

# II. ELECTROMAGNETISME

Physique Générale III-IV, L. Villard, CRPP-EPFL.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction et résumé</b>	<b>4</b>
1.1	Petite histoire . . . . .	4
1.2	Toute l'électrodynamique en quelques lignes . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Electrostatique</b>	<b>7</b>
2.1	Charge électrique, densité de charge, loi de Coulomb . . . . .	7
2.2	Champ électrique, principe de superposition, loi de Gauss . . . . .	8
2.3	Circulation du champ électrique. Potentiel électrostatique . . . . .	11
2.4	Applications . . . . .	14
2.5	Dipôle électrique . . . . .	14
2.6	Polarisation de la matière, vecteur déplacement . . . . .	17
2.7	Energie électrostatique . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Magnétostatique</b>	<b>24</b>
3.1	Courant électrique, densité de courant . . . . .	24
3.2	Champ magnétique, loi d'Ampère, loi de Gauss . . . . .	25
3.3	Biot-Savart. Potentiel vecteur . . . . .	28
3.4	Applications . . . . .	29

3.5	Dipôle magnétique . . . . .	33
3.6	Magnétisme dans la matière . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Induction</b>	<b>42</b>
4.1	Champs EM dépendants du temps . . . . .	42
4.2	Force électro-motrice et flux magnétique . . . . .	43
4.3	Inductance . . . . .	44
4.4	Energie et quantité de mouvement EM . . . . .	49
4.5	Conducteurs en mouvement et loi de l'induction . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Equations de Maxwell</b>	<b>58</b>
5.1	Compatibilité avec la conservation de la charge . . . . .	59
5.2	Courant de déplacement . . . . .	60
5.2.1	Exemple 1 : champ $\vec{B}$ créé par un condensateur en chargement . . . . .	61
5.2.2	Exemple 2 : champ $\vec{B}$ créé par une charge variant au cours du temps . . . . .	62
5.2.3	Exemple 3 : champ $\vec{B}$ créé par un courant dans un fil de longueur finie . . . . .	63
5.3	Ondes EM . . . . .	65
5.3.1	Ondes EM dans le vide . . . . .	65
5.3.2	Ondes EM dans la matière . . . . .	67
5.4	Compatibilité avec la conservation de l'énergie . . . . .	68
5.4.1	Equation de continuité pour l'énergie . . . . .	68

5.4.2	Densité et flux d'énergie d'une onde EM dans le vide . . . . .	69
5.4.3	Quantité de mouvement et moment cinétique EM . . . . .	70
5.5	Rayonnement d'ondes EM . . . . .	71
5.5.1	Champ EM créé par une particule en mouvement . . . . .	71
5.5.2	Flux d'énergie et puissance EM émises par la charge accélérée . . .	74
5.5.3	Antenne émettrice : exemple . . . . .	76
5.5.4	Transmission d'ondes EM dans un câble coaxial . . . . .	77
5.5.5	Modélisation du câble coaxial comme une suite de capacités et d'auto-inductances . . . . .	78
<b>A</b>	<b>Compléments</b>	<b>81</b>
A.1	Champ magnétique dipolaire, Eq.(75), démonstration . . . . .	81

# 1 Introduction et résumé

## 1.1 Petite histoire

Du temps de l'Antiquité (Grèce), on ne connaissait que 3 phénomènes qui, on le sait maintenant, sont attribuables à des phénomènes électromagnétiques (**dans ce cours : abrégé EM**).

1. L'ambre frotté peut attirer de petits morceaux de bois. Ambre se dit en grec  $\eta\lambdaεκτρον$ , ou *électron*.
2. Un rocher sur l'île de *Magnesia* attire le fer.
3. La foudre (et la lumière en général).

Au Moyen-Age, on connaissait la boussole. En 1729, Stephen Gray découvre que l'électricité peut être conduite. En 1747, Benjamin Franklin postule l'existence d'électricité *positive* et *négative*. En 1785, Charles Augustin de Coulomb énonce la loi d'attraction et répulsion des charges, qui porte son nom. Au début des années 1820, André-Marie Ampère formule sa théorie de l'effet magnétique : un courant électrique crée un champ magnétique. Dix ans plus tard, Michael Faraday découvre la loi de l'induction : un champ magnétique variable crée un champ électrique. En 1862, James Clerk Maxwell propose que la lumière a la nature d'une onde électromagnétique, et unifie les lois de l'électricité et du magnétisme. Les 4 équations aux dérivées partielles, qui portent maintenant son nom, sont publiées en 1873. En 1897, des expériences conduisent J.J. Thomson à postuler l'existence de *l'électron*.

L'interaction EM est-elle si faible pour qu'il ait fallu si longtemps pour la découvrir ? Non, elle est en fait bien plus forte que la gravitation. Cependant, il y a dans la nature un équilibre parfait entre les charges + et -. Celles-ci s'attirent mutuellement, et donc macroscopiquement la matière tend à être neutre.

Les lois de l'électricité et du magnétisme, dans un système stationnaire, sont *découplées*, c.a.d. indépendantes l'une de l'autre. Si on considère les phénomènes (1) et (2) connus des anciens Grecs, il n'est en effet pas évident qu'il s'agit de manifestations de la même interaction fondamentale.

Dès que le système devient non statique, électricité et magnétisme apparaissent comme *couplées*, c.a.d. il ne peut y avoir l'un sans l'autre. D'où l'importance de l'unification par Maxwell. Il y a UNE interaction, celle de l'EM. La nouveauté introduite par Maxwell est qu'il peut exister des solutions "dans le vide", c.a.d. en l'absence de charge et de courant électrique : ce sont les ondes EM, dont la lumière fait partie.

L'approche suivie dans ce cours reflète ceci. Nous allons d'abord parler du cas statique, puis faire varier les choses dans le temps. La différence avec l'approche historique est

que nous allons, à chaque étape, nous rapporter comme un cas particulier du cas général (Maxwell).

**Limitations du champ d'application de l'EM** dit "classique", tel que présenté dans ce cours.

1. L'EM prédit que deux charges + se repoussent violemment. Qu'est-ce qui "tient" ensemble les protons à l'intérieur des noyaux atomiques? La réponse est dans l'existence d'un autre type d'interaction, l'interaction nucléaire forte, de très courte portée, attractive.

2. L'EM classique prédit qu'une charge accélérée perd de l'énergie en rayonnant des ondes EM. Si c'était vrai pour les électrons en mouvement autour des noyaux, alors les électrons s'effondreraient très rapidement sur le noyau. La réponse à cette problématique est apportée par la mécanique quantique : l'énergie est quantifiée (il y a des niveaux d'énergie bien distincts), et il existe un énergie minimale, appelée énergie du niveau fondamental, qui découle de ce qu'on appelle "principe d'incertitude".

## 1.2 Toute l'électrodynamique en quelques lignes

On décrit l'interaction entre particules chargées électriquement par l'intermédiaire du concept de **champs EM** :  $\vec{E}(\vec{x}, t)$ ,  $\vec{B}(\vec{x}, t)$ , champs vectoriels.

Un ensemble de charges  $q_i$  sera décrit par un champ scalaire **densité de charge**  $\rho(\vec{x}, t)$ .

Un ensemble de charges en mouvement sera décrit par un courant électrique  $I$ , ou un champ vectoriel **densité de courant**  $\vec{j}(\vec{x}, t)$ .

Les champs  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  sont créés par les champs  $\rho$ ,  $\vec{j}$ . Ces champs obéissent aux **équations de Maxwell** :

$$\begin{array}{ll} \boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} & (a) \qquad \boxed{\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} & (b) \\ \boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0} & (c) \qquad \boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} & (d) \end{array} \quad (1)$$

Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont tels qu'une charge  $q$  dans un champ EM subit une force, la **force de Lorentz** :

$$\boxed{\vec{F} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)} \quad (2)$$

Avec les lois de la dynamique de Newton,  $\boxed{m\vec{a} = \vec{F}}$ , on a une théorie décrivant l'en-

**semble des phénomènes EM** (électrodynamique classique). Schématiquement, un ensemble de charges en mouvement  $\rho, \vec{j}$ , créent les champs EM,  $\vec{E}, \vec{B}$ ; chaque particule subit donc la force de Lorentz; cette force change la quantité de mouvement des particules, donc les positions et vitesses changent, ce qui crée des charges et courants, etc, voir Figure 1.

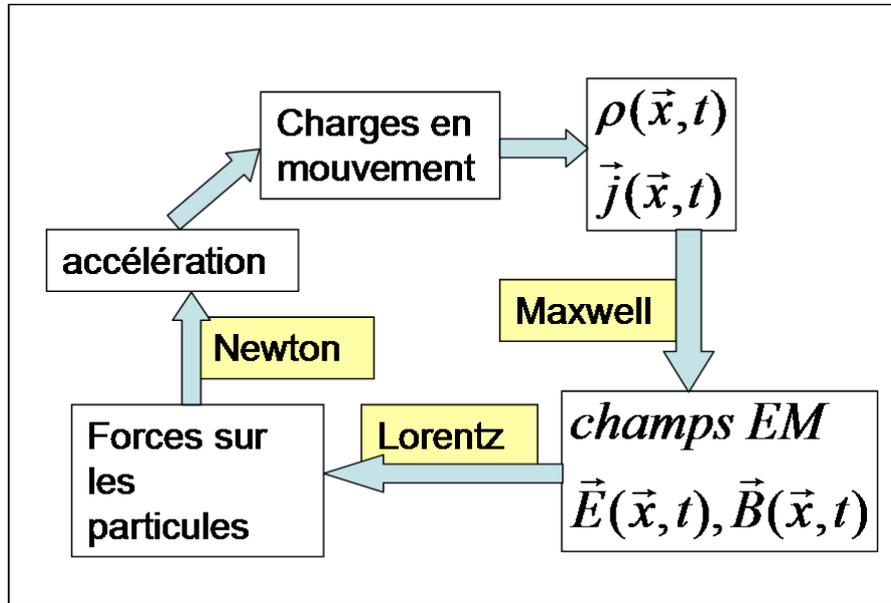


FIG. 1 – *Particules et champs*

### Contenu physique des équations de Maxwell, Eqs(1)

1. Une charge ( $\rho$ ) crée un champ électrique ( $\vec{E}$ ), Eq.(1(a)).
2. Un courant ( $\vec{j}$ ) crée un champ magnétique ( $\vec{B}$ ), Eq.(1(d), 1er terme)
3. Il n'y a pas de mono-pôle magnétique, Eq.(1(c)).
4. Un champ  $\vec{B}$  variable crée un champ  $\vec{E}$  variable, Eq.(1(b)).
5. Un champ  $\vec{E}$  variable crée un champ  $\vec{B}$  variable, Eq.(1(d), 2e terme).

1 : électrostatique

2,3 : magnétostatique

4 : induction

1,2,3,4,5 : ondes EM.

C'est un fait expérimental : **la charge électrique est conservée**. On vérifiera que les lois de l'EM (équations de Maxwell) satisfont cette propriété.

A chaque type d'interaction correspond un type d'énergie donné. Il nous faudra donc trouver quelle est l'expression de **l'énergie EM**, et vérifier le **principe de conservation de l'énergie**.

On verra que le champ EM a aussi une **quantité de mouvement**.

Les lois de l'EM (Maxwell) satisfont le **principe de relativité d'Einstein** : les lois de la nature sont invariantes par rapport à un changement de référentiel d'inertie. D'ailleurs, Einstein s'est directement inspiré de l'électrodynamique pour établir sa théorie : son article, daté de 1905, s'intitule précisément : ON THE ELECTRODYNAMICS OF MOVING BODIES, By A. Einstein, June 30, 1905

(<http://www.fourmilab.ch/etexts/einstein/specrel/www/>)

On peut se demander pourquoi on décrit les phénomènes EM via des quantités abstraites comme les champs  $\vec{E}(\vec{x}, t)$  et  $\vec{B}(\vec{x}, t)$ . Puisque l'EM aboutit finalement à décrire des interactions entre particules chargées, ne serait-il pas plus simple de décrire ces interactions par des forces "directes" entre particules ? en d'autres termes, les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  existent-ils réellement ? Ou ne sont-ils qu'une construction mathématique abstraite ?

Une première réponse est qu'en fait il est *plus simple* de décrire l'EM en termes de champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ . Une autre réponse est que le champ EM semble bien avoir une "existence propre" : la physique quantique décrira la lumière comme des *particules*, ayant une énergie et une quantité de mouvement : les photons. Cette branche de la physique s'appelle *l'électrodynamique quantique*, et n'est pas sujet de ce cours.

## 2 Electrostatique

### 2.1 Charge électrique, densité de charge, loi de Coulomb

La charge électrique (abrégé "la charge" dans ce qui suit) est une propriété intrinsèque de toute particule. Notée  $q$ , elle a pour unités le **Coulomb**,  $[C] = [As]$ , Ampère-seconde. La charge est quantifiée :  $q = Ze$ ,  $Z \in \mathcal{Z}$ , avec

$$\boxed{e = 1.6022 \times 10^{-19} \text{C}} . \quad (3)$$

Pour chaque type de particule chargée, il existe son anti-particule, qui a les mêmes propriétés *sauf le signe de la charge*. Il n'y a pas d'anti-particule des particules neutres. L'électron ( $e^-$ ) a une charge  $-e$ , le positron ( $e^+$ ) une charge  $+e$ , le proton ( $p$ ) une charge  $+e$ , l'anti-proton ( $\bar{p}$ ) une charge  $-e$ , le neutron une charge 0. Il n'y a pas d'anti-neutron.

Pour un ensemble de charges, on définit la **densité de charge**  $\rho(\vec{x}, t)$  de façon similaire à la densité de masse d'un fluide (Chapitre I). Soit un petit volume  $\Delta V$ . Il contient  $N_e$  particules chargées - et  $N_p$  particules chargées +. La charge dans  $\Delta V$  est donc

$$q = -eN_e + eN_p = \left( -e \frac{N_e}{\Delta V} + e \frac{N_p}{\Delta V} \right) \Delta V . \quad (4)$$

En faisant la limite pour un volume infinitésimal,  $\Delta V \rightarrow dV = d^3x$ , on a

$$\boxed{q = \rho d^3x}, \quad \boxed{\rho = -en_e + en_p}, \quad (5)$$

où  $n_e, n_p$  sont les densités numériques [ $m^{-3}$ ] des particules - et +, respectivement. Unités pour  $\rho$  : *Coulomb/m<sup>3</sup>*, [ $m^{-3}sA$ ].

La force entre 2 charges immobiles  $q_1, q_2$  en  $\vec{x}_1, \vec{x}_2$  est la **force de Coulomb** :

$$\boxed{\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{12}}, \quad (6)$$

où  $\epsilon_0$  est la *permittivité* du vide,  $\epsilon_0 = 10^7/(4\pi c^2) = 8.854 \times 10^{-12} \text{N}^{-1} \text{m}^{-2} \text{C}^2$ ,  $c$  = vitesse de la lumière. (Dans le système SI (MKSA),  $\epsilon_0$  a pour unité [ $kg^{-1}m^{-3}s^4A^2$ ]. Cette unité s'appelle aussi *Farad/mètre*, [ $F/m$ ]. On a  $1/(4\pi\epsilon_0) = c^2/10^7 \approx 9 \times 10^9 [m/F]$ .)

