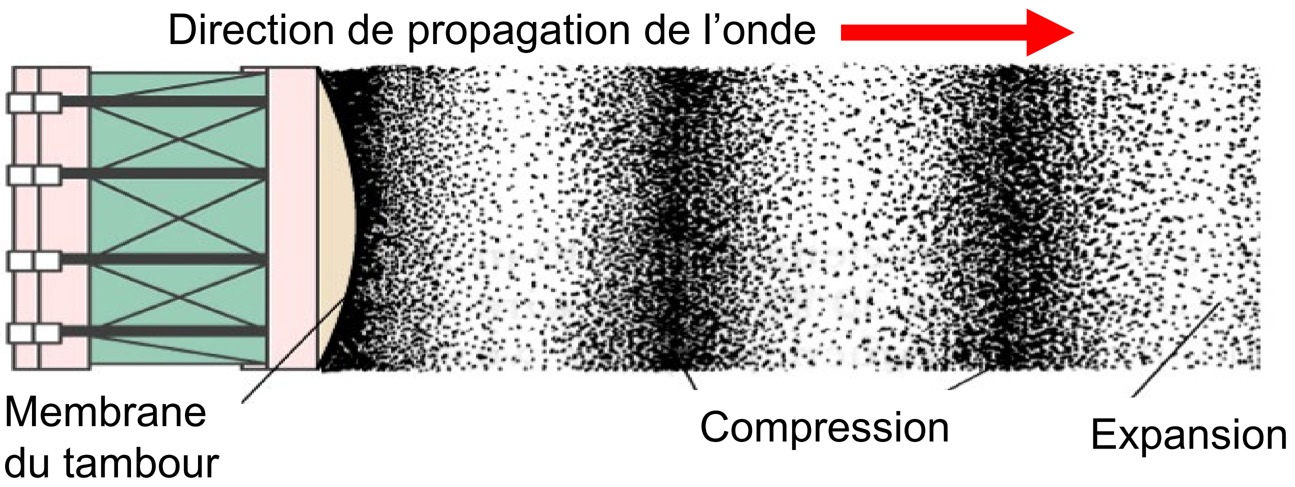
$$\langle\cos^2(kx-\omega t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(kx-\omega t)\,dt = \frac{1}{2}$$

Notes: 1. L'intensitè de l'onde est proportionelle au carré de l'amplitude de l'onde (i.e., $I \propto \xi_0^2$)

2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\omega^2}{k^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = v^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\Rightarrow$ la densité d'energie se propage également comme une onde.

Onde mécanique longitudinale dans une colonne de gaz

Déformation à l'extrémité de la colonne de gaz (p.e. produit par haut-parleur, tambour, …).
Hypothèse: la déformation se propage le long de la colonne (**onde longitudinale**)



$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \qquad \text{avec } v = \sqrt{\kappa / \rho_0}}$$

ξ : Déplacement ξ [m]

κ : Coefficient de compressibilité $\left[\mathrm{N/m^2{=}Pa}\right]$

ρ_0 : Densité [kg/m^3]

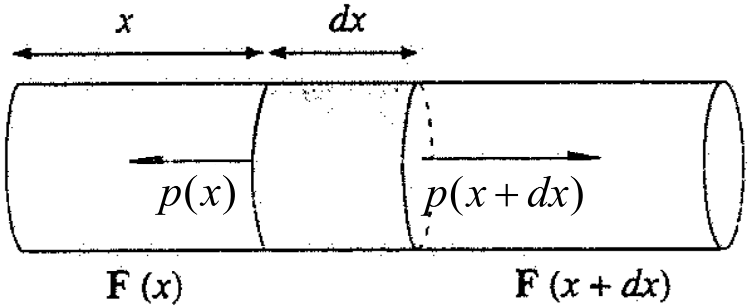
v : Vitesse de l'onde [m/s]

Démonstration:

Déplacement: ξ

Dilatation : $\partial\xi / \partial x$

Conservation de la masse: $\rho A(dx + d\xi) = \rho_0 A dx$



pour petit dilations (i.e., $\partial\xi / \partial x << 1$)

$$\rho A(dx + d\xi) = \rho_0 A dx \;\Rightarrow\; \rho = \frac{\rho_0}{(1 + \partial\xi/\partial x)} \cong \rho_0 (1 - \partial\xi / \partial x) \;\Rightarrow\; \rho - \rho_0 = -\rho_0 (\partial\xi / \partial x)$$

$$p = p(\rho) \cong p_0 + (\rho - \rho_0)(\frac{dp}{d\rho})_{\rho=\rho_0} = p_0 + \kappa \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = p_0 - \kappa \frac{\partial\xi}{\partial x}$$

avec $\kappa \triangleq \rho_0 (\frac{dp}{d\rho})_{\rho=\rho_0}$ coefficient de compressibilité

$$F(x+dx) - F(x) = A(p(x) - p(x+dx)) = -A\,dp$$

$$F(x+dx) - F(x) = dm\,a = (\rho_0 A dx)\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \;\Rightarrow\; \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow\; \frac{\partial p}{\partial x} = -\kappa \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = -\rho_0 \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{\kappa}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \;\Rightarrow\;$$

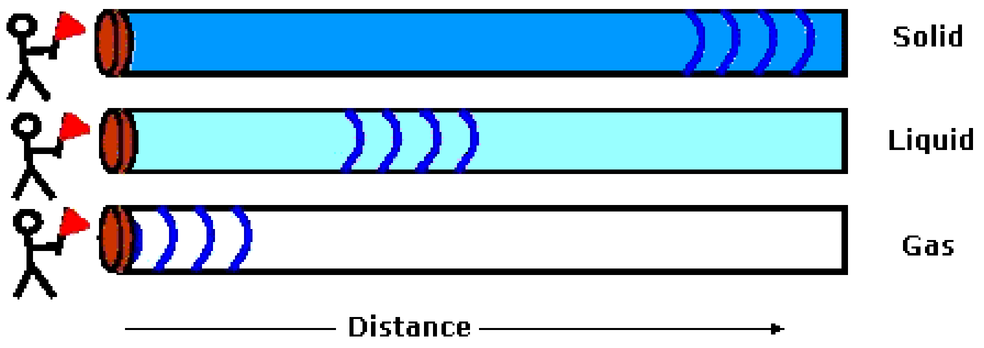
$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \qquad \text{avec } v = \sqrt{\kappa / \rho_0}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$$