C'est une force gigantesque. Il suffirait de placer 328 kg d'électrons sur la terre et 328 kg d'électrons sur la lune pour annuler complètement la gravitation entre la terre et la lune! (La masse de la terre est  $\approx 6 \times 10^{24}$ kg).

La force de répulsion entre 2 protons dans un noyau atomique serait suffisante pour créer une accélération de  $10^{28}$  fois celle de la pesanteur... Le travail de cette force pour assembler un noyau d'hélium à partir de deux moitiés (deutérium) est de  $-2.3 \times 10^{-13}$ J (=  $-1.44$ MeV). Pour produire 1kg d'hélium, le travail est de  $-3.45 \times 10^{13}$ J, soit environ  $-10^7$ kWh, soit l'équivalent énergétique de 1 million de litres de pétrole... [En réalité, à cause des forces nucléaires, ce processus (fusion) *libère* de l'énergie : la fusion des 0.033 g de deutérium contenus dans 1 litre d'eau naturelle, et 0.1 g de lithium, produit 0.133 g d'hélium et libère autant d'énergie que la combustion de 1000 litres de pétrole.]

Le Coulomb est une quantité de charge considérable : 2 charges de 1C placées à 1m de distance créent une force capable de soulever un million de tonnes (sur la surface terrestre).

## 2.2 Champ électrique, principe de superposition, loi de Gauss

Soit une charge ponctuelle  $q_1$  placée à l'origine du système de coordonnées. Soit une charge  $q_2$  placée en  $\vec{x}$ . La force exercée par  $q_1$  sur  $q_2$  est, Eq.(6),

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = q_2 \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \vec{e}_r \right).$$

On appelle la quantité entre parenthèse le **champ électrique créé par  $q_1$** . Unités : le **Volt/mètre**, ou [ $kgms^{-3}A^{-1}$ ]. Ainsi, on peut reformuler la loi de Coulomb :

Une charge  $q_1$  crée un champ électrique

$$\boxed{\vec{E}_{q_1}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \vec{e}_r} \quad (7)$$

tel que si on plaçait une charge  $q_2$  en  $\vec{x}$  elle subirait une force

$$\boxed{\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = q_2 \vec{E}_{q_1}(\vec{x})} . \quad (8)$$

Notons que la force sur la particule 2 ne dépend PAS du champ créé par cette même particule 2, mais du champ créé par l'autre particule (no.1).

Par la 3e loi de Newton, il est évident que la charge no.2 crée un champ électrique  $\vec{E}_{q_2}(\vec{x})$ , tel que la force subie par la charge no.1 est  $\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = q_1 \vec{E}_{q_2}(\vec{x})$ .

**Principe de superposition.** Que se passe-t-il si on rajoute une 3e charge  $q_3$  en  $\vec{x}_{q_3}$ ? Elle subira une force résultante égale à  $\vec{F}_{1 \rightarrow 3} + \vec{F}_{2 \rightarrow 3}$ . Autrement dit

$$\vec{F}_{(1,2) \rightarrow 3} = q_3 \vec{E}_{(1,2)}(\vec{x}_{q_3}) , \quad (9)$$

avec

$$\boxed{\vec{E}_{(1,2)}(\vec{x}) = \vec{E}_1(\vec{x}) + \vec{E}_2(\vec{x})} . \quad (10)$$

Autrement dit, le champ électrique créé par un ensemble de charges est la somme des champs électriques créés par chacune des charges.

Par analogie avec les lignes de courant dans un fluide, qu'on avait défini comme les lignes tangentes aux vitesses en tout point, on définit les **lignes de champ électrique** comme étant tangentes au vecteur  $\vec{E}$  en tout point  $\vec{x}$ . Voir exemples Figure 2.

**Loi de Gauss pour le champ électrique**

Soit une charge ponctuelle  $q$ . Soit  $S$  une surface fermée (voir Figure 3). Le flux du champ électrique à travers  $S$  est par définition :

$$\int \int_S \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} . \quad (11)$$

On rappelle que  $d\vec{\sigma}$  est un vecteur élément de surface, normal à  $S$  en tout point, et pointant vers l'extérieur, par convention. Avec l'expression (7), ce flux est égal à

$$\int \int_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r \cdot d\vec{\sigma}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \int d\Omega ,$$

où  $d\Omega$  est l'angle solide de l'élément de surface  $d\sigma$  vu de l'origine. Propriété mathématique :

$$\int \int d\Omega = 0 \quad \text{si } S \text{ n'entoure pas l'origine,}$$

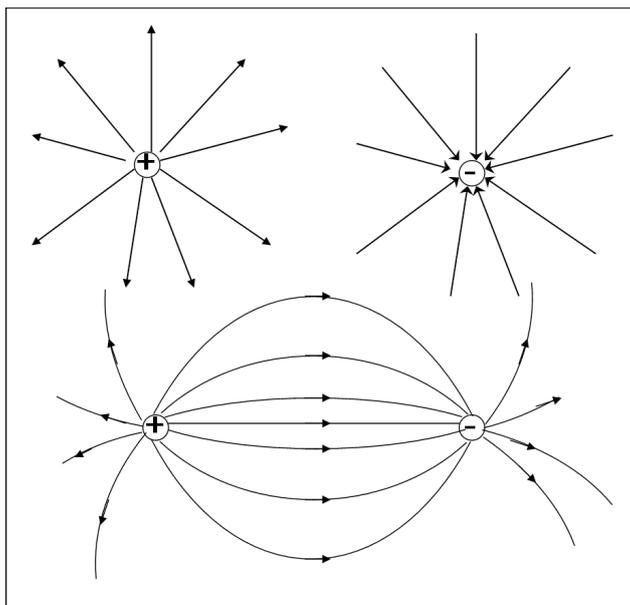


FIG. 2 – Champ électrique d'une charge ponctuelle et de deux charges ponctuelles.

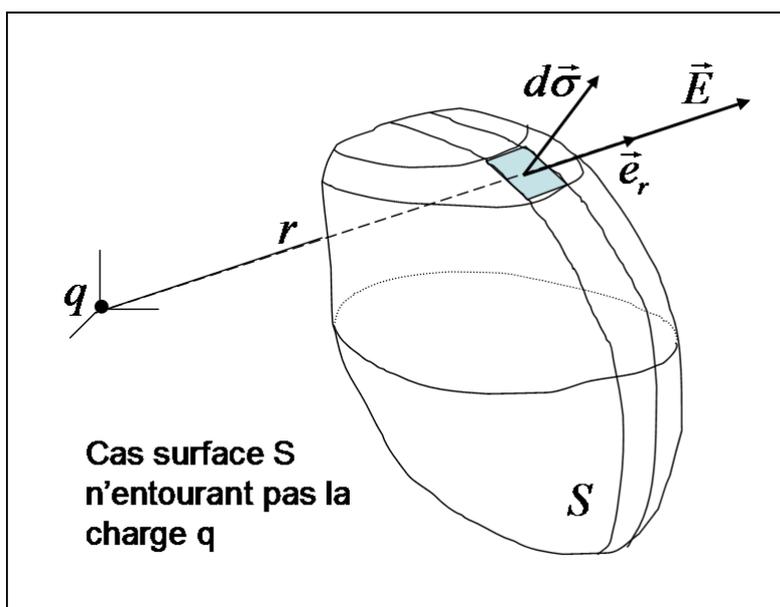


FIG. 3 – Calcul du flux du champ électrique

$$\iint d\Omega = 4\pi \quad \text{si } S \text{ entoure l'origine.}$$

Donc,

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = 0 \quad \text{si } q \text{ est en dehors de } S,$$

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \text{si } q \text{ est à l'intérieur de } S.$$

Si on considère maintenant un ensemble de charges  $q_j, j = 1..N$ , le principe de superpo-

sition (10) implique

$$\boxed{\int \int_S \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = \frac{Q_{\text{enf}}}{\varepsilon_0}}, \quad (12)$$

où  $Q_{\text{enf}}$  est la charge totale à l'intérieur de  $S$ . C'est la **loi de Gauss du champ électrique**. Si on considère une distribution de charges, de densité  $\rho(\vec{x})$ , alors  $Q_{\text{enf}} = \int \int \int_V \rho(\vec{x}) d^3x$ , où le volume  $V$  a pour bord la surface  $S$ , et

$$\int \int_S \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = \int \int \int_V \frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0} d^3x.$$

Le théorème de la divergence appliqué au membre de gauche implique

$$\int \int \int_V \nabla \cdot \vec{E} d^3x = \int \int \int_V \frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0} d^3x.$$

Ceci doit être vrai pour tout choix du volume  $V$ , et donc

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0}}, \quad \forall \vec{x}. \quad (13)$$

On retrouve la première des équations de Maxwell, Eq.(1(a)).

## 2.3 Circulation du champ électrique. Potentiel électrostatique

Soit  $\Gamma$  une courbe fermée. Soit  $S$  une surface ouverte de bord  $\Gamma$ . Soit  $q$  une charge ponctuelle et  $\vec{E}$  son champ électrique. Voir figure 4. De l'expression (7), on a  $\vec{E}(\vec{x}) = E_r(r)\vec{e}_r$ , avec  $r$  la coordonnée sphérique (distance à la charge  $q$ ). De l'expression du rotationnel en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ ,

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} = & \vec{e}_r \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (E_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial E_\theta}{\partial \varphi} \right) \\ & + \vec{e}_\theta \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) \right) \\ & + \vec{e}_\varphi \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right), \end{aligned}$$

on montre facilement que

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = 0}, \quad \forall \vec{x}. \quad (14)$$

On retrouve une des équations de Maxwell (1(b)) dans le cas statique ( $\partial/\partial t = 0$ ). Par le théorème de Stokes, on a

$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0}, \quad \forall \Gamma. \quad (15)$$

L'intégrale ci-dessus s'appelle **circulation du champ électrique**. On vient d'établir

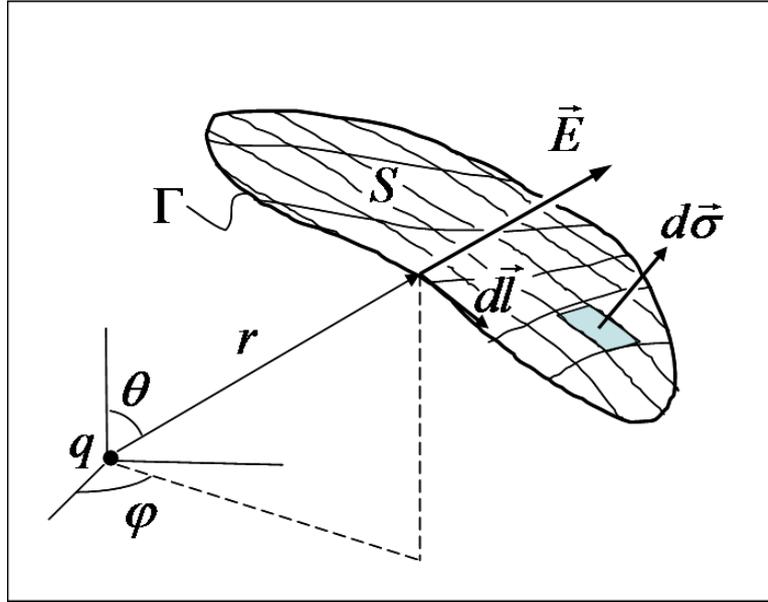


FIG. 4 – Calcul de la circulation du champ électrique

qu'elle est nulle pour une charge. Appliquant le principe de superposition, ces 2 dernières relations sont vraies pour le champ créé par toute distribution de charges (statiques).

**Potentiel électrostatique.** De  $\nabla \times \vec{E} = 0$ , on tire qu'il existe un champ scalaire  $V(\vec{x})$  tel que

$$\boxed{\vec{E}(\vec{x}) = -\nabla V(\vec{x})}, \forall \vec{x}. \quad (16)$$

Le champ scalaire  $V(\vec{x})$  s'appelle **potentiel électrostatique**. Il est défini à une constante près : si  $V(\vec{x})$  est un potentiel, alors  $V(\vec{x}) + \text{const}$  est aussi un potentiel. L'unité pour le potentiel est le **Volt**,  $[V]$ ,  $[kgm^2s^{-3}A^{-1}]$ . On peut définir un potentiel en choisissant arbitrairement un point  $\vec{x}_0$ , qui sera le "zéro du potentiel" (ou "mise à la terre"), (ou "à la masse"), et on a

$$\boxed{V(\vec{x}) = \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} -\vec{E} \cdot d\vec{l}}. \quad (17)$$

En effet, cette intégrale est indépendante du chemin parcouru. On notera que la convention de signe implique que le champ électrique est orienté du + au - , et que le potentiel  $V$  décroît le long des lignes de champ.

Physiquement parlant, quelle signification peut-on apporter à  $V$ ? Calculons le travail d'une force extérieure nécessaire à amener (lentement, de façon quasi-statique) une charge  $q$  du point  $A$  au point  $B$  dans un champ électrostatique  $\vec{E}(\vec{x})$ . La force extérieure doit équilibrer la force électrostatique, donc  $\vec{F}_{ext} = -q\vec{E}$ , et

$$W_{AB} = \int_{A,\Gamma}^B -q\vec{E} \cdot d\vec{l} = -q \int_{A,\Gamma}^B (-\nabla V) \cdot d\vec{l} = q(V(\vec{x}_B) - V(\vec{x}_A)).$$

Le travail ne dépend pas du chemin  $\Gamma$ . Donc

$$\boxed{qV(\vec{x})} \quad (18)$$

est l'énergie potentielle d'une charge  $q$  placée dans un champ électrostatique  $\vec{E}(\vec{x})$  dont le potentiel est  $V(\vec{x})$ .

Le potentiel électrostatique d'une charge ponctuelle  $q_1$  est

$$V(\vec{x}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}, \quad (19)$$

où  $r$  est la distance à la charge  $q_1$ . En effet,

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\nabla r \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r. \quad (20)$$

Pour une charge  $q_2$  placée dans ce champ, la force subie est  $\vec{F} = q_2\vec{E}$ , et on retrouve la loi de Coulomb, Eq.(6).

**Equation de Poisson.** De l'équation (13), et de la définition du potentiel, Eq.(16), on obtient l'équation de Poisson :

$$\boxed{\nabla^2 V(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}}, \quad \forall \vec{x}. \quad (21)$$

Dans le cas  $\rho = 0$ , l'équation s'appelle **équation de Laplace**.

**Conducteurs.** Dans un conducteur, les charges peuvent se déplacer librement. Dans le cas statique, cela revient à dire qu'elles vont se disposer de telle façon à subir une force résultante nulle, donc

$$\boxed{\vec{E} = 0} \Leftrightarrow \boxed{V = const} \quad (22)$$

à l'intérieur d'un conducteur. La charge se distribue de telle sorte à annuler toute contribution qui viendrait de l'extérieur. Voir expériences et simulations.

**Capacité.** La capacité  $C$  d'un conducteur au potentiel  $V$  portant une charge  $Q$  est

$$Q = CV. \quad (23)$$

La capacité  $C$  d'une paire de conducteurs (système appelé condensateur) ayant une différence de potentiel  $\Delta V$ , des charges  $+Q$  et  $-Q$ , est

$$Q = C \Delta V. \quad (24)$$

L'unité est le **Farad**,  $[F]$ , Coulomb/Volt,  $[kg^{-1}m^{-2}s^4A^2]$ .