Equations d'onde pour le **déplacement**, la **pression**, et la **densité**

Vitesse de propagation des ondes mécaniques dans différents milieux



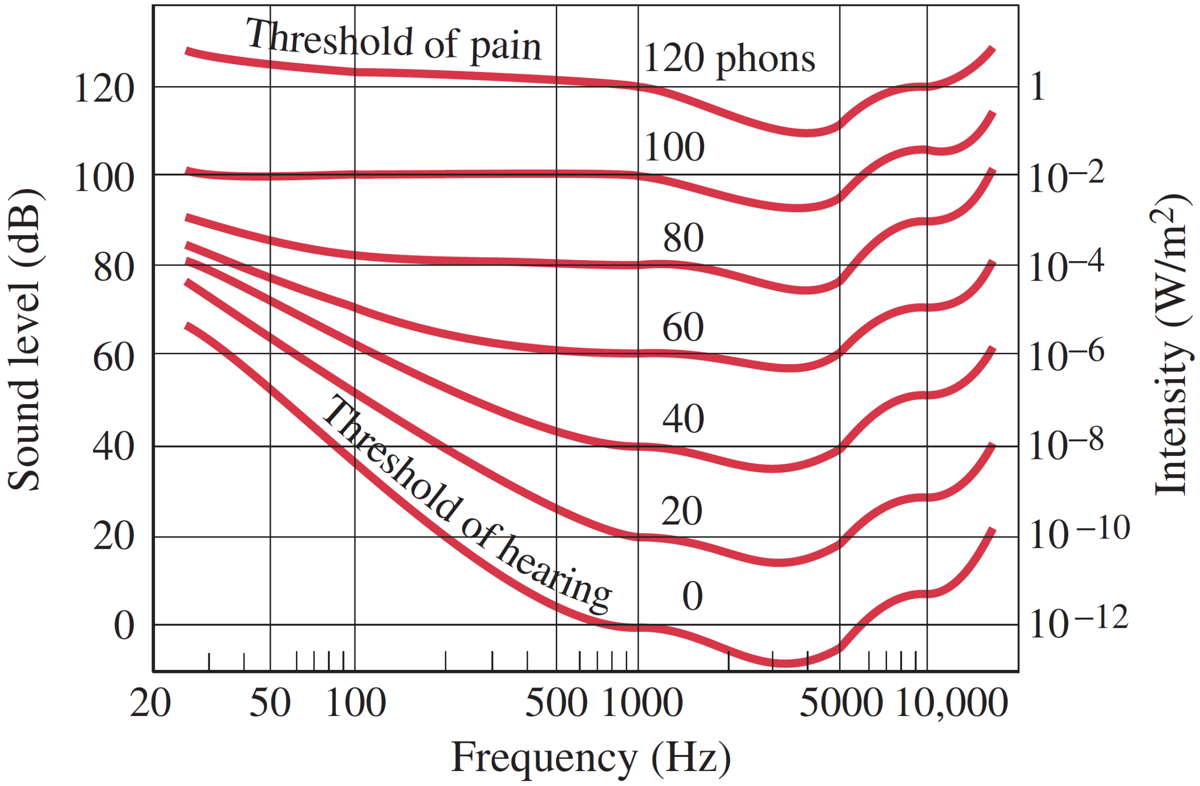
$$v = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_0}} = \sqrt{(\frac{dp}{d\rho})_{\rho=\rho_0}} \quad \text{(gas)}$$

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad \text{(solide)}$$

Substance	Temp (°C)	Speed (m/s)
Gases		
Carbon Dioxide	0	259
Oxygen	0	316
Air	0	331
Air	20	343
Helium	0	965
Liquids		
Chloroform	20	1004
Ethanol	20	1162
Mercury	20	1450
Water	20	1482
Solids		
Lead	–	1960
Copper	–	5010
Glass	–	5640
Steel	–	5960

Material	Density (g/cm)	Speed (m/s)
Copper	8.90	6420
Steel	7.86	5940
Beryllium	1.93	12890
Aluminium	2.58	6420
Water	1.00	1496
Ethanol	0.79	1207
Air	0.00139	331.45
Helium	0.000178	965
Fat	0.95	1450
Muscle	1.07	1580
Skull bone	1.91	4080

Sensibilité de l'oreille humaine aux ondes sonores



Seuil de douleur (1000 Hz):

120 dB $\quad P_d = 20$ Pa $\quad I_d = 1$ W/m^2

Seuil d'audibilité (1000 Hz):

0 dB $\quad P_0 = 20\times10^{-6}$ Pa $\quad I_0 = 10^{-12}$ W/m^2

1 Pa=1 N/m^2

$I\,[\text{dB}] = 10 \log (I / I_0) = 20 \log(P / P_0)$

Notes:

1. Les ondes "mécaniques" dont la fréquence se situe dans la zone audible par l'oreille humaine (environ 20 Hz à 20 kHz) sont appelées ondes sonores. L'oreille possède un petit trou qui relie l'intérieur à l'extérieur, de sorte que la différence de pression sur les côtés de la membrane tend vers zéro pour les changements de pression lents (< 20 Hz).

2. La pression atmosphérique P_{atm} et ses variations ΔP_{atm} sont beaucoup plus grande que le seuil de douleur P_d @1 kHz

$P_{atm} \cong 1\times10^5$ Pa $\qquad \Delta P_{atm} \cong 1\times10^4$ Pa $\qquad P_d \cong 20$ Pa @1 kHz

Heureusement, les variations de pression atmosphérique sont, typiquement, à des fréquences tres basses (<< 20 Hz).

3. Amplitude du déplacement des molecules d'air sous l'effet d'une onde sonore plane sinusoidale avec frequence 1 kHz et intensité de 0 dB (seuil d'audibilité) et 60 dB.

$\rho \cong 1$ kg/m³

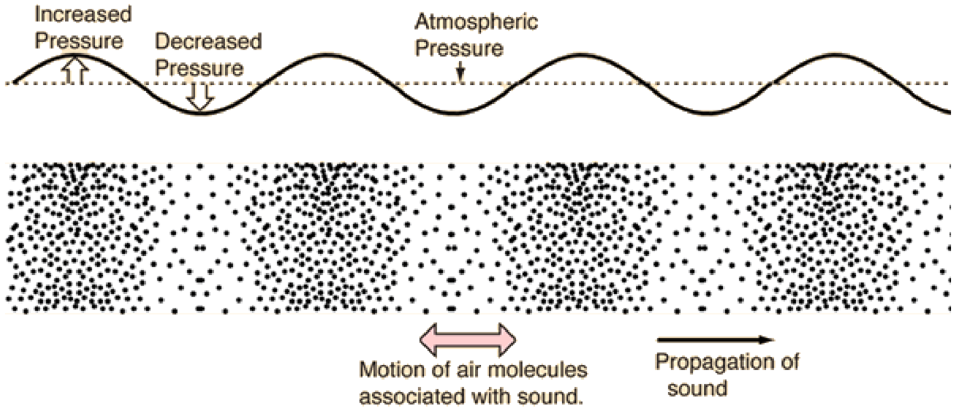
$I[\mathrm{dB}] = 60 \text{ dB} \Rightarrow I = I_0 10^{\frac{I[\mathrm{dB}]}{10}} = 10^{-6} \text{ W/m}^2$

$I[\mathrm{dB}] = 0 \text{ dB} \Rightarrow I = I_0 10^{\frac{I[\mathrm{dB}]}{10}} = 10^{-12} \text{ W/m}^2$

$I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$

$v \cong 340$ m/s

$\omega = 2\pi f \cong 18850$ rad/s

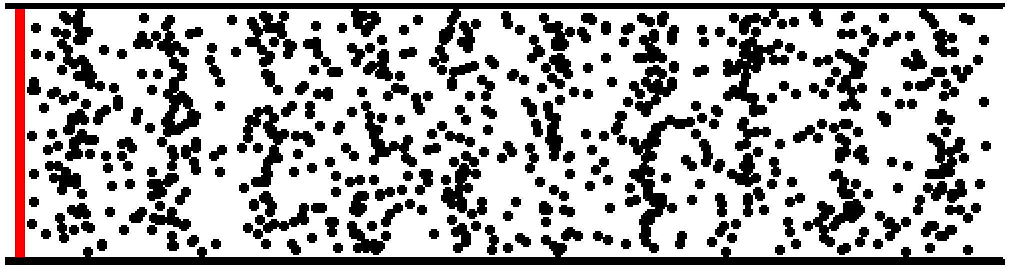


$\Rightarrow \qquad I = v\frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2 \Rightarrow \xi_0 = \sqrt{\frac{2I}{v\rho\omega^2}}$

deplacement:

$\xi_0 = \sqrt{\frac{2I}{v\rho\omega^2}} \cong 1.3$ nm   pour 60 dB

$\xi_0 = \sqrt{\frac{2I}{v\rho\omega^2}} \cong 0.0013$ nm = 1.3 pm (!!!) pour 0 dB



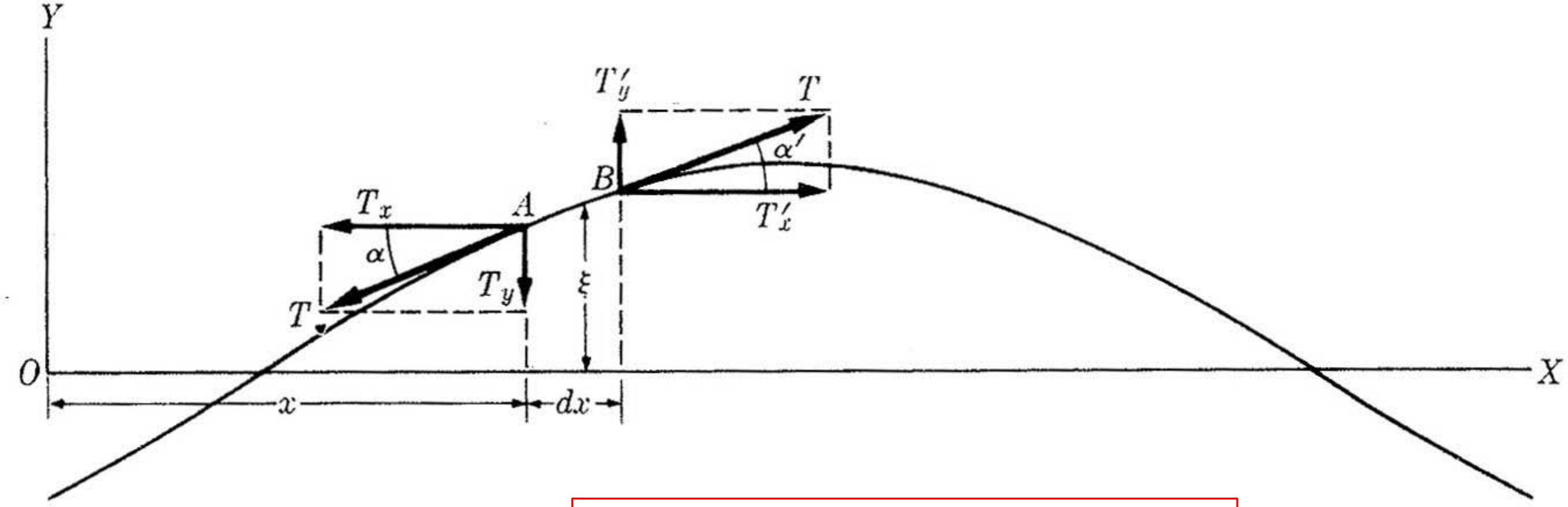
Note: A la seuil d'audibilité, le déplacement de chaque molécule est inférieur à la taille de la molécule elle-même ! L'oreille humaine est impressionnant. Et les chauves-souris et les chiens sont encore mieux.

longueur d'onde:

$\lambda = \frac{v}{f} = 0.34$ m

La longueur d'onde est relativement grand (68 m à 5 Hz, 17 mm à 20 kHz)

Ondes transversale sur une corde



$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \text{avec } v = \sqrt{T/\rho}}$$

ξ : Déplacement (transversale) ξ [m]