## 2.4 Applications

On verra, avec des expériences de démonstration et des calculs faits en salle, les cas suivants :

- Champ  $\vec{E}(\vec{x})$  et potentiel  $V(\vec{x})$  d'un condensateur plan.
  - Relation entre charge et différence de potentiel.
  - Force entre 2 plaques.
  - Mouvement d'une particule chargée dans ce champ électrique : tube cathodique, accélérateur électrostatique.
  - Calcul du champ  $\vec{E}(\vec{x})$  dans des cas avec symétrie (plane, cylindrique ou sphérique).
- Nous appliquerons la loi de Gauss (12) et l'équation de Poisson (21).

## 2.5 Dipôle électrique

**Déf. :** Un dipôle électrique est constitué d'un ensemble de 2 charges  $+q$  et  $-q$  séparées d'une distance  $d$ .

**Déf. :** Soit  $\vec{d}$  le vecteur allant de la charge “-” à la charge “+”. On appelle moment dipolaire le vecteur  $\boxed{\vec{p} = q\vec{d}}$ . Unités : le Coulomb-mètre,  $[mA]$ .

Certaines molécules ont un moment dipolaire. Par exemple le sel NaCl ou l'eau H<sub>2</sub>O. Ces molécules créent un champ électrique. De plus, bien que neutres, elles réagissent à la présence d'un champ électrique extérieur. Lorsque l'on considère un morceau de matière constitué d'un grand nombre de telles molécules, ces deux facteurs sont responsables du comportement dit *diélectrique* : la matière peut se *polariser*.

**Champ électrique dipolaire.** C'est le champ électrique créé par un dipôle électrique. On calculera ce champ à des grandes distances ( $r \gg d$ ) : c'est ce qu'on appelle parfois *l'approximation dipolaire*. Plaçons l'origine des coordonnées au milieu du dipôle et l'axe  $z$  parallèle au dipôle. On utilise les coordonnées sphériques  $(r, \varphi, z)$ . Voir Figure 5. Par symétrie d'axe  $z$ , le système est indépendant de  $\varphi$  (symétrie de révolution), et donc

$$\vec{E} = \vec{E}(r, \theta), \quad V = V(r, \theta).$$

On utilise le principe de superposition : le potentiel du dipôle est la somme du potentiel créé par la charge  $+q$  et celui créé par la charge  $-q$ . Chacune de ces charges crée un potentiel donné par l'Eq.(19) ; en posant  $r_1$  la distance à la charge  $+q$ ,  $r_2$  la distance à la charge  $-q$ , il vient :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_1} + \frac{-q}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}.$$

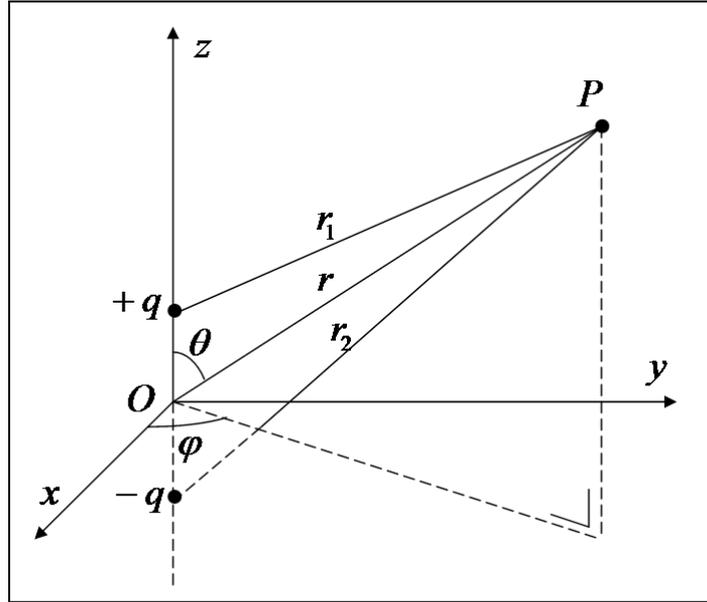


FIG. 5 – Calcul du champ dipolaire

Dans le cas  $r \gg d$ , on peut approximer :

$$r_1 \approx r - \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = r - \frac{d}{2} \cos\theta,$$

$$r_2 \approx r + \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = r + \frac{d}{2} \cos\theta,$$

et donc

$$V(r, \theta) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos\theta}{r^2 - (d^2/4) \cos^2\theta}.$$

Négligeant  $d^2/r^2$ , on obtient

$$\boxed{V(r, \theta) \approx \frac{qd \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}}. \quad (25)$$

Le champ électrique s'obtient alors

$$\vec{E} = -\nabla V = -\vec{e}_r \frac{\partial V}{\partial r} - \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \approx \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_r + \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_\theta$$

$$\boxed{\vec{E}(r, \theta) \approx \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{p})}. \quad (26)$$

Ce champ est représenté à la Figure 6. N.B. On remarque que l'intensité du champ électrique dipolaire décroît avec l'inverse du cube de la distance ( $\sim 1/r^3$ ), donc plus rapidement que le champ d'une charge ponctuelle ( $\sim 1/r^2$ ). Si on place 2 dipôles côte-à-côte en sens opposé, on crée alors un champ *quadrupolaire*, qui va décroître encore plus vite avec la distance. Et ainsi de suite. On comprend bien que même pour une minuscule goutte d'eau, contenant  $10^{18}$  molécules d' $\text{H}_2\text{O}$ , le champ électrique est négligeable *dès que*

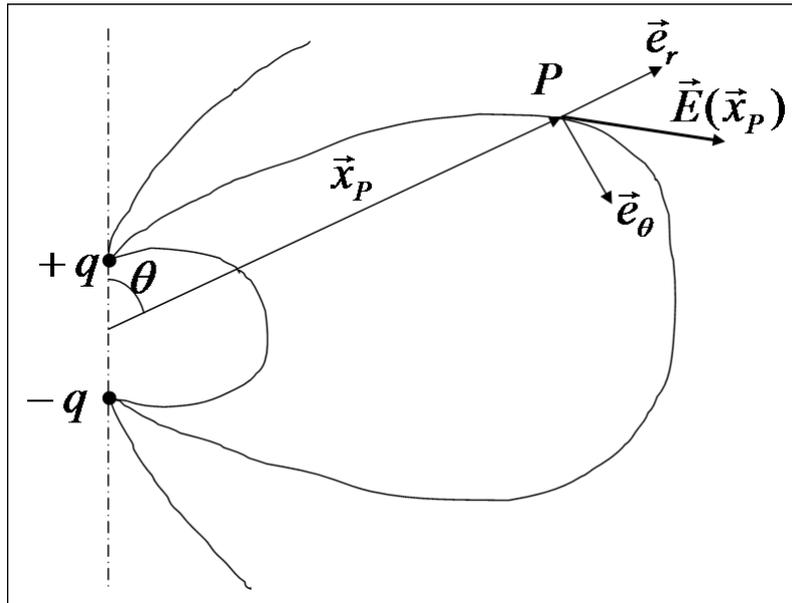


FIG. 6 – Champ dipolaire

*l'on s'éloigne de la goutte.* Le champ créé par les dipôles des molécules peut cependant être important s'ils ont tendance à s'aligner les uns avec les autres.

### Dipôle électrique dans un champ électrique extérieur $\vec{E}_{ext}$ uniforme.

Supposons le dipôle rigide ( $|\vec{d}|$  invariant). La somme des forces extérieures est nulle :  $+q\vec{E}_{ext} - q\vec{E}_{ext} = 0$ . Mais le moment des forces extérieures, ou *couple de forces*, n'est pas nul, voir Figure 7 :

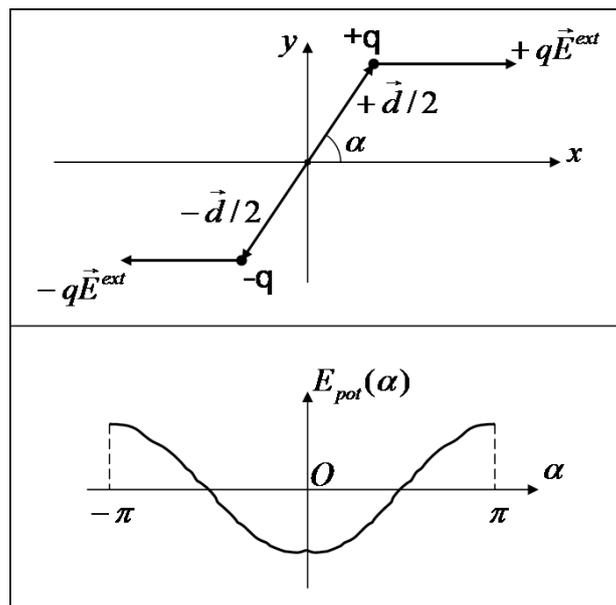


FIG. 7 – Dipôle dans un champ extérieur : couple et énergie potentielle

$$\vec{M}_O = (\vec{d}/2) \times q\vec{E}_{ext} + (-\vec{d}/2) \times (-q\vec{E}_{ext}) = q\vec{d} \times \vec{E}_{ext} = \vec{p} \times \vec{E}_{ext} .$$

Ce couple tend à *aligner le dipôle avec le champ*  $\vec{E}_{ext}$ . L'énergie potentielle du dipôle, dans ce champ  $\vec{E}_{ext}$ , est la somme des énergies potentielles des 2 charges constituant le dipôle dans le champ  $\vec{E}_{ext}$  constant, dont le potentiel est  $V = -E_{ext}x$ .

$$E_{pot} = (+q)(-E_{ext})(d/2) \cos \alpha + (-q)(-E_{ext})(-d/2) \cos \alpha = -qd \cos \alpha E_{ext} = -p \cos \alpha E_{ext}$$

$$\Rightarrow E_{pot} = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext} ,$$

On constate que cette énergie est minimale pour  $\alpha = 0$ , c'est-à-dire quand le dipôle est aligné avec le champ  $\vec{E}_{ext}$ , avec le moment dipolaire  $\vec{p}$  de *même direction* que  $\vec{E}_{ext}$ .

**Expériences : cristaux liquides, diélectrique dans champ électrique.**

## 2.6 Polarisation de la matière, vecteur déplacement

Dans les matériaux conducteurs, il y a des charges "libres", libres de passer d'une molécule à l'autre. Exemples : métaux, plasmas.

Dans les matériaux **isolants** ou **diélectriques**, les charges sont "liées", "attachées" à un atome ou une molécule donnée.

Le but de cette Section est d'étudier l'effet d'un champ électrique *extérieur*  $\vec{E}_{ext}$  sur un morceau (macroscopique) de matière, constitué de  $N$  molécules, avec  $N$  élevé.

On distingue deux types de molécules ou atomes. Soit elles ont un moment dipolaire permanent,  $\vec{p} \neq 0$  même si  $\vec{E}_{ext} = 0$  (p.ex.  $H_2O$ ,  $HCl$ , ...), soit elles n'en n'ont pas,  $\vec{p} = 0$  si  $\vec{E}_{ext} = 0$  (p.ex.  $CO_2$ ,  $Fe$ , ..).

En absence de champ extérieur, les dipôles permanents des molécules ont une orientation aléatoire, donc, en moyenne sur un certain volume,  $\langle \vec{p} \rangle = 0$ . Pour une substance dont les molécules n'ont pas de dipôle permanent, il est évident que  $\langle \vec{p} \rangle = 0$  également.

En présence de champ extérieur, les dipôles permanents des molécules auront tendance à s'aligner avec  $\vec{E}_{ext}$  (voir Section précédente), et donc  $\langle \vec{p} \rangle \neq 0$ , parallèle et de même direction que  $\vec{E}_{ext}$ . S'il s'agit de molécules de moment dipolaire nul, la présence de  $\vec{E}_{ext}$  peut créer une déformation de la distribution de charge électronique, qui est telle qu'alors les molécules acquièrent un moment dipolaire non nul, appelé *moment dipolaire induit*, et on a également  $\langle \vec{p} \rangle \neq 0$ , parallèle et de même direction que  $\vec{E}_{ext}$ . [Il est clair que l'agitation thermique va avoir tendance à rompre l'alignement des dipôles. La valeur de la moyenne,  $\langle \vec{p} \rangle$ , va donc en général dépendre de la température.]

Dans les deux cas, on peut représenter le diélectrique comme une partie neutre à l'intérieur du volume, et une partie en surface, chargée positivement ou négativement, selon l'orientation de la surface par rapport à  $\vec{E}_{ext}$ . Voir Figure 8. Cette charge est répartie sur la

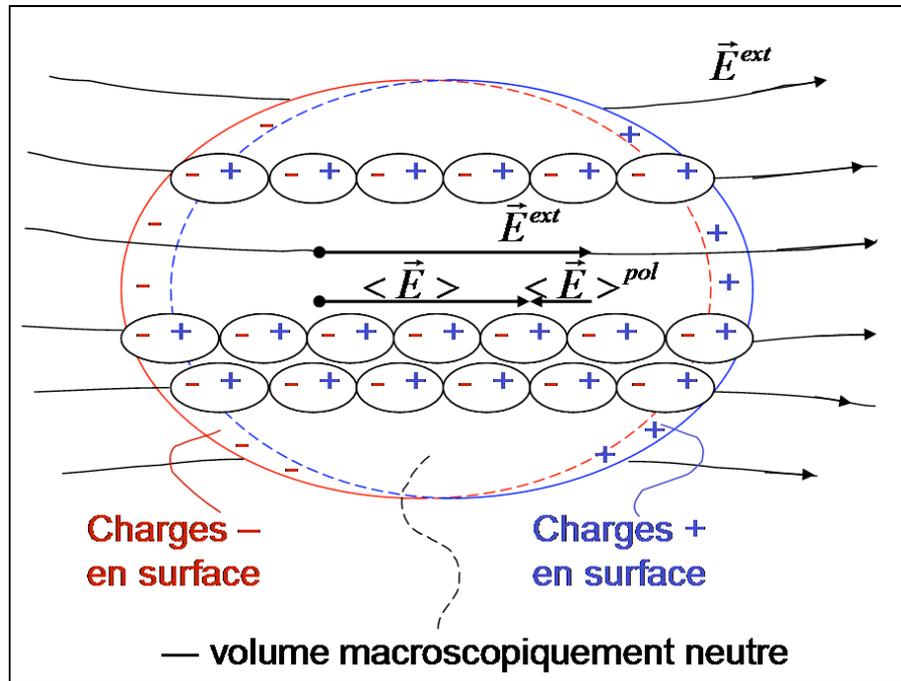


FIG. 8 – Diélectrique dans un champ extérieur : charges à la surface

dernière couche moléculaire du morceau de matière. On la décrit par une **densité de charge de surface**,  $\rho_s^{lie}$ , d'unités  $[C/m^2]$ . C'est le phénomène de la **polarisation de la matière**.

Il est clair que la présence de cette charge liée crée un champ électrique qui s'oppose au champ électrique extérieur. Le matériau diélectrique *diminue l'intensité du champ électrique* à l'intérieur.

Dans le cas des conducteurs, les charges (libres) se déplacent jusqu'à la surface de telle sorte à annuler complètement le champ électrique à l'intérieur.

**Déf. : la polarisation  $\vec{\mathcal{P}}$**  est le moment dipolaire électrique par unité de volume :  $\vec{\mathcal{P}} = n \langle \vec{p} \rangle$ , où  $n$  est la densité numérique (nombre de molécules par unité de volume) et  $\langle \vec{p} \rangle$  le moment dipolaire moyen d'une molécule. Unités :  $[C/m^2] = [m^{-2}sA]$ .