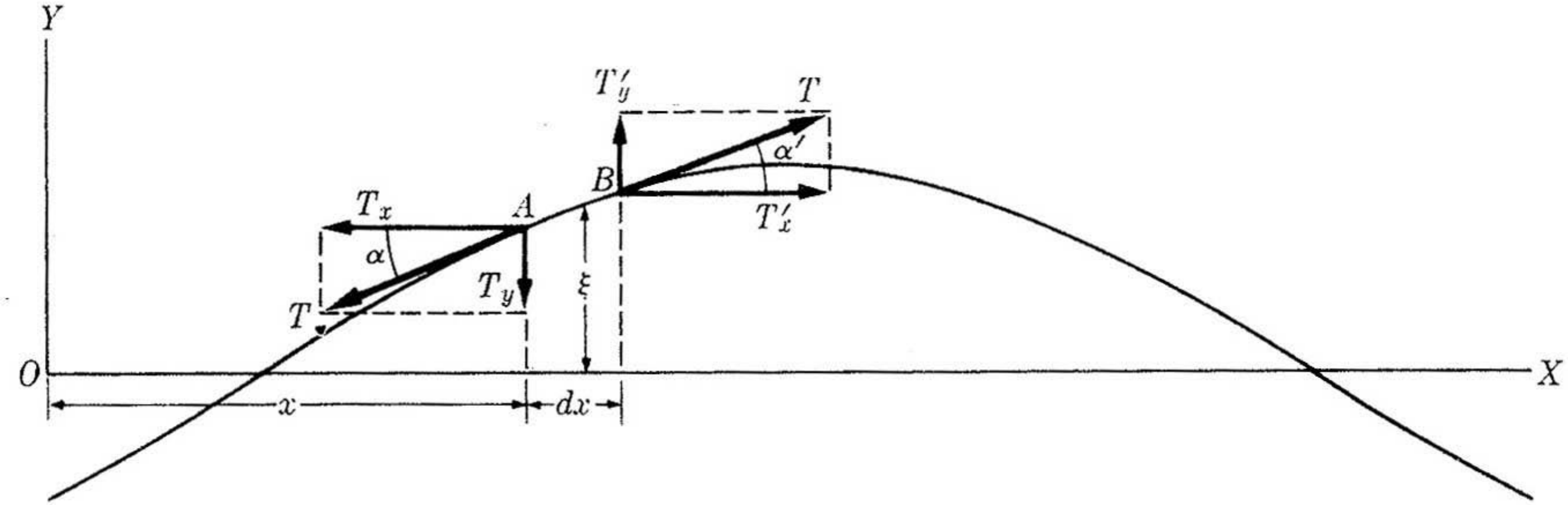
T : Tension [N]

ρ : Densitè par unitè de longeur [kg/m]

v : Vitesse de l'onde [m/s]

Note: Vitesse transversale: $v_y(x) \triangleq \left.\frac{d\xi}{dt}\right|_x \neq v = \sqrt{T/\rho}$

La vitesse de propagation de l'onde v **n'est pas** la vitesse transversale v_y des éléments de la corde!



Demonstration:

Deplacement transversale: ξ

$$\alpha \cong \alpha' \cong 0$$

$$F_y = T'_y - T_y = T(\sin\alpha' - \sin\alpha) \cong Td(\sin\alpha) \cong Td(\tan\alpha) = T\frac{d}{dx}(\tan\alpha)dx$$

$$\text{mais } \tan\alpha = \frac{\partial\xi}{\partial x} \Rightarrow F_y = T\frac{\partial}{\partial x}(\tan\alpha)dx = T\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)dx = T\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}dx$$

$$F_y = T\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}dx = dm\,a = (\rho dx)\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \quad \text{avec } v = \sqrt{T/\rho}$$

«Take away message» sur les ondes mécaniques

Nous avons examiné 3 systèmes physiques différents:
onde longitudinale dans barreau solide
onde longitudinale dans une colonne de gaz
onde transversal dans une corde solide

Dans les 3 cas:

1) la perturbation se propage sous la forme d'une onde.

2) les atomes et le molécules du milieu à travers lequel l'onde se propage restent atour de leurs position d'équilibre. Ce n'est donc pas la matière qui se propage mais l'*état de mouvement* de la matière que se propage.

3) la vitesse de l'onde est déterminée par l'élasticité du milieu et par sa densité.

Effet Doppler pour les onde mécaniques

Effet Doppler (en général):
Si la source d'une onde et/ou l'observateur sont en mouvement relatifs par rapport au milieu dans lequel l'onde se propage, la **fréquence des ondes observée** par l'observateur est différente de la **fréquence des ondes émis par la source**.

Onde méchanique : la vitesse de l'onde par rapport à la source (S) et à l'observateur (O) n'est pas forcement la même

Example simple: Observateur et source se déplacent suivant une même droite (effet Doppler longitudinal)

Vitesse de l'onde par rapport au milieu : v

Vitesse de l'observateur par rapport au milieu: v_O

Vitesse de la source par rapport au milieu: v_S

Vitesse de l'onde par rapport à la source: $v - v_S$

Vitesse de l'onde par rapport à l'observateur: $v - v_O$

Freq. des ondes produit par la source: f

Freq. des ondes enregistrée par l'observateur: f'

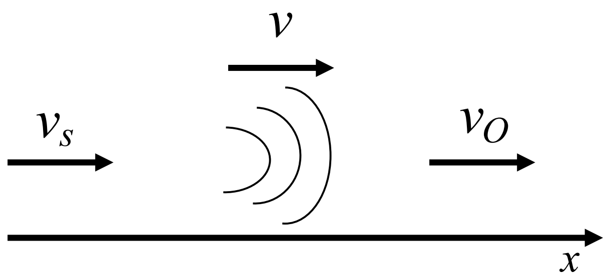
$$\boxed{f' = f\frac{(v - v_O)}{(v - v_S)}}$$

Note: Méfiez-vous des signes dans $f' = f\,\dfrac{(v - v_O)}{(v - v_S)}$

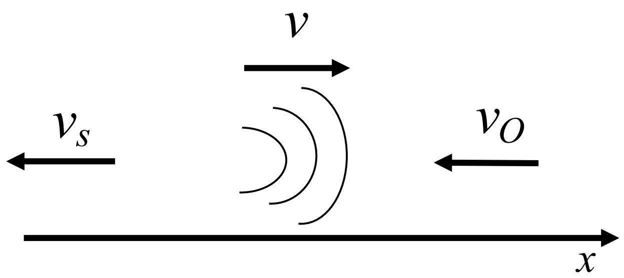
Exprimez les signes des trois vitesses par rapport à la même direction

(pour la vitesse du son, le signe est celui de l'onde vers l'observateur)

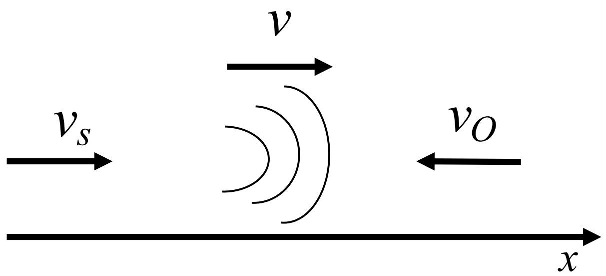
Examples:



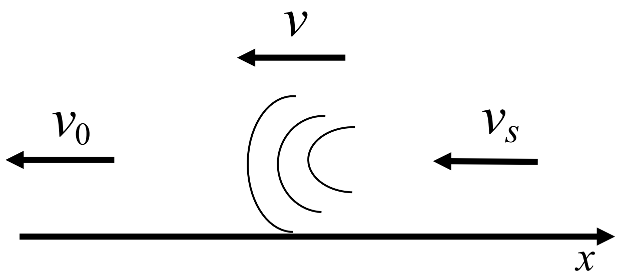
$$f' = f\,\frac{(v - v_O)}{(v - v_S)}$$



$$f' = f\,\frac{(v + v_O)}{(v + v_S)}$$

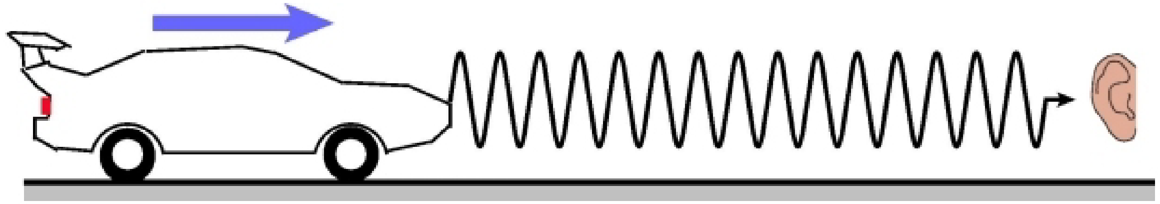


$$f' = f\,\frac{(v + v_O)}{(v - v_S)}$$

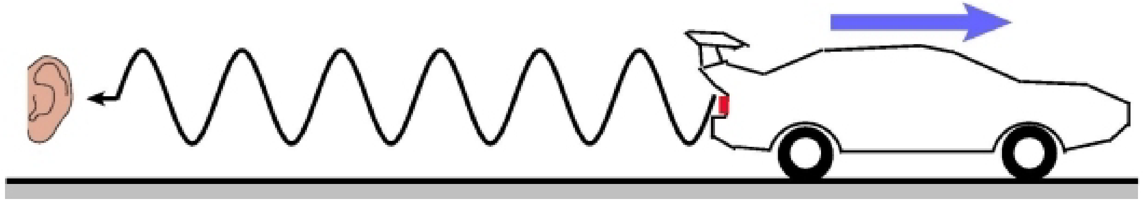


$$f' = f\,\frac{(-v + v_O)}{(-v + v_S)}$$

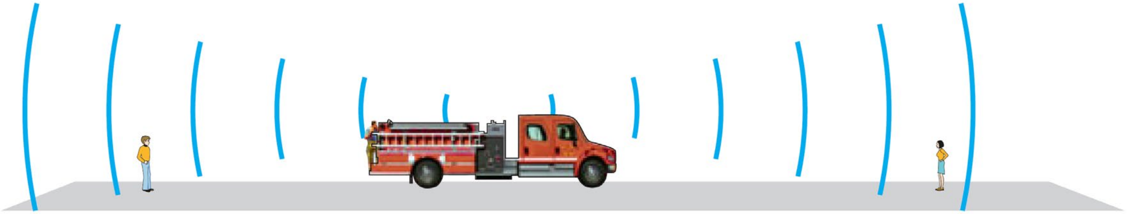
Effet Doppler pour les onde mécaniques: exemples



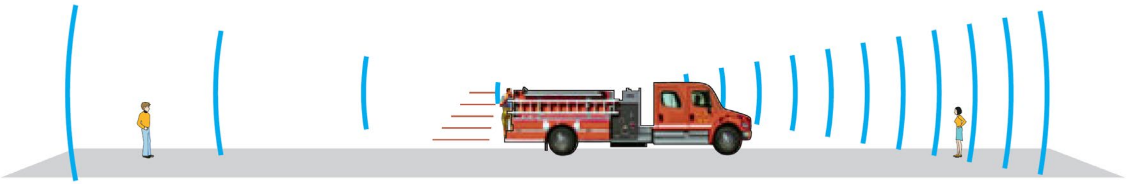
Le véhicule se rapproche : le son est perçu plus aigu



Le véhicule s'éloigne : le son est perçu plus grave



(a) At rest



(b) Fire truck moving

Effet Doppler pour les ondes mécaniques: onde de choc

$$f' = f\frac{(v - v_O)}{(v - v_S)} \quad \Rightarrow$$

$$\text{Pour } v_S = v \quad \Rightarrow \quad f' = \infty \text{ !!}$$

Vitesse de l'onde par rapport au milieu : v

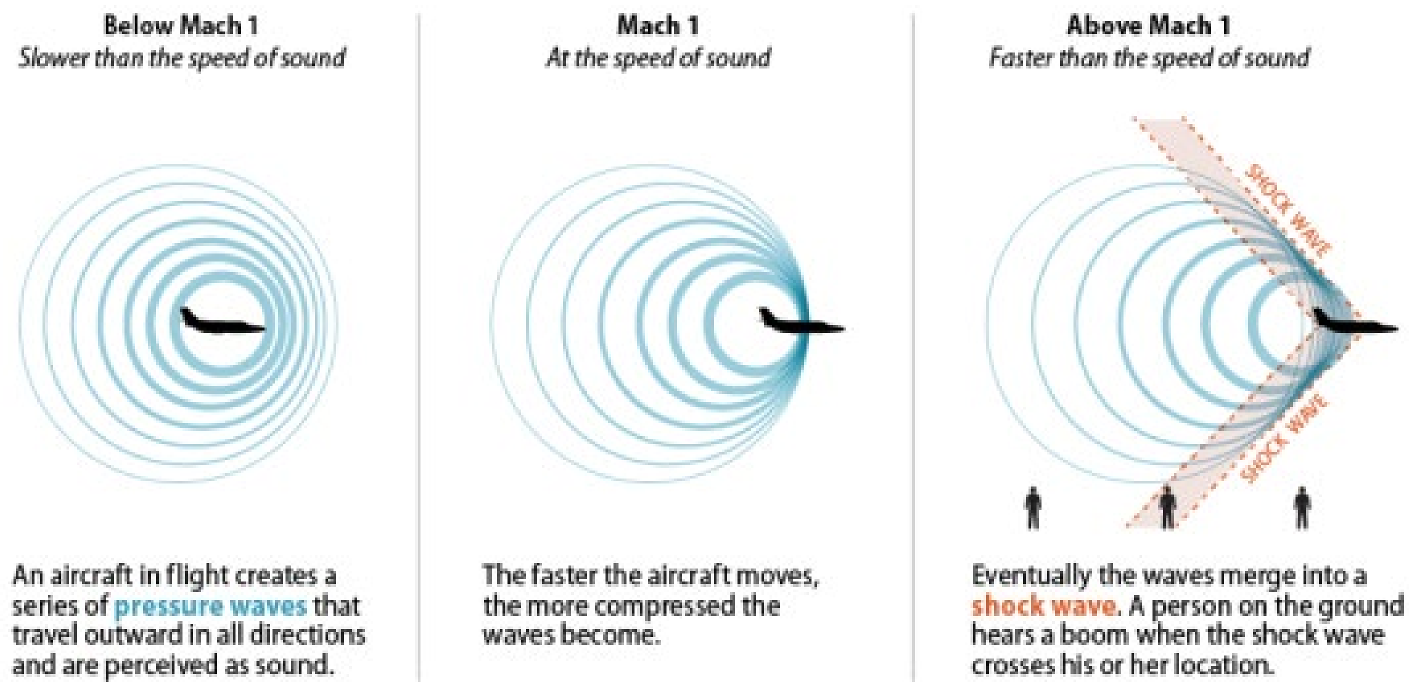
Vitesse de la source par rapport au milieu: v_S

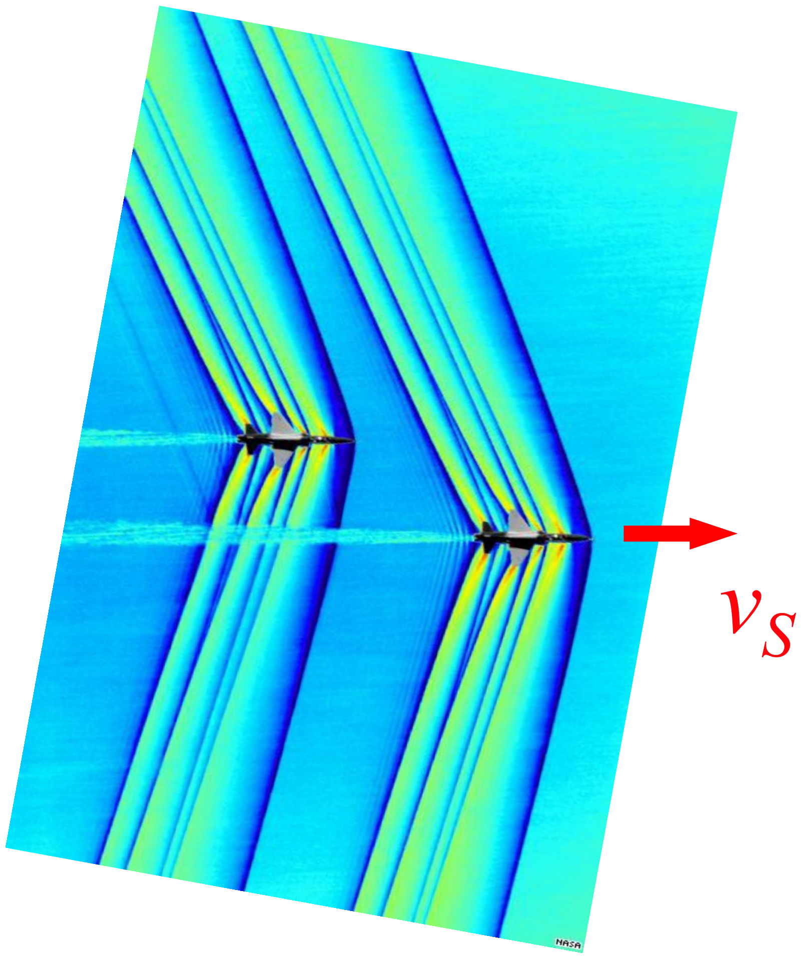
Vitesse de l'observateur par rapport au milieu: v_O

Fréquence des ondes produites par la source: f

Fréquence des ondes enregistrées par l'observateur: f'

L'onde de choc est le lieu de modifications brutales de la vitesse, de la pression et de la température.





Effet Doppler pour les ondes électromagnétiques

Effet Doppler (en général):
Si la source d'une onde et/ou l'observateur sont en mouvement relatifs par rapport au milieu dans lequel l'onde se propage, la **fréquence des ondes observée** par l'observateur est différente de la **fréquence des ondes émis par la source**.

Onde électromagnétique : la vitesse de l'onde par rapport à la source (S) et à l'observateur (O) est la même: c

Example simple: Observateur et source se déplacent suivant une même droite (effet Doppler longitudinal)

Vitesse de l'onde par rapport au "milieu" : c

Vitesse de l'observateur par rapport au "milieu": v_O

Vitesse de la source par rapport au "milieu": v_S

Vitesse de l'onde par rapport à la source : c

Vitesse de l'onde par rapport à l'observateur : c

Freq. des ondes produits par la source: f

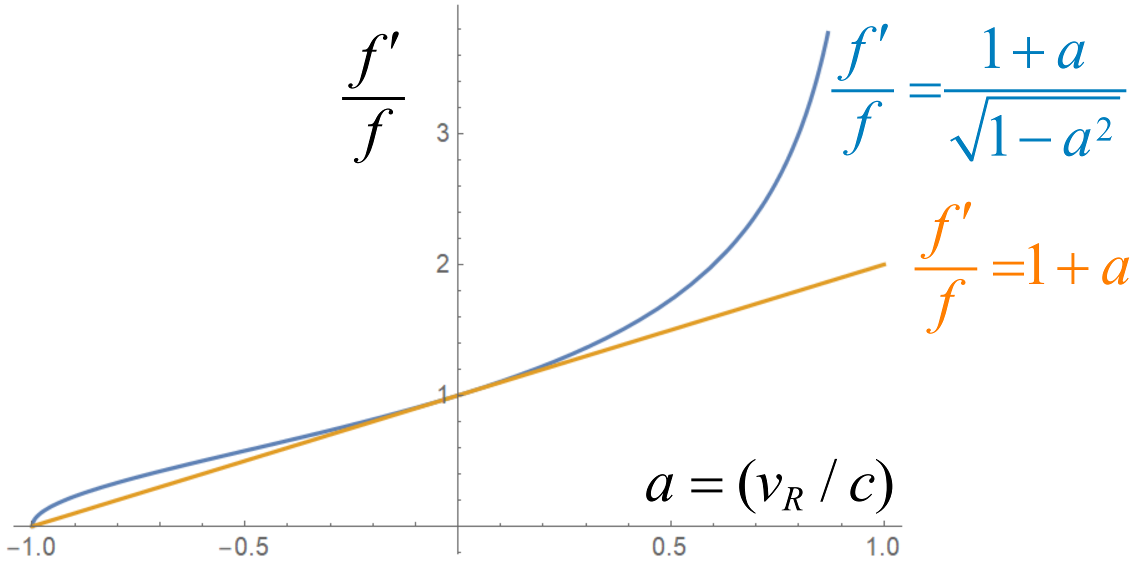
Freq. des ondes enregistrées par l'observateur: f'