La polarisation  $\vec{\mathcal{P}}$  est parallèle à  $\vec{E}_{ext}$  et de même direction. Voir Figure 9. Si on considère une tranche de matière parallèle à  $\vec{E}_{ext}$ , on peut calculer son moment dipolaire de deux façons :

1. Les charges de surfaces + et -, séparées d'une distance  $d$ , forment un dipôle, et par définition du moment dipolaire,  $p = \rho_s^{lie}(d\sigma)d$ .

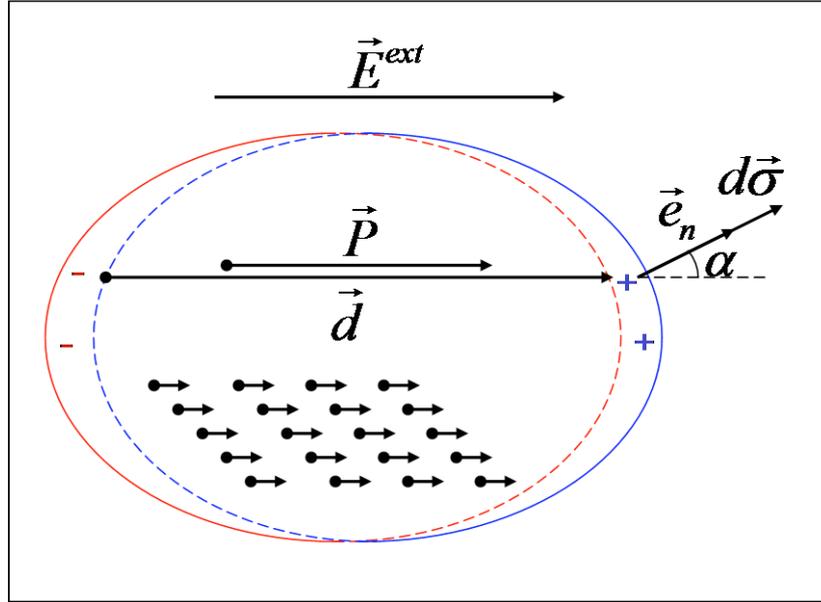


FIG. 9 – Diélectrique dans un champ  $\vec{E}_{ext}$  : charges à la surface  $\rho_s^{lie}$  et polarisation  $\vec{\mathcal{P}}$

2. La tranche de matière est polarisée, et son moment dipolaire est égal à la polarisation  $\vec{\mathcal{P}}$  (moment dipolaire par unité de volume) multipliée par le volume de la tranche  $(d\sigma) \cos \alpha d$ , où  $\alpha$  est l'angle entre  $\vec{d}\sigma$  et  $\vec{\mathcal{P}}$ . Donc  $p = \mathcal{P}(d\sigma) \cos \alpha d$ .

Egalisant les deux expressions, on obtient

$$\boxed{\rho_s^{lie} = \vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{e}_n}, \quad (27)$$

où  $\vec{e}_n$  est le vecteur unité normal à la surface, pointant vers l'extérieur.

**Modèle linéaire.** Des observations expérimentales conduisent à supposer que

$$\boxed{\vec{\mathcal{P}} \text{ est proportionnel à } \vec{E}}.$$

C'est un modèle dit *linéaire*, qui est correct tant que le champ extérieur n'est pas trop intense. On écrit ainsi

$$\boxed{\vec{\mathcal{P}} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}}, \quad (28)$$

où  $\chi_e$  s'appelle **susceptibilité électrique** ; c'est un nombre sans unités. On peut vérifier que  $\varepsilon_0 \vec{E}$  a bien pour unités des  $[C/m^2]$ .

**Déf. : Vecteur déplacement électrique**

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{\mathcal{P}}}. \quad (29)$$

Il a pour unités des  $[C/m^2]$ .

**Loi de Gauss pour  $\vec{D}$ .** Soit un volume  $V$ , de surface  $S$  fermée.

$$\int \int \vec{D} \cdot \vec{d}\sigma = \int \int \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{d}\sigma + \int \int \vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{d}\sigma$$

Appliquant la loi de Gauss pour  $\vec{E}$ , Eq.(12), pour le premier terme, et la relation entre  $\vec{P}$  et  $\rho_S^{lie}$ , Eq. (27), pour le deuxième terme, on a

$$\int \int \vec{D} \cdot d\vec{\sigma} = Q_{enf}^{tot} - Q_{enf}^{lie},$$

où  $Q_{enf}^{tot}$  est la charge totale contenue dans  $V$  et  $Q_{enf}^{lie}$  la charge de polarisation totale sur la surface  $S$ . La différence entre les deux est donc la **charge libre** contenue dans  $V$ , et on a

$$\boxed{\int \int \vec{D} \cdot d\vec{\sigma} = Q_{enf}^{libre}}. \quad (30)$$

Sous une forme différentielle, on trouve, appliquant le théorème de Gauss (de la divergence),

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho^{libre}}. \quad (31)$$

**Les charges libres sont la source de  $\vec{D}$ .** Les charges libres sont celles qui se déplacent “librement” dans les conducteurs. Ces charges peuvent être mesurées plus facilement que les charges liées! La résolution d’un problème électrostatique en présence de matière diélectrique consiste donc :

1. Connaissant  $\rho^{libre}(\vec{x})$ , on résout la loi de Gauss ci-dessus pour trouver  $\vec{D}(\vec{x})$ .
2. Supposant un modèle linéaire,  $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$ , on obtient la relation entre  $\vec{D}$  et  $\vec{E}$  :

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0(1 + \chi_e)\vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}}. \quad (32)$$

On donne les définitions :

$\varepsilon_r = 1 + \chi_e$  : permittivité relative, ou “constante diélectrique”, du matériau considéré; nombre sans unités physiques.

$\varepsilon$  : permittivité du matériau considéré; unités [ $kg^{-1}m^{-3}s^4A^2$ ] ou [*Farad/m*], [*F/m*].

### Applications.

La présence d’un diélectrique décroît l’intensité du champ électrique.

Le potentiel d’une charge ponctuelle (libre)  $Q$  est

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{Q}{r} \quad (33)$$

et donc son champ électrique est

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r. \quad (34)$$

C’est égal au résultat dans le vide *diminué du facteur  $\varepsilon_r$* . Il s’ensuit que la force entre 2 charges (libres) en présence d’un diélectrique est *diminuée du facteur  $\varepsilon_r$*  par rapport au cas du vide :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_{12}. \quad (35)$$

Une conséquence de ceci est que la **capacité d'un condensateur**, définie comme la "capacité du système à stocker des charges libres",  $Q^{libre} = C\Delta V$ , est **augmentée du facteur  $\varepsilon_r$  par la présence d'un diélectrique**. Par exemple, pour un condensateur mince de surface  $S$ , distance entre les plaques  $d$ , entre lesquelles se trouve un matériau de constante diélectrique  $\varepsilon_r$ , est

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}. \quad (36)$$

On vérifiera expérimentalement que :

1. Si les charges  $+Q^{libre}$ ,  $-Q^{libre}$  sont maintenues constantes, l'introduction d'un diélectrique entre les plaques diminue la différence de potentiel  $\Delta V$  et diminue la force d'attraction entre les plaques.
2. Si la différence de potentiel  $\Delta V$  est maintenue constante, la force d'attraction entre les plaques augmente en présence de diélectrique.
3. Si on charge les deux plaques avec le même signe de charge, l'introduction de diélectrique entre les plaques ne change rien à la force, répulsive dans ce cas, entre les plaques. (Expliquez pourquoi !)

## 2.7 Energie électrostatique

On a vu dans ce qui précède que les charges sont la "source" du champ électrique. On se pose la question : quelle est l'énergie nécessaire à amener un ensemble de charges (depuis l'infini) ? C'est-à-dire : **quelle est l'énergie nécessaire à créer un champ électrique  $\vec{E}(\vec{x})$  ?**

Exemple : conducteur (condensateur), au potentiel  $V$ , portant une charge  $q$ . Soit  $C$  sa capacité,  $C = q/V$ . Calculons le travail qu'il faut fournir pour amener une (petite) charge supplémentaire  $\Delta q$  de l'infini jusque sur le conducteur. La charge  $\Delta q$  est placée dans un potentiel  $V(\vec{x})$  créé par la charge  $q$ . Son énergie va donc varier de la quantité  $qV$  lorsqu'elle se déplace de l'infini jusque sur le conducteur. Cette énergie doit être fournie par le travail  $\Delta W$  d'une force extérieure (qui compense la force électrostatique subie par la charge  $\Delta q$ ). On a donc

$$\Delta W = \Delta q V = \frac{q\Delta q}{C}.$$

En rajoutant l'une après l'autre des charges  $\Delta q$  sur le conducteur, le travail total pour faire passer la charge sur le conducteur de 0 à  $Q$  est

$$\Delta W_{tot} = \int_0^Q \frac{q\Delta q}{C} = \frac{Q^2}{2C}.$$

Ce travail s'est transformé en **énergie électrostatique**, notée  $\mathcal{E}_{es}$ . Avec  $Q = CV$ ,

$$\boxed{\mathcal{E}_{es} = \frac{1}{2}CV^2}. \quad (37)$$

Où est cette énergie? Exemple d'un conducteur sphérique de rayon  $R$ , portant une charge  $Q$ . Le champ électrique créé par cette charge est

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

à l'extérieur du conducteur ( $r > R$ ), et 0 à l'intérieur ( $r < R$ ). Le potentiel est

$$V(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

à l'extérieur ( $r > R$ ), et

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

à l'intérieur ( $r < R$ ). On a donc la capacité  $C = 4\pi\epsilon_0 R$ . D'après la formule ci-dessus, on a l'énergie électrostatique

$$\mathcal{E}_{es} = \frac{1}{2} 4\pi\epsilon_0 R \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (38)$$

Calculons

$$\int \int \int |\vec{E}(\vec{x})|^2 d^3x,$$

où l'intégrale est sur tout l'espace. L'élément de volume, en coordonnées sphériques, est  $d^3x = 4\pi r^2 dr$ . On a donc

$$\int \int \int |\vec{E}(\vec{x})|^2 d^3x = \int_R^\infty \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon_0 r^2)^2} 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0^2} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0^2 R}.$$

En comparant avec l'Eq.(38), on a

$$\boxed{\mathcal{E}_{es} = \int \int \int \frac{\epsilon_0 |\vec{E}(\vec{x})|^2}{2} d^3x}. \quad (39)$$

On peut montrer (voir plus loin) que cette expression est vraie pour toute distribution de charges  $\rho(\vec{x})$ . On interprète ainsi

$$\boxed{\frac{\epsilon_0 |\vec{E}(\vec{x})|^2}{2}} \quad (40)$$

comme une **densité d'énergie électrostatique**. (N.B. Vérifiez que l'on obtient bien des joules par mètre cube!). Tout se passe comme si l'énergie électrostatique était "stockée" dans le champ électrique.

### Démonstration de l'Eq.(39).

Soit  $N$  charges ponctuelles statiques  $q_i$  aux positions  $\vec{x}_i$ . L'énergie potentielle de ce système est le travail effectué pour amener (de façon quasi-statique) ces charges de l'infini à leur position actuelle.

Soit  $\Delta W_i = q_i V_i(\vec{x}_i)$  le travail nécessaire à amener la charge no.  $i$  de l'infini à  $\vec{x}_i$ . Alors  $V(\vec{x}_i)$  est le potentiel créé par les charges déjà en place, nos  $1, \dots, i-1$ . Donc

$$\Delta W_i = q_i \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}_i - \vec{x}_j|} .$$

L'énergie potentielle totale, autrement dit l'énergie électrostatique du système, est la somme des  $\Delta W_i$ ,  $i = 1..N$  :

$$\mathcal{E}_{es} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} .$$

On peut récrire cette double somme comme  $(\sum_i \sum_{j<i} + \sum_i \sum_{j>i})/2$  :

$$\mathcal{E}_{es} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} . \quad (41)$$

Si on a une distribution de charges  $\rho(\vec{x})$ , en identifiant  $q_i = \rho(\vec{x})d^3x$  et  $q_j = \rho(\vec{x}')d^3x'$ , il vient

$$\mathcal{E}_{es} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \int \int \int d^3x \int \int \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} . \quad (42)$$

On peut récrire cette relation autrement, en utilisant le potentiel  $V(\vec{x})$ . On a

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' , \quad (43)$$

donc

$$\boxed{\mathcal{E}_{es} = \frac{1}{2} \int \int \int \rho(\vec{x}) V(\vec{x}) d^3x} . \quad (44)$$

Cette expression est parfois utile. Pour arriver à l'Eq.(39), on utilise l'équation de Poisson, Eq.(21),  $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$  :

$$\mathcal{E}_{es} = -\frac{1}{2} \int \int \int \epsilon_0 (\nabla^2 V(\vec{x})) V(\vec{x}) d^3x .$$

On utilise l'identité vectorielle

$$(\nabla^2 V) V = \nabla \cdot (V \nabla V) - \nabla V \cdot \nabla V .$$

Utilisant le théorème de Gauss (de la divergence) et la définition du potentiel  $\vec{E} = -\nabla V$ ,

$$\int \int \int \nabla \cdot (V \nabla V) d^3x = \int \int_S V(-\vec{E}) \cdot d\vec{\sigma} ,$$

où  $S$  est une surface que l'on fait tendre vers l'infini (car l'intégrale de volume est sur *tout l'espace*) :

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \int \int_S V \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = \lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} V(\vec{x}) \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0} = 0 .$$

On a donc

$$\mathcal{E}_{es} = \int \int \int \frac{\epsilon_0 |\vec{E}(\vec{x})|^2}{2} d^3x ,$$

qui est bien l'Eq.(39).

### 3 Magnétostatique

L'essentiel en 4 points

- Un courant (électrique) est un débit de charge (électrique) à travers une surface.
- Un courant crée un champ magnétique  $\vec{B}(\vec{x})$ .
- Une charge  $q$  en  $\vec{x}$ , ayant la vitesse  $\vec{v}$ , subit une force  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}(\vec{x})$ ,  $\vec{B}$  étant le champ magnétique créé par le mouvement des *autres* charges.
- Un morceau de matière peut porter des courants (liés), induits ou permanents. Ceci est à l'origine du phénomène de l'aimantation de la matière.

On devrait appeler ceci la “magnétostationnaire”, dans le sens que ceci concerne des charges non pas statiques, mais dont l'écoulement est stationnaire (cf fluides) :  $\partial/\partial t = 0$ , autrement dit des courants constants dans le temps. La magnétostatique est un cas particulier de l'EM. Posant  $\partial/\partial t = 0$  dans les équations de Maxwell, Eqs(1(c)(d)), on obtient

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}}, \quad (45)$$

qui sont les équations fondamentales de cette Section.

#### 3.1 Courant électrique, densité de courant

Soit un ensemble de charges (+ et/ou -) en mouvement. Soit  $S$  une surface ouverte. Voir Figure 10. Le **courant**  $I$  est le débit de charge à travers  $S$  :  $I = ((\text{nb.charges } +) - (\text{nb.charges } -))$  traversant  $S$  par unité de temps. Si  $n_\alpha$  est la densité numérique ( $m^{-3}$ ) des charges  $q_\alpha$ , on a

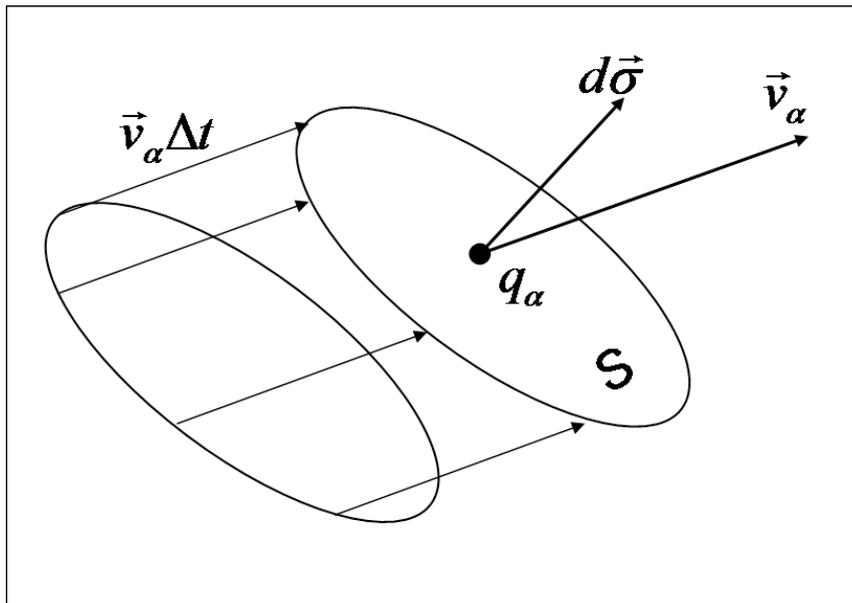


FIG. 10 – Courant à travers une surface  $S$

$$I = \int \int_S \left( \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot \vec{d}\sigma \right). \quad (46)$$

Par analogie avec le débit de masse (cf fluides), on a en effet une densité de charge  $\rho_{\alpha} = n_{\alpha} q_{\alpha}$ . La charge traversant un élément de surface  $\vec{d}\sigma$  pendant  $\Delta t$  est

$$\rho_{\alpha}(\vec{v}_{\alpha} \Delta t) \cdot \vec{d}\sigma.$$

En intégrant sur la surface  $S$ , et en sommant sur toutes les espèces de charges, on retrouve l'expression (46). Le courant  $I$  a pour unité l'**Ampère**,  $[A]$ , défini de telle sorte que la force entre 2 fils parallèles rectilignes distants de 1m, parcourus par des courants de 1A Ampère, soit de  $2 \times 10^{-7}$  Newton par mètre de longueur de fil.

**Déf. : densité de courant**  $\boxed{\vec{j}(\vec{x})}$  = flux de charge = charge traversant une surface par unité de temps et par unité de surface. On a

$$\boxed{\vec{j}(\vec{x}) = \sum_{\alpha} n_{\alpha}(\vec{x}) q_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}(\vec{x})}, \quad (47)$$

et donc

$$\boxed{I = \int \int_S \vec{j}(\vec{x}) \cdot \vec{d}\sigma}. \quad (48)$$

Unité pour  $|\vec{j}|$  : **Ampère par mètre carré**,  $[Am^{-2}]$ . Dans cette Section 3, nous allons considérer des écoulements stationnaires de charges, donc

$$\frac{dI}{dt} = 0, \forall S, \quad \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}(\vec{x}, t) = 0, \forall \vec{x}, \forall t.$$

## 3.2 Champ magnétique, loi d'Ampère, loi de Gauss

Un champ magnétique  $\vec{B}(\vec{x})$  est tel que si on place une charge  $q$  en  $\vec{x}$  à la vitesse  $\vec{v}$ , elle subit une force

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}(\vec{x})}. \quad (49)$$

Unité pour  $|\vec{B}|$  : le **Tesla**,  $[T]$ ,  $[kgs^{-2}A^{-1}]$ .

**Exemple : force sur un conducteur.** Soit un fil conducteur parcouru par un courant  $I$ . Soit  $d\vec{l}$  un élément du fil et  $A$  sa section. Soit  $n$  la densité des porteurs de charge,  $q$  leur charge et  $\vec{v}$  leur vitesse. Dans l'élément de fil, il y a  $nA(dl)$  porteurs de charge, donc une charge  $nA(dl)q$  en mouvement à la vitesse  $\vec{v}$ . La force subie par ces porteurs de charge est donc

$$d\vec{F} = nA(dl)q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Avec l'expression du courant (46), ou de la densité de courant (47) on a

$$\boxed{d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}} \text{ ou } \boxed{d\vec{F} = \vec{j} \times \vec{B} d^3x}. \quad (50)$$

### Champ magnétique créé par un courant.

Dans le cas simple d'un fil rectiligne infini portant un courant  $I$ , Figure 11, des expériences conduisent au résultat :

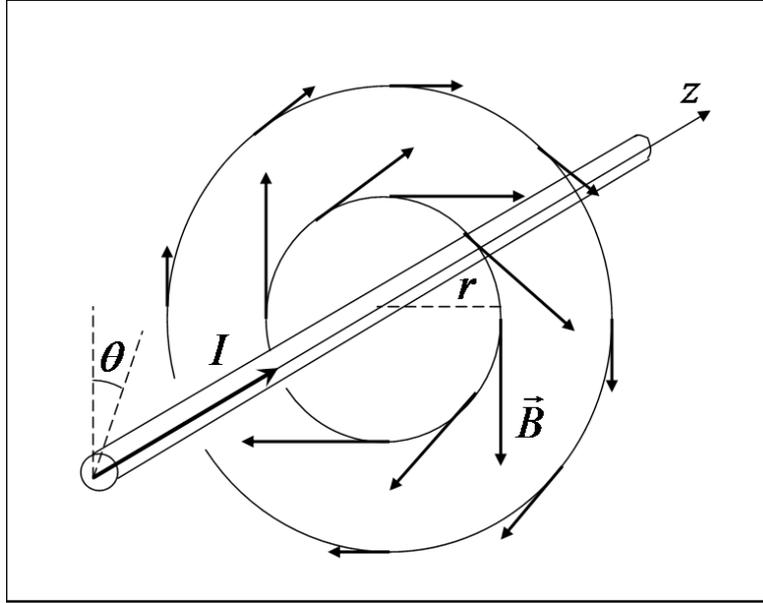


FIG. 11 – Champ  $\vec{B}$  créé par un courant dans un conducteur rectiligne

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta, \quad (51)$$

avec

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ [kgms}^{-2}\text{A}^{-2}\text{]}, \quad (52)$$

appelée perméabilité du vide. On note que l'orientation relative de  $\vec{B}$  et du sens de  $I$  suit la "règle de la vis".

Soit un parcours fermé  $\Gamma$  entourant le fil. Calculons la circulation de  $\vec{B}$  le long de  $\Gamma$ .

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\theta = \mu_0 I.$$

Soit un parcours fermé  $\Gamma'$  n'entourant pas le fil. Soit  $S$  une surface ouverte dont le bord est  $\Gamma'$ . Utilisant le théorème de Stokes,

$$\oint_{\Gamma'} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int \int_S \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = 0.$$

En effet, on a montré (Fluides, Exercices, série 3, no.1) que le rotationnel d'un champ en  $(1/r)\vec{e}_\theta$  est nul.

Si on considère maintenant un ensemble de plusieurs fils parcourus par des courants  $I_i$ , Figure 12, et un parcours fermé  $\Gamma$ , le champ  $\vec{B}$  résultant sera la somme des champs  $\vec{B}^{(i)}$

créés par chacun des courants  $I_i$  (**principe de superposition**). Calculant la circulation de  $\vec{B}$  le long de  $\Gamma$ , seuls les fils qui passent à l'intérieur de  $\Gamma$  vont donner une contribution  $\mu_0 I_i$ , et donc

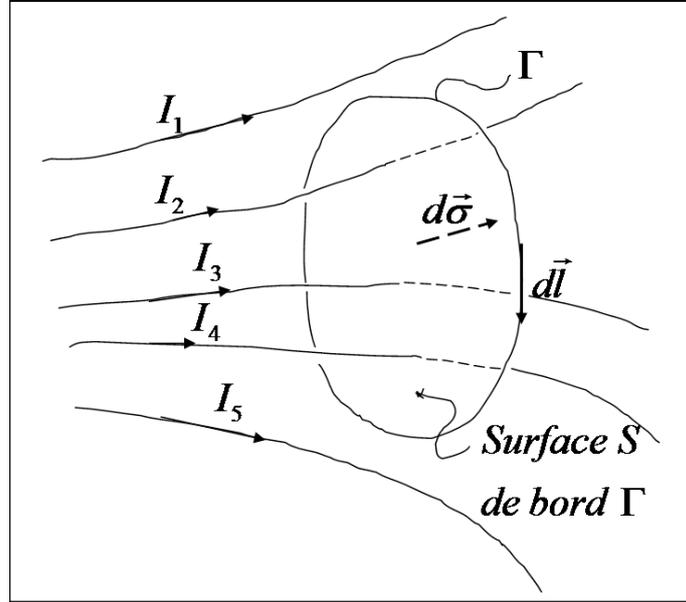


FIG. 12 – Circulation du champ  $\vec{B}$  créé par plusieurs fils

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_S}, \quad (53)$$

où  $I_S$  est le courant total qui passe à travers  $S$ , surface de bord  $\Gamma$ . C'est la **loi d'Ampère**. Par convention, on définira un sens de parcours positif le long de  $\Gamma$  de telle sorte que le sens du courant positif satisfasse la "règle de la vis".

Dans le cas d'une densité de courant  $\vec{j}(\vec{x})$ , on a  $I_S = \int \int_S \vec{j} \cdot d\vec{\sigma}$ , et la loi d'Ampère s'écrit :

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int \int_S \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{\sigma}}. \quad (54)$$

Il faut prendre garde à l'orientation relative de  $d\vec{l}$  et  $d\vec{\sigma}$ , qui par convention est selon la "règle de la vis".

La loi d'Ampère est vraie pour tout parcours  $\Gamma$  choisi arbitrairement. Avec le théorème de Stokes

$$\oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int \int_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{\sigma} \quad (55)$$

appliqué au membre de gauche de la loi d'Ampère avec  $\vec{v} = \vec{B}$ , on a

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}}, \forall \vec{x}. \quad (56)$$

Une autre propriété du champ magnétique est la **non-existence de monopôles magnétiques**. Mathématiquement, cela s'exprime de la façon suivante. Soit  $\vec{B}(\vec{x})$  le champ magnétique créé par une densité de courant quelconque  $\vec{j}(\vec{x})$ . Soit  $S$  une surface **fermée** quelconque. Alors le flux de  $\vec{B}$  à travers  $S$  est nul :

$$\boxed{\int \int_S \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = 0} . \quad (57)$$

C'est la **loi de Gauss pour le champ magnétique**. En utilisant le théorème de Gauss (de la divergence), on a

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0} , \forall \vec{x} . \quad (58)$$

Cette propriété implique que les lignes de champ  $\vec{B}$  sont soit refermées sur elles-mêmes, soit de longueur infinie.

**Les Eqs.(56)(58) sont les équations fondamentales de la magnétostatique.** On remarque qu'elles peuvent s'obtenir à partir du cas général des Eqs de Maxwell (1)(c) (d) en posant  $\partial/\partial t = 0$ .

### 3.3 Biot-Savart. Potentiel vecteur

Dans cette section, nous obtenons la solution explicite des équations de la magnétostatique, Eqs.(56)(58), autrement dit le champ  $\vec{B}(\vec{x})$  pour une densité de courant  $\vec{j}(\vec{x})$  donnée.

De l'identité vectorielle  $\nabla \cdot \nabla \times \vec{v} = 0, \forall \vec{v}$  et de l'Eq.(58), on conclut qu'il existe un champ  $\vec{A}(\vec{x})$ , appelé **potentiel vecteur**, tel que

$$\boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}} \forall \vec{x} . \quad (59)$$

N'importe quel choix de  $\vec{A}(\vec{x})$  satisfait automatiquement l'Eq.(58). On remarque que si  $\vec{A}(\vec{x})$  est un potentiel vecteur, alors  $\vec{A}'(\vec{x}) = \vec{A}(\vec{x}) + \nabla f$  est aussi un potentiel vecteur, pour toute fonction scalaire  $f$  arbitrairement choisie (car  $\nabla \times \nabla f = 0, \forall f$ ). Le libre choix de  $f$  s'appelle "invariance de jauge". En particulier,  $\nabla \cdot \vec{A}' = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla^2 f$ , avec  $f$  arbitrairement choisi, donc  $\nabla^2 f$  est librement choisi, ce qui veut dire que l'on peut choisir  $\nabla \cdot \vec{A}$  librement. Un choix possible est

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{A} = 0} , \quad (60)$$

appelé "jauge de Coulomb". Insérant (59) dans (56), on a

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} .$$

Utilisant l'identité vectorielle  $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$  et la jauge de Coulomb (60), on obtient

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}} . \quad (61)$$

Chaque composante (cartésienne) de  $\vec{A}$  obéit à une équation qui a la même structure formelle que l'Eq. de Poisson, Eq.(21), ( $\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0$ ), dont la solution est l'Eq.(43). Remplaçant formellement  $\rho/\varepsilon_0$  par  $\mu_0 \vec{j}$ , on a alors

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \int \frac{\vec{j}(\vec{x}') d^3 x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (62)$$

Il reste à obtenir  $\vec{B}$  en effectuant (59) :

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \int \nabla \times \left( \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) d^3 x'.$$

L'opérateur  $\nabla$  contient des dérivées par rapport à  $\vec{x}$ , mais PAS par rapport à  $\vec{x}'$  (qui est la variable d'intégration). C'est-à-dire que  $\vec{x}'$  est une constante du point de vue de l'opérateur  $\nabla$ . Donc  $\vec{j}(\vec{x}')$  est aussi une constante du point de vue de l'opérateur  $\nabla$ . Utilisant l'identité vectorielle  $\nabla \times (f\vec{v}) = \nabla f \times \vec{v} + f\nabla \times \vec{v}$ , on a

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \int \nabla \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \times \vec{j}(\vec{x}') d^3 x'.$$

Or,

$$\nabla \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = \frac{-\vec{e}_r}{r^2}, \quad \vec{r} = \vec{x} - \vec{x}',$$

donc

$$\boxed{\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \int \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times \vec{e}_r}{r^2} d^3 x'}. \quad (63)$$

C'est la **formule de Biot-Savart**. Dans le cas d'une boucle de courant (fil mince), courbe  $\Gamma$ , courant  $I$ ,  $\vec{j} d^3 x' = I d\vec{l}' = I \vec{e}_t dl'$  et on a, de (62)(63) :

$$\boxed{\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{d\vec{l}'}{r}}, \quad \boxed{\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{\vec{e}_t \times \vec{e}_r}{r^2} dl'}, \quad (64)$$

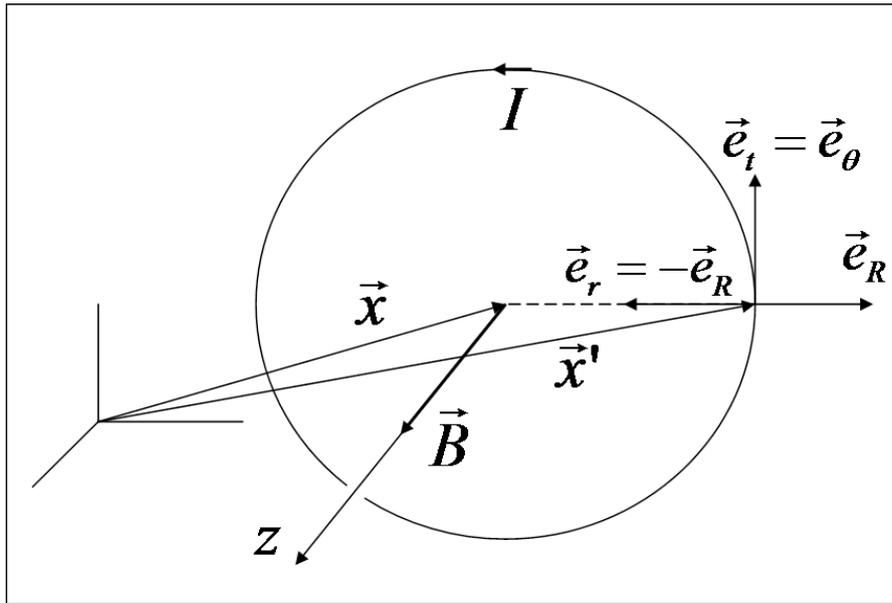
où  $\vec{e}_t$  est le vecteur unité tangent au fil en tout point.