$$\boxed{f' = f\frac{1+(v_R / c)}{\sqrt{1-\left(v_R^2 / c^2\right)}}}$$

$$v_R = (v_S - v_O) \text{ (vitesse relative S-O)}$$

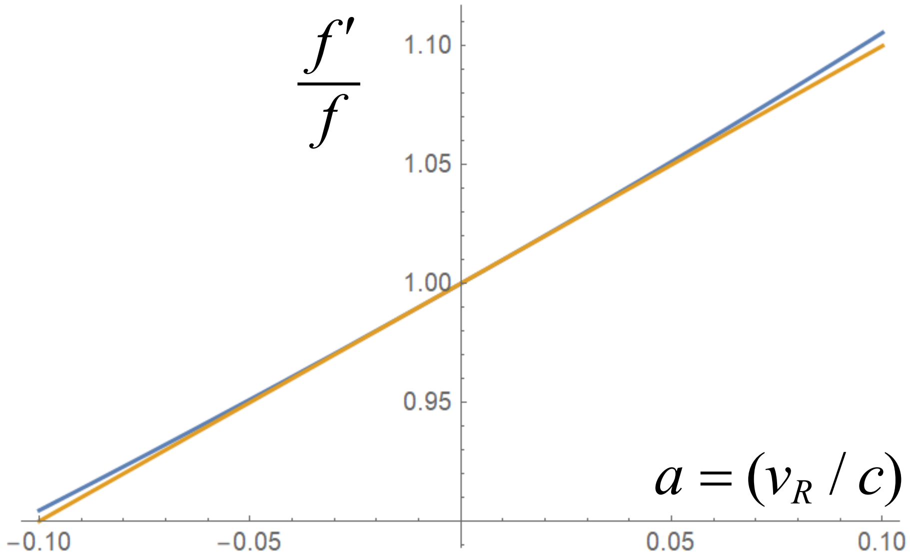
Exprimez les signes des trois vitesses par rapport à la même direction
(pour la vitesse de la lumiere c, le signe est celui de l'onde vers l'observateur)

$$f' = f\frac{1+(v_R/c)}{\sqrt{1-\left(v_R^2/c^2\right)}}$$



for $|v_R/c| << 1$:

$$f' \cong f\ (1+(v_R/c))$$



Effet Doppler pour les onde EM: La loi de Hubble

Hubble découvrit cette loi en observant un **décalage vers le rouge** des lignes d'émission (e.g., de l'hydrogène) dans les galaxies.

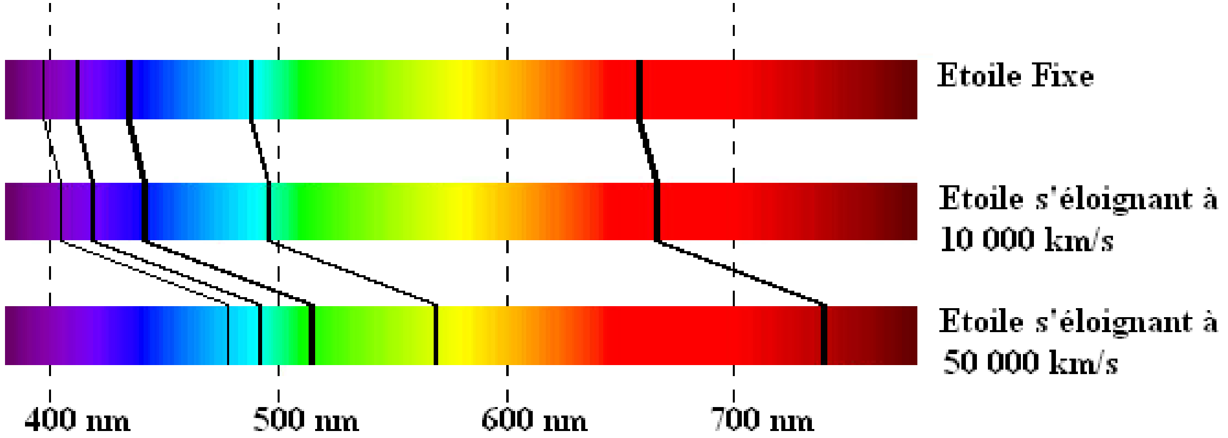
$$f' = f\frac{1+v_R/c}{\sqrt{1-v_R^2/c^2}}\;;$$

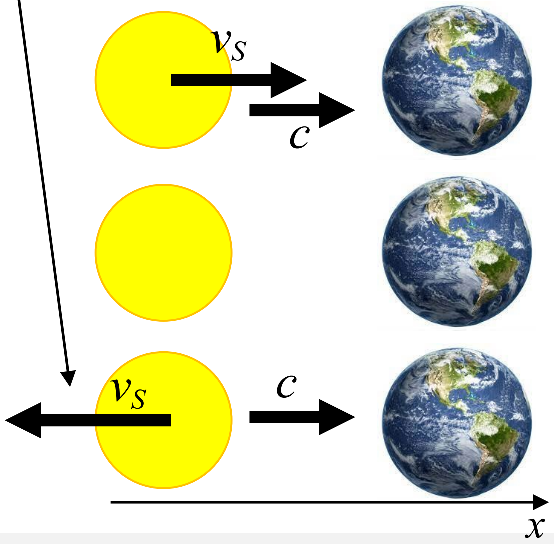
$$c>0 \;\text{ et } v_R = (v_S - v_O) = v_S < 0$$

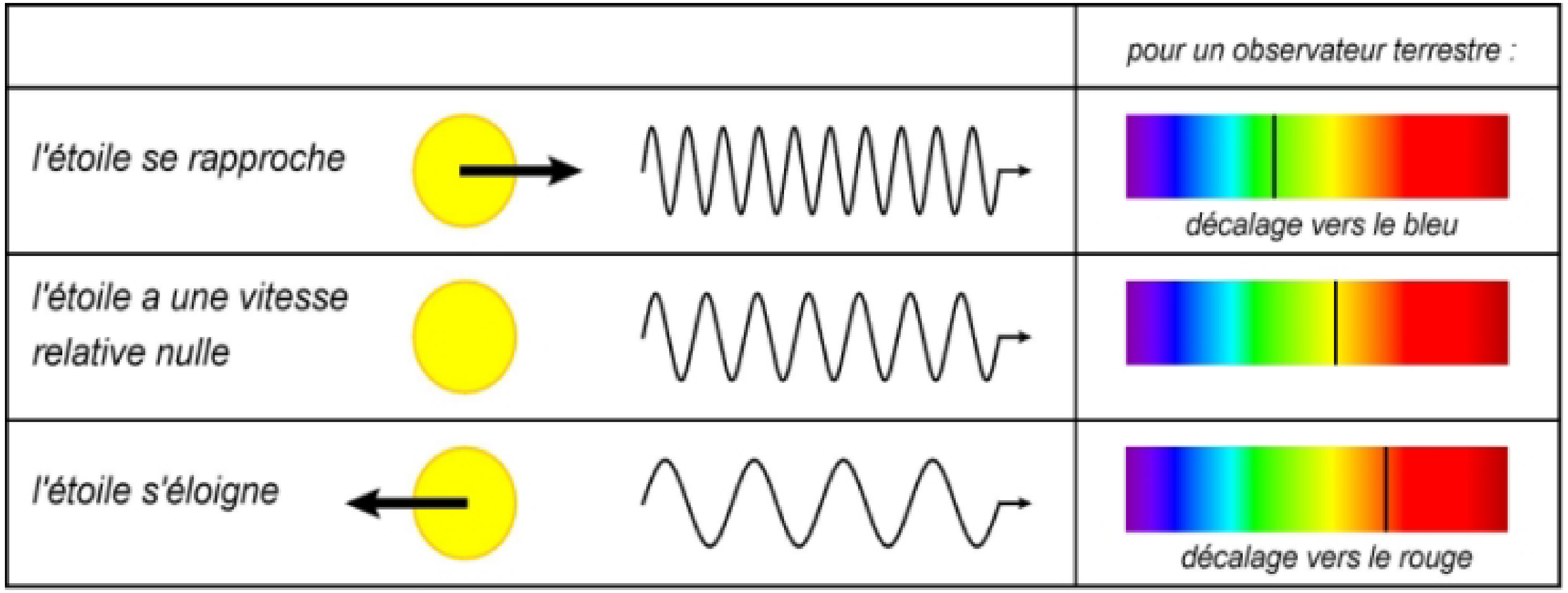
$$\Rightarrow 1 + v_R/c < 1$$

$$\Rightarrow f' < f$$

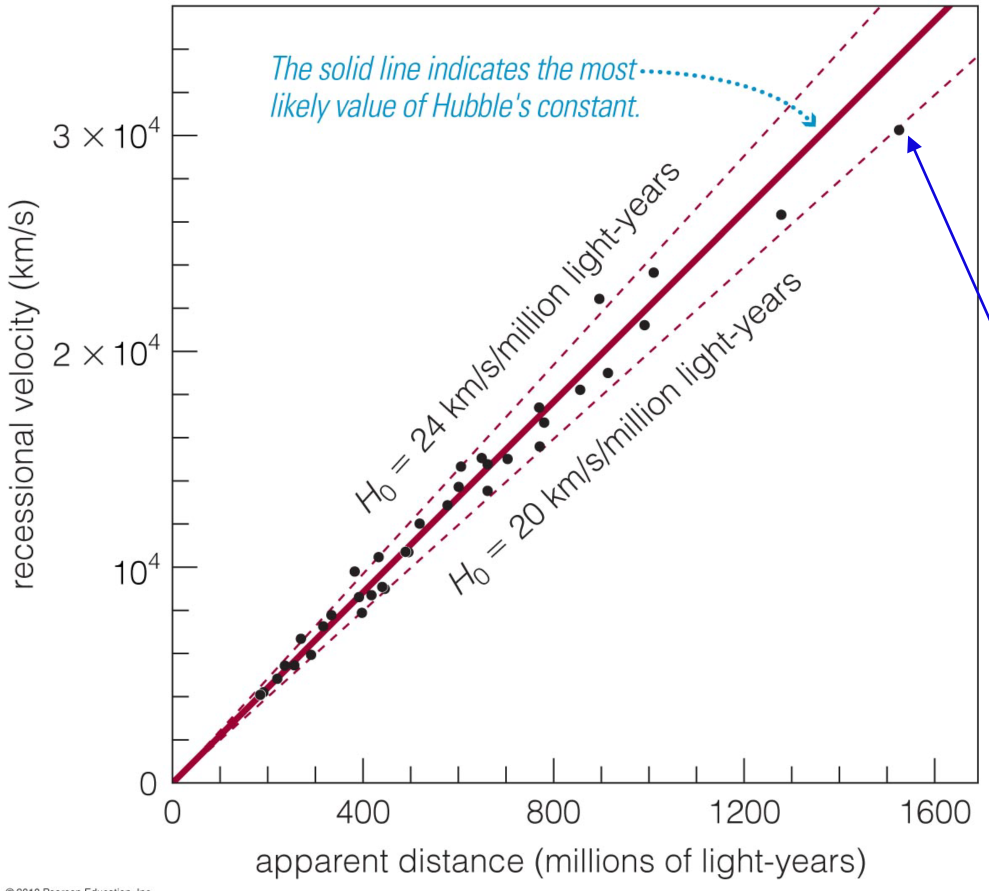
$$\Rightarrow \lambda' > \lambda \quad \text{(décalage vers le rouge)}$$







Loi de Hubble: les galaxies s'éloignent les unes des autres à une vitesse approx. proportionnelle à leur distance *d*.



$$v_R \cong H_0 d \qquad \text{avec: } d = \text{distance}$$

$$H_0 \cong 70 \ \frac{\text{km}}{\text{s}} \frac{1}{\text{Mpc}}$$

$$1 \text{ Mpc} = 3.26 \text{ années-lumière}$$

Age de l'Univers: 14×10^9 ans

Dim. de l'Univers obs.: 93×10^9 années-lumière (8.8×10^{26} m)

Distance Terre-Soleil: 8 minutes-lumière (150×10^9 m)

Note: les galaxies les plus loin voyagent a une vitesse de 1/10 de la vitesse de la lumière !!

$$c \cong 3 \times 10^8 \text{ m/s} \cong 3 \times 10^5 \text{ km/s}$$

Effet Doppler pour les onde EM avec réflexion sur la cible: Radar

Dans ce cas il y a **deux** «décalages» en fréquence :

- l'onde incidente sur la voiture en mouvement est «décalée» en fréquence.
- l'onde réfléchi par la voiture en mouvement est «décalée» en fréquence.

$$v_{voiture} \ll c, \quad v_R = v_{voiture}$$

$$\boxed{f' \cong f(1 + \frac{2v_{voiture}}{c})}$$