### 3.4 Applications

**Application de Biot-Savart : champ  $\vec{B}$  au centre d'un fil circulaire.**

Soit une boucle de courant circulaire de rayon  $R$ , courant  $I$ , voir Figure 13. Calculons le champ  $\vec{B}$  créé par ce courant. Plaçons  $\vec{x}$  au centre du cercle.  $\vec{x}'$  est un point sur le fil. Soit les coordonnées cylindriques  $(R, \theta, z)$ . On a alors

$$\vec{e}_t = \vec{e}_\theta, \quad \vec{e}_r = (\vec{x} - \vec{x}')/r = -\vec{e}_R, \quad dl = R d\theta, \quad r = R.$$

FIG. 13 – Calcul de  $\vec{B}$  au centre d'un fil circulaire

La formule de Biot-Savart (64) donne

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\vec{e}_\theta \times (-\vec{e}_R)}{R^2} R d\theta = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{e}_z .$$

On constate que la direction de  $\vec{B}$  suit la “règle de la vis” par rapport à celle du courant  $I$ . On a les propriétés : (1) l'intensité de  $B$  est proportionnelle au courant  $I$  ; (2) l'intensité de  $B$  est inversement proportionnelle au rayon  $R$ . On vérifie ces propriétés par des expériences. En exercice : champ  $\vec{B}$  sur l'axe de symétrie, mais en  $z \neq 0$ .

### Trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique

Soit un champ  $\vec{B}$  uniforme et une particule de masse  $m$ , charge  $q$ . On a les équations :

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} , \quad (65)$$

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} . \quad (66)$$

Donc

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m} \vec{v} \times \vec{B} ; . \quad (67)$$

Projetons  $\vec{v}$  dans les directions  $\parallel$  et  $\perp$  à  $\vec{B}$  :

$$\vec{v}(t) = v_{\parallel}(t)\vec{e}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}(t) . \quad (68)$$

Multipliant scalairement (67) par  $\vec{e}_{\parallel} = \vec{B}/B$ , on obtient  $dv_{\parallel}/dt = 0$ , donc

$$v_{\parallel}(t) = \text{const} = v_{\parallel 0} . \quad (69)$$

Multipliant scalairement (67) par  $\vec{v}$ , on a

$$\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m} \vec{v} \cdot \vec{v} \times \vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(v^2) = 0 \Rightarrow |\vec{v}| = \text{const.} \quad (70)$$

De (69)(70), on tire

$$v_{\perp}^2 = v^2 - v_{\parallel}^2 = \text{const} \Rightarrow |v_{\perp}| = \text{const}, \quad (71)$$

(mais  $\vec{v}_{\perp} \neq \text{const}!$ ). Projetant (67) dans le plan  $\perp$ , on a l'accélération normale

$$|a_N| = \frac{|q|}{m} |v_{\perp}| B = \text{const}.$$

Donc le mouvement projeté dans le plan  $\perp$  est **circulaire uniforme**. Soit  $r_L$  le rayon de la trajectoire dans le plan  $\perp$ . On a, de la cinématique (cours de 1e année)  $|a_N| = v_{\perp}^2/r_L$ . Donc,

$$\frac{v_{\perp}^2}{r_L} = \frac{|q||v_{\perp}|B}{m} \Rightarrow \boxed{r_L = \frac{m|v_{\perp}|}{|q|B}}. \quad (72)$$

Ceci s'appelle le **rayon de Larmor**, ou rayon de gyration, de la particule. La fréquence angulaire  $\omega_c$  de ce mouvement circulaire uniforme s'appelle **fréquence angulaire cyclotronique** et s'obtient à partir de  $v_{\perp} = \omega_c r_L$ , donc

$$\boxed{\omega_c = \frac{v_{\perp}}{r_L} = \frac{|q|B}{m}}. \quad (73)$$

Notons que les charges + et - n'ont pas le même sens de gyration (Figure 14). Le mou-

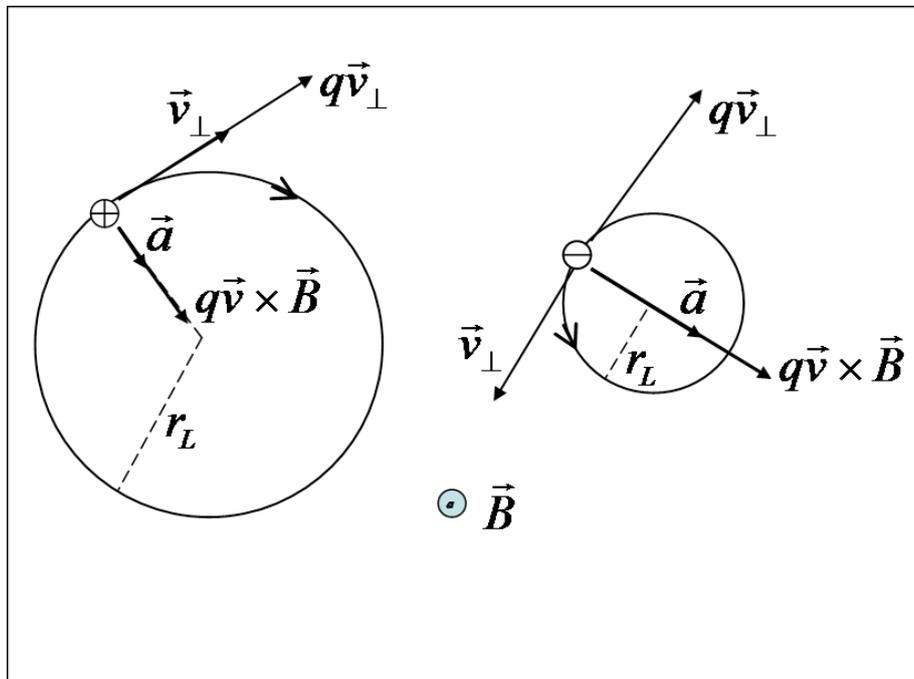


FIG. 14 – Particules + et - dans un champ  $\vec{B}$ ; projection dans le plan  $\perp \vec{B}$ .

vement de la charge définit un courant, qui lui-même crée un champ magnétique qui, si

on applique la “règle de la vis”, s’oppose au champ  $\vec{B}$ . Si on considère un ensemble de charges, le champ créé par leur mouvement de gyration va diminuer le champ résultant : c’est *l’effet diamagnétique* (voir plus loin).

En résumé, la trajectoire d’une particule dans un champ  $\vec{B}$  uniforme est une hélice, le mouvement  $\parallel$  est uniforme, le mouvement  $\perp$  est circulaire uniforme, de rayon  $r_L$ , fréquence angulaire  $\omega_c$ . Voir expériences du cours.

Quelques applications.

(a) Spectromètre de masse : connaissant  $B$ ,  $v_{\perp}$ ,  $q$ , et mesurant le rayon de la trajectoire  $r_L$ , on en déduit la masse :  $m = |q|Br_L/v_{\perp}$ .

(b) Cyclotron : pour “stocker” des particules chargées très énergétiques.

(c) Fusion par confinement magnétique : le champ  $\vec{B}$  empêche les particules de fuir dans la direction  $\perp$ . P.ex. dans le tokamak TCV du CRPP, les électrons parcourent, au  $1/5e$  de la vitesse de la lumière, plusieurs kilomètres dans le champ magnétique de la machine, qui n’a que 2m de diamètre.

(d) Effet Hall : cet effet est utilisé pour mesurer le champ magnétique. La figure 15 montre le principe d’une sonde à effet Hall. Une barre conductrice, rectiligne, de section  $a \times b$  est

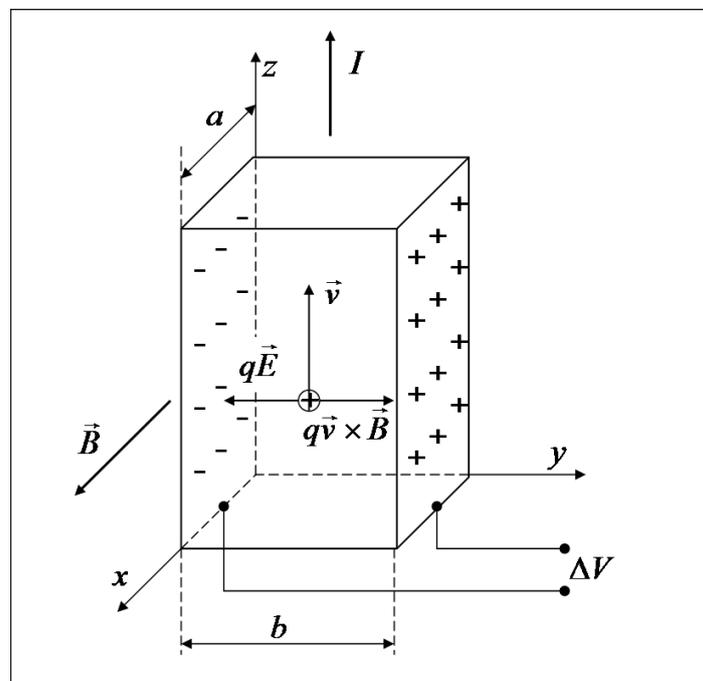


FIG. 15 – Effet Hall.

parcourue par un courant  $I$  donné (dir.  $z$ ) dans un champ magnétique  $\vec{B}$  (dir.  $x$ ). L’effet

de la force  $q\vec{v} \times \vec{B}$  sur les porteurs de courant va les faire dévier dans la direction  $y$ . Il y aura excédent de charges + d'un côté de la barre, et - de l'autre. Donc apparition d'un champ électrique  $\vec{E}$ . L'équilibre est atteint lorsque les porteurs de charges ne ressentent plus de force, donc lorsque

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}.$$

Un calcul montre (exercice) que la différence de potentiel  $\Delta V$  entre les faces dans la direction  $y$  est

$$\Delta V = \frac{\vec{I} \times \vec{B}}{nqa} \cdot \vec{e}_y = \frac{I_z B_x}{nqa},$$

où  $n$  est la densité numérique des porteurs de charge. Le signe de  $\Delta V$  donne le signe des porteurs de charge. L'expérience dans l'or, l'argent ou le cuivre, donne  $\Delta V < 0$ , ce qui est compatible avec l'idée que le courant est porté par les électrons dans ces métaux. Par contre, l'expérience dans le cobalt, le zinc ou certains semi-conducteurs donne  $\Delta V > 0$ . En fait, les charges libres dans ces matériaux ne sont pas positives, et donc ce résultat ne peut PAS être expliqué par la théorie classique abordée dans ce cours. (C'est un effet quantique).

### 3.5 Dipôle magnétique

**Déf. :** Un dipôle magnétique est une boucle de courant  $I$  de surface (plane)  $S$ . (Les dimensions du dipôle sont ainsi  $\sim S^{1/2}$ ).

**Déf. :** Le moment magnétique dipolaire,  $\vec{\mu}$ , est

$$\boxed{\vec{\mu} = IS\vec{e}_n}, \quad (74)$$

où  $\vec{e}_n$  est le vecteur-unité normal à  $S$ , orienté (par rapport au sens du courant  $I$ ) selon la "règle de la vis". Voir Figure 16. Unités :  $[m^2 A]$ .

**Champ dipolaire.** A partir de la formule de Biot-Savart, Eq.(64), on peut montrer que le champ magnétique créé par le dipôle, à des distances  $r \gg d$ , est, en coordonnées sphériques,

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 |\vec{\mu}|}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)}. \quad (75)$$

Les calculs seront présentés dans un document annexe. On remarque la dépendance en  $1/r^3$  pour l'intensité du champ magnétique, comme cela a été constaté pour le champ électrique dipolaire. La différence avec le champ électrique dipolaire, est que les lignes de champ magnétique dipolaire se referment sur elles-mêmes. Le résultat ci-dessus est *indépendant de la forme de la boucle de courant* pour des distances  $r \gg d$ .

**Couple de forces sur un dipôle magnétique dans un champ  $\vec{B}^{ext}$  donné.** Plaçons des axes  $(x, y, z)$  tel que  $(x, y)$  soit dans le plan du dipôle, et  $z$  parallèle au moment

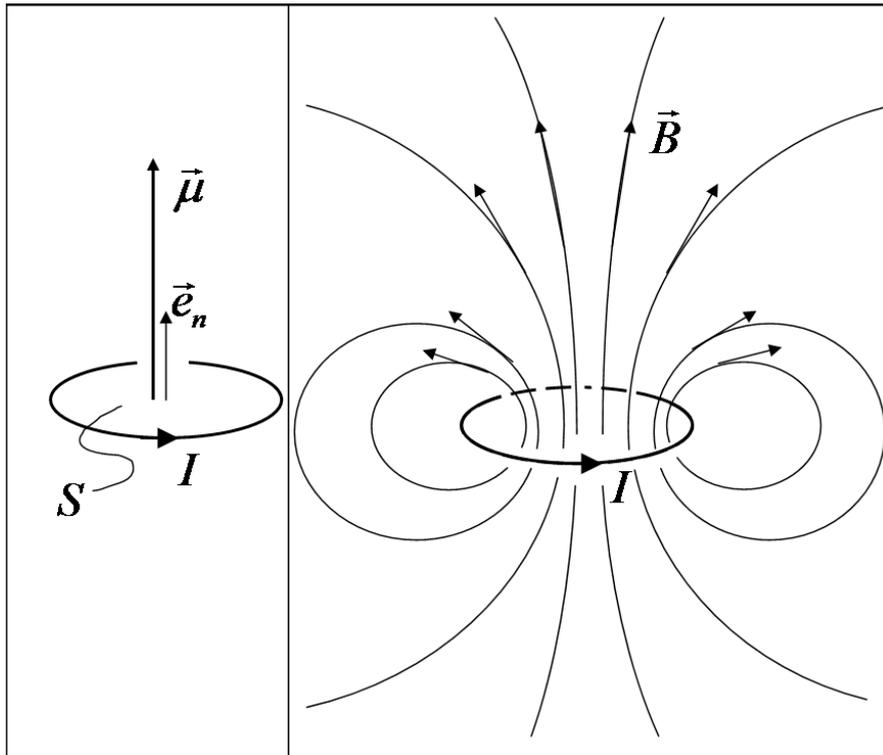
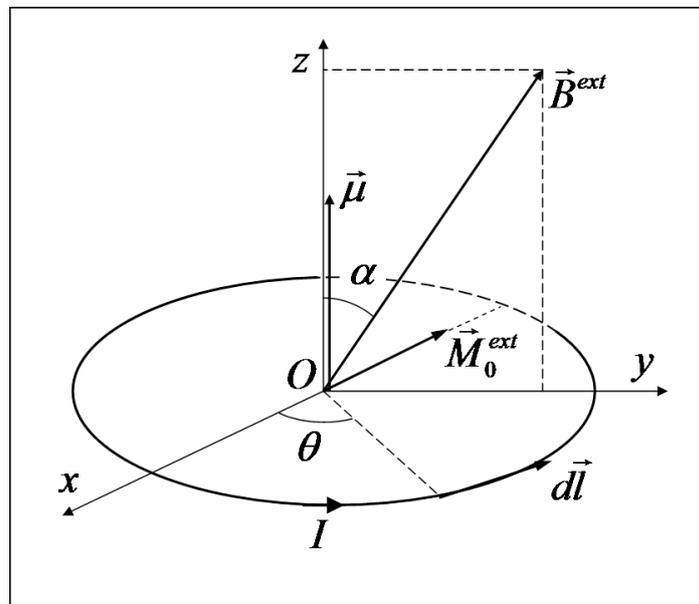


FIG. 16 – Dipôle magnétique et champ dipolaire.

dipolaire  $\vec{\mu}$  (Voir Figure 17). Soit  $\alpha$  l'angle entre  $\vec{\mu}$  et  $\vec{B}^{ext}$ . Soit  $d\vec{l}$  un petit élément de

FIG. 17 – Calcul du couple de forces sur un dipôle magnétique dans un champ  $\vec{B}^{ext}$ .

la boucle de courant, de position  $\vec{r}$  donnée par l'angle  $\theta$ . Cet élément subit une force  $I d\vec{l} \times \vec{B}^{ext}$ . Le moment de forces résultant est la somme des moments de force sur chacun

des éléments de la boucle de courant :

$$\vec{M}_O^{ext} = \oint_{\Gamma} \vec{r} \times (I d\vec{l} \times \vec{B}^{ext}) . \quad (76)$$

Avec

$$\begin{aligned} \vec{B}^{ext} &= B^{ext} (\sin \alpha \vec{e}_y + \cos \alpha \vec{e}_z) , \\ d\vec{l} &= r d\theta \vec{e}_\theta = r d\theta (-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y) , \\ \vec{r} &= r (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) , \end{aligned}$$

on a :

$$\vec{M}_O^{ext} = \int_0^{2\pi} I B^{ext} r^2 \sin \alpha (-\sin^2 \theta \vec{e}_x + \sin \theta \cos \theta \vec{e}_y) d\theta = -I \pi r^2 B^{ext} \sin \alpha \vec{e}_x .$$

Or,  $\pi r^2 = S$ , surface du dipôle, et avec la définition du moment magnétique dipolaire, Eq.(74),

$$\boxed{\vec{M}_O^{ext} = \vec{\mu} \times \vec{B}^{ext}} . \quad (77)$$

Un dipôle magnétique plongé dans un champ  $\vec{B}^{ext}$  subit un couple de forces qui tend à faire basculer  $\vec{\mu}$  dans la direction de  $\vec{B}^{ext}$ .

Un dipôle magnétique dans un champ  $\vec{B}^{ext}$  a ainsi une énergie potentielle

$$\boxed{E_{pot} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}^{ext}} . \quad (78)$$

En effet, pour faire tourner (lentement, quasi-statique) le dipôle d'un angle  $d\alpha$ , il faut

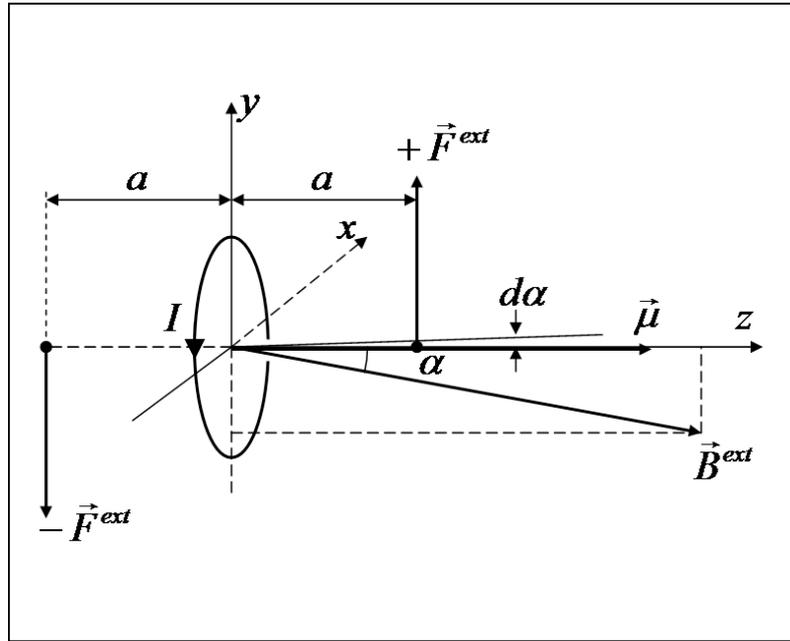


FIG. 18 – Calcul de l'énergie potentielle d'un dipôle magnétique dans un champ  $\vec{B}^{ext}$ .

appliquer un couple de forces ( $\vec{F}^{ext}, -\vec{F}^{ext}$ ) sur le dipôle, tel que la somme des couples

de forces soit 0. Si les points d'application de  $\vec{F}^{ext}$  et  $-\vec{F}^{ext}$  sont en  $z = +a$  et  $z = -a$  (Figure 18) et l'axe  $x$  parallèle à  $\vec{\mu} \times \vec{B}^{ext}$ , on a  $\vec{F}^{ext} = F_y^{ext} \vec{e}_y$  et la condition  $\sum \vec{M}_O^{ext} = 0$  donne

$$|\vec{\mu}| B^{ext} \sin \alpha = 2a F_y^{ext} .$$

Le travail de ce couple de forces est  $\delta W = 2\vec{F}^{ext} \cdot \vec{dr}$ , avec  $\vec{dr} = a d\alpha \vec{e}_y$ . Donc,

$$\delta W = 2F_y^{ext} a d\alpha = |\vec{\mu}| B^{ext} \sin \alpha d\alpha .$$

Le travail pour aller d'un angle  $\alpha_0$  à l'angle  $\alpha$  est

$$\Delta W|_{\alpha_0}^{\alpha} = \int_{\alpha_0}^{\alpha} |\vec{\mu}| B^{ext} \sin \alpha d\alpha = -|\vec{\mu}| B^{ext} (\cos \alpha - \cos \alpha_0) = [-\vec{\mu} \cdot \vec{B}^{ext}]_{\alpha_0}^{\alpha}$$

L'énergie potentielle existe, car le travail ci-dessus ne dépend pas du chemin parcouru, mais seulement des points de départ et d'arrivée. Elle peut être choisie à une constante arbitraire près. Si on choisit  $\alpha_0 = \pi/2$ , on a  $E_{pot} = \Delta W|_{\pi/2}^{\alpha} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}^{ext}$ .

### Application : moment dipolaire magnétique et moment cinétique.

Dans le modèle classique le plus simple de l'atome, les électrons sont des points matériels en orbite circulaire, rayon  $r$ , vitesse angulaire  $\omega$ , autour du noyau. Le passage de l'électron  $\omega/2\pi$  fois par seconde représente un courant  $I = -e\omega/2\pi$ . Le moment magnétique de cette boucle circulaire de courant est donc

$$|\vec{\mu}| = |I|S = \frac{e\omega}{2\pi} \pi r^2 = \frac{1}{2} e\omega r^2 .$$

Le moment cinétique de l'électron, par rapport au noyau, est

$$|\vec{L}| = rm|\vec{v}| = m\omega r^2 .$$

Donc

$$|\vec{\mu}| = \frac{e}{2m} |\vec{L}| .$$

Or, en plus de ce moment cinétique, appelé *orbital*, les particules ont un moment cinétique *intrinsèque*,  $\vec{S}$ , appelé *spin*. Dans une théorie classique, on imagine la particule non pas ponctuelle, mais constituée d'une densité de charge avec une taille finie, en rotation sur elle-même. Il existe donc un moment magnétique  $\vec{\mu}_s$  associé à ce spin. La relation entre  $\vec{\mu}_s$  et  $\vec{S}$  dépend de la structure interne de la particule. On écrit

$$|\vec{\mu}_s| = g_s \frac{e}{2m} |\vec{S}| ,$$

où  $g_s$  est appelé "facteur de spin de Landé" ou "facteur  $g$ ". Le calcul de  $g_s$  a été fait avec la théorie de l'électrodynamique quantique. Pour l'électron, on a obtenu

$$g_s = 2.0023193043737 ,$$

valeur confirmée par l'expérience à une précision relative d'au moins  $10^{-12}$ .

**Application : RMN.** Les noyaux atomiques ont un moment magnétique  $\vec{\mu}$  et un moment cinétique  $\vec{L}_O$  (spin  $\vec{S}$ ). Dans un champ  $\vec{B}^{ext}$  ils subissent un couple de forces, et on a l'équation du mouvement

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{ext} ,$$

qui est celle du gyroscope. Le couple de forces  $\vec{M}_0 = \vec{\mu} \times \vec{B}^{ext}$  fait précessionner le noyau atomique à une vitesse angulaire  $\vec{\Omega}$  parallèle à  $\vec{B}^{ext}$ . On a donc

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}_O = \vec{\mu} \times \vec{B}^{ext} ,$$

qui résulte donc, avec  $\vec{\Omega} \parallel \vec{B}^{ext}$  et  $\vec{L}_O \parallel \vec{\mu}$ ,

$$|\vec{\Omega}| = \frac{|\vec{\mu}|}{|\vec{L}_O|} |\vec{B}^{ext}| .$$

Avec  $\vec{\mu} = g_s(q_\alpha/2m_\alpha)\vec{L}_O = \gamma\vec{L}_O$  ( $\gamma$  est appelé rapport gyromagnétique), on a donc

$$|\Omega| = g_s \frac{q_\alpha \vec{B}^{ext}}{2m_\alpha} = \frac{g_s}{2} \omega_{c\alpha} ,$$

avec  $\omega_{c\alpha}$  la fréquence cyclotronique (voir Section 3.4).

$\Omega$  est la fréquence propre de résonance magnétique, caractéristique du type d'atome considéré. En excitant les atomes à cette fréquence propre  $\Omega$ , on excitera une résonance, et on détecte le signal réémis par les noyaux atomiques lors de leur relaxation.

### 3.6 Magnétisme dans la matière

On a 3 possibilités.

1. Les molécules ou atomes n'ont pas de moment magnétique permanent. En l'absence de  $\vec{B}^{ext}$ , la matière ne crée pas de champ magnétique. En présence de champ magnétique, les moments dipolaires induits seront dans la direction **opposée** à  $\vec{B}^{ext}$ , et le champ magnétique à l'intérieur du morceau de matière est **réduit**. Ce sont les substances **diamagnétiques**.
2. Les molécules ou atomes ont un moment magnétique permanent. De plus, en l'absence de  $\vec{B}^{ext}$ , ils sont orientés aléatoirement uniformément dans toutes les directions, donc en moyenne le champ créé par ces dipôles sera nul. En présence de champ magnétique, les moments dipolaires permanents ont tendance à s'aligner **dans la même direction que  $\vec{B}^{ext}$** , et le champ magnétique à l'intérieur du morceau de matière est **renforcé**. Ce sont les substances **paramagnétiques**.

3. Les molécules ou atomes ont un moment magnétique permanent et ont **naturellement tendance à s'aligner** sous l'effet de leurs interactions mutuelles, **même en l'absence de  $\vec{B}^{ext}$** . Ce sont les substances ferromagnétiques, dont sont faits les aimants permanents.

**Exemple : diamagnétisme des particules libres.** On a vu que la trajectoire d'une particule libre dans un champ magnétique extérieur  $\vec{B}^{ext}$ , projetée dans un plan  $\perp$ , était un cercle de rayon  $r_L$ , rayon de Larmor, Eq.(72), parcouru à la vitesse angulaire  $\omega_c$ , fréquence cyclotronique, Eq.(73). En assimilant ce mouvement à une boucle circulaire de courant, on calcule son moment magnétique dipolaire :

$$\vec{\mu} = \frac{-mv_{\perp}^2}{2|B^{ext}|} \vec{e}_{\parallel}, \quad (79)$$

où  $\vec{e}_{\parallel}$  est le vecteur unité de direction  $\vec{B}^{ext}$ . Ce moment dipolaire (induit par la présence de  $\vec{B}^{ext}$ ) crée un champ magnétique dipolaire, Eq.(75) et Figure 16, qui **s'oppose à  $\vec{B}^{ext}$** . Si on considère un grand nombre de particules chargées libres, le champ résultant sera (en moyenne spatiale) de norme **inférieure à  $|\vec{B}^{ext}|$** .

**Aimantation  $\vec{\mathcal{M}}$ , courant de surface lié  $\vec{j}_s^{lie}$  et champ magnétisant  $\vec{H}$ .**

But : description d'un morceau de matière contenant  $N \gg 1$  molécules et de son interaction avec le champ magnétique. On décrira les champs **macroscopiques**, moyennes spatiales des champ **microscopiques**. Le but est d'introduire un champ  $\vec{H}$  qui ne dépende que des **courants libres**.

**Déf. : aimantation.** Moment magnétique moyen par unité de volume :

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{\sum_{\alpha} \vec{\mu}_{\alpha}}{\Delta V}. \quad (80)$$

Unités [ $Am^{-1}$ ], soit un *courant par unité de longueur*.

Considérons une "tranche" de matière de longueur  $L$ , section  $S$ , contenant  $N$  atomes ayant un moment dipolaire (induit ou permanent), Figure 19 (gauche). Les courants des dipôles atomiques s'annulent avec ceux de leurs plus proches voisins. Sauf à la surface latérale du morceau, où ceux-ci vont s'additionner pour donner un courant de surface non-nul,  $\vec{j}_s^{lie}$ , Figure 19 (droite) . A l'échelle macroscopique, la tranche de matière est un dipôle magnétique, de surface  $S$ , portant un courant  $I = |\vec{j}_s^{lie}|L$ . Donc le moment magnétique dipolaire de la tranche est, par définition (74),

$$\vec{\mu}^{tot} = IS\vec{e}_n = |\vec{j}_s^{lie}|LS\vec{e}_n.$$

Or, l'aimantation (80) est définie comme le moment magnétique dipolaire par unité de volume :

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{N \langle \vec{\mu} \rangle}{LS} = \frac{\vec{\mu}^{tot}}{LS}.$$

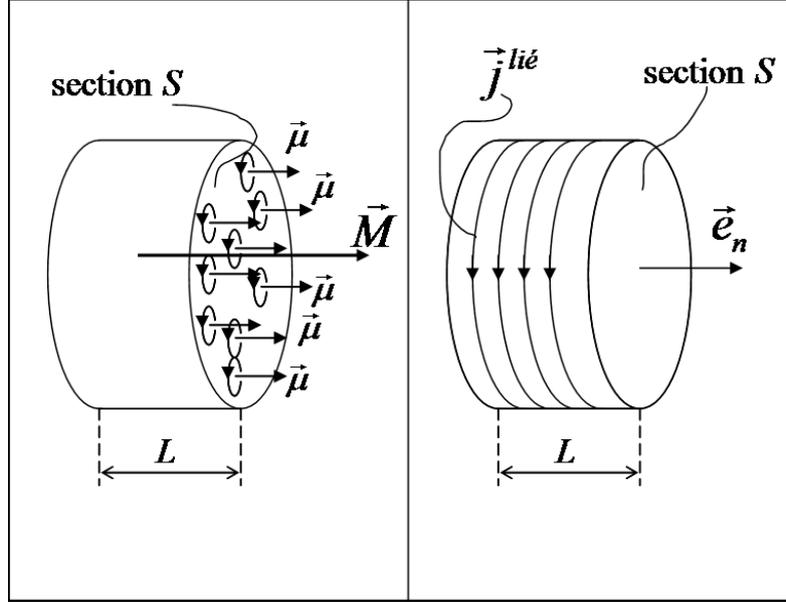


FIG. 19 – Tranche de matière avec dipôles magnétiques microscopiques (gauche). Description comme dipôle macroscopique avec courants de surface  $\vec{j}_s^{lie}$  (droite).

On en tire

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}} = |\vec{j}_s^{lie}| \vec{e}_n}. \quad (81)$$

L'orientation de  $\vec{j}_s^{lie}$  et de  $\vec{\mathcal{M}}$  est donnée par la “règle de la vis”.

Plaçons maintenant la tranche de matière dans une bobine (solénoïde) ayant un courant par unité de longueur  $\vec{j}^{libre}$ , Figure 20). La tranche de matière est aimantée ( $\vec{\mathcal{M}} \neq 0$ ), soit parce que c'est un ferromagnétique avec aimantation permanente, soit parce que le champ  $\vec{B}^{libre}$  (créé par  $\vec{j}^{libre}$ ) provoque un alignement (si paramagnétique) ou un anti-alignement (si diamagnétique) moyen des dipôles microscopiques. Schématiquement :

$$\vec{j}^{libre} \rightarrow \vec{B}^{libre} \rightarrow \vec{\mathcal{M}} \leftrightarrow \vec{j}^{lie} \rightarrow \vec{B}^{lie}$$

Comment calculer le champ résultant  $\vec{B} = \vec{B}^{libre} + \vec{B}^{lie}$ ? Utilisons la loi d'Ampère, Eq.(54) :  $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int \int_S \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{\sigma}$ . Choisissons le parcours  $\Gamma$  (voir Figure 20). Plaçons un axe  $z$  parallèle à  $\vec{B}$ . Comme  $\vec{B} \approx 0$  à l'extérieur du solénoïde,

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_z L.$$

$I_S = \int \int_S \vec{j} \cdot d\vec{\sigma}$  est le courant à travers  $S$ .

$$I_S = (j_{\theta}^{lie} + j_{\theta}^{libre})L$$

et substituant dans la loi d'Ampère (54) :

$$B_z L = \mu_0 (j_{\theta}^{lie} + j_{\theta}^{libre})L$$

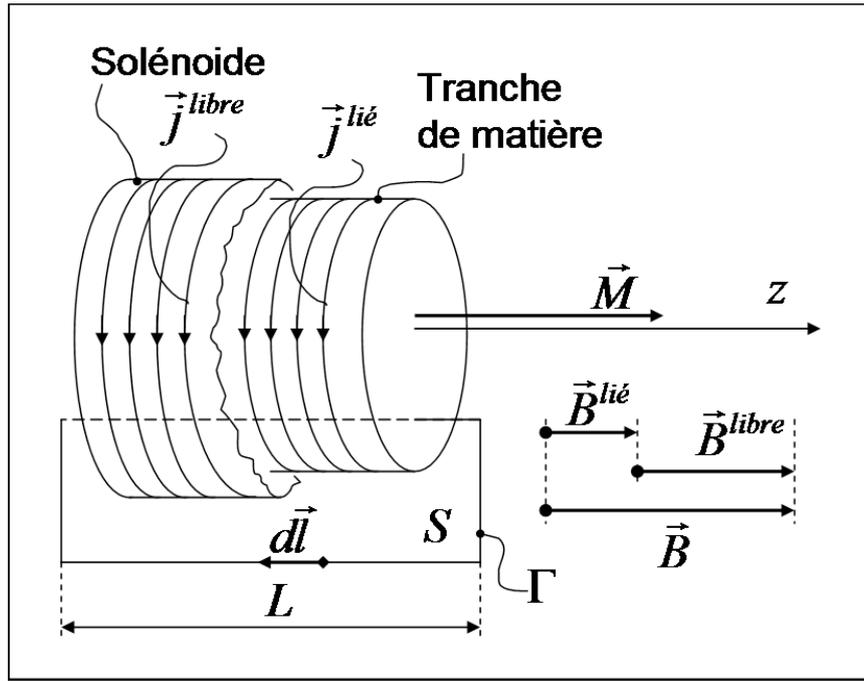


FIG. 20 – Tranche de matière dans un solénoïde.

Or, Eq.(81),  $\Rightarrow j_{\theta}^{\text{lié}} = \mathcal{M}_z$ . Donc

$$j_{\theta}^{\text{libre}} = \frac{1}{\mu_0} B_z - \mathcal{M}_z .$$

Donc, en définissant le champ

$$\boxed{\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{\mathcal{M}}}, \quad (82)$$

on obtient

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_S^{\text{libre}}}. \quad (83)$$

Ceci étant vrai pour toute surface  $S$  de bord  $\Gamma$ , on a, avec le théorème de Stokes,

$$\boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{j}^{\text{libre}}}. \quad (84)$$

Le champ  $\vec{H}$  s'appelle **champ magnétisant**. Unités :  $[Am^{-1}]$ . Les eqs (83) ou (84) sont la **loi d'Ampère pour le champ magnétisant**  $\vec{H}$  défini par (82). Cette loi montre que le champ  $\vec{H}$  est créé par les courants **libres** et ne dépend donc pas des courants liés à l'aimantation de la matière.

### Relations empiriques entre aimantation et champ magnétisant.

Le calcul théorique de l'aimantation  $\vec{\mathcal{M}}$  d'une substance donnée est très complexe. On adopte ici une démarche phénoménologique (ou empirique, c.a.d. inspirée de l'expérience).

Le modèle le plus simple, valable pour les dia- et para-magnétiques, suppose que  $\vec{\mathcal{M}}$  est proportionnel à  $\vec{H}$ . Dans notre exemple de la Figure 20, plus le courant dans le solénoïde est élevé, plus le champ  $|\vec{B}^{libre}|$  est élevé et plus les dipôles ont tendance à s'aligner, soit dans la direction opposée à  $\vec{B}^{libre}$  si c'est un diamagnétique, soit dans la même direction que  $\vec{B}^{libre}$  si c'est un paramagnétique. On pose :

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}} = \chi_m \vec{H}}, \quad (85)$$

avec  $\chi_m$  la **susceptibilité magnétique**, d'unités sans dimensions, dont la valeur est typique de la substance considérée. Pour un diamagnétique,  $\chi_m < 0$ . Pour un paramagnétique,  $\chi_m > 0$ . Avec la définition du champ  $\vec{H}$ , Eq.(82), on a donc

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{\mathcal{M}}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}}. \quad (86)$$

On donne les définitions :

$\mu_r = 1 + \chi_m$  : perméabilité relative, unités sans dimensions.

$\mu = \mu_0 \mu_r$  : perméabilité, unités  $[mkg^{-2}sA]$ .

Pour un diamagnétique,  $\mu_r < 1$ ,  $\Leftrightarrow \mu < \mu_0$ . Pour un paramagnétique,  $\mu_r > 1$ ,  $\Leftrightarrow \mu > \mu_0$ .

La figure 21 résume ces observations.

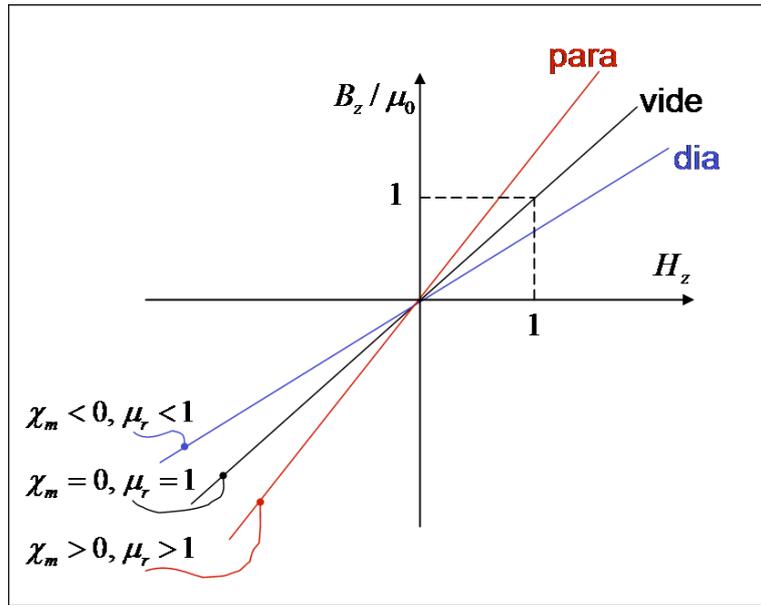


FIG. 21 – Mesure du champ magnétique en fonction du champ magnétisant, cas du vide, d'un diamagnétique et d'un paramagnétique.

Pour les ferromagnétiques, on ne peut pas utiliser le modèle linéaire ci-dessus. En effet, dans ces substances, on peut avoir  $\vec{\mathcal{M}} \neq 0$  même si  $\vec{H} = 0$ . Il y a une relation non linéaire, avec **hystérèse** : le champ magnétique dépend de l'histoire passée de la magnétisation. Lorsque  $H_z$  augmente à partir de 0, l'aimantation augmente, et le champ  $B_z$  augmente, jusqu'à ce que tous les dipôles soient alignés : c'est la *saturation*. Lorsque le champ

$H_z$  revient à zéro, il reste une aimantation non nulle, l'aimantation rémanente. Pour démagnétiser la substance, il faut appliquer un champ  $H_z$  en sens inverse jusqu'à une valeur appelée *champ démagnétisant*. La figure 22 résume ces observations. Notons que ces propriétés ont des conséquences pour les supports magnétiques d'information.

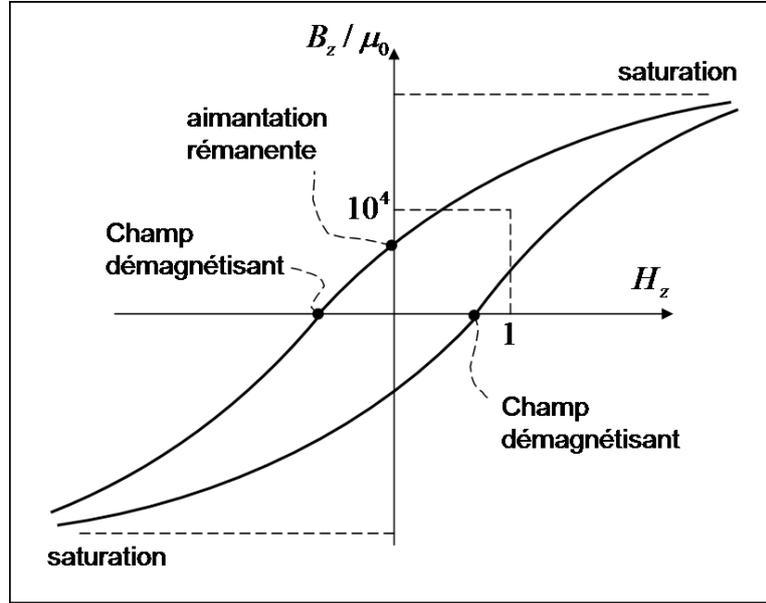


FIG. 22 – Mesure du champ magnétique en fonction du champ magnétisant, cas d'un ferromagnétique.

## 4 Induction

### 4.1 Champs EM dépendants du temps

Lorsque les champs EM varient dans le temps, cela implique un grand nombre de phénomènes nouveaux par rapport aux chapitres précédents. Par rapport aux équations de Maxwell, les nouveaux termes dépendants du temps sont ici encadrés :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & (a) & & \nabla \times \vec{E} &= \boxed{-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} & (b) \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & (c) & & \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} & (d) \end{aligned} \quad (87)$$

$$\rho = \rho(\vec{x}, \boxed{t}), \quad \vec{j} = \vec{j}(\vec{x}, \boxed{t}), \quad \vec{E} = \vec{E}(\vec{x}, \boxed{t}), \quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{x}, \boxed{t}). \quad (88)$$

Le nouveau terme dans (b) décrit le phénomène de l'induction, sujet de cette Section 4, alors que le nouveau terme dans (d) sera étudié à la Section 5.

## 4.2 Force électro-motrice et flux magnétique

**Déf. :** Soit un parcours fermé  $\Gamma$ . La circulation du champ  $\vec{E}$  le long de  $\Gamma$  est appelée **force électro-motrice**, souvent abrégée **f.e.m.** :

$$V_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} . \quad (89)$$

Unités : le **Volt**,  $[V]$ ,  $[kgm^2s^{-3}A^{-1}]$ .

**Déf. :** Soit une surface  $S$  de bord  $\Gamma$ . Le **flux magnétique** à travers  $S$  est

$$\Phi_m = \int \int_S \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} . \quad (90)$$

N.B. Toutes les surfaces ayant le même bord  $\Gamma$  ont le même flux magnétique. En effet, c'est la conséquence de la non existence de mono-pôles magnétiques,  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ; soit  $S'$  une autre surface de même bord  $\Gamma$ . Alors la réunion de  $S$  et  $S'$  crée une surface fermée pour laquelle on peut appliquer le théorème de la divergence, et

$$\int \int_S \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} + \int \int_{S'} \vec{B} \cdot (-d\vec{\sigma}) = 0 .$$

On peut donc aussi parler du flux de  $\vec{B}$  à travers le parcours fermé  $\Gamma$  : c'est le flux de  $\vec{B}$  à travers n'importe quelle surface ouverte  $S$  ayant pour bord  $\Gamma$ .

**Expérience d'induction.** Soit le montage de la figure 23. On observe  $V_{\Gamma} \neq 0$  lorsque

1. on bouge la bobine,
2. on change le courant  $I$ ,
3. on tourne la boucle ou on change sa surface,

autrement dit chaque fois que le flux magnétique  $\Phi_m$  à travers la boucle varie. De plus, on constate que  $V_{\Gamma}$  est proportionnel à la vitesse de variation de  $\Phi_m$ . Ceci est décrit par la **loi de l'induction de Faraday** :

$$V_{\Gamma} = -\frac{d\Phi_m}{dt} . \quad (91)$$

En utilisant les définitions (89)(90), on a

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \int_S \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} . \quad (92)$$

Pour une surface fixe  $S$ , on peut passer la dérivée temporelle à l'intérieur de l'intégrale de surface, et après utilisation du théorème de Stokes, on obtient

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} , \quad (93)$$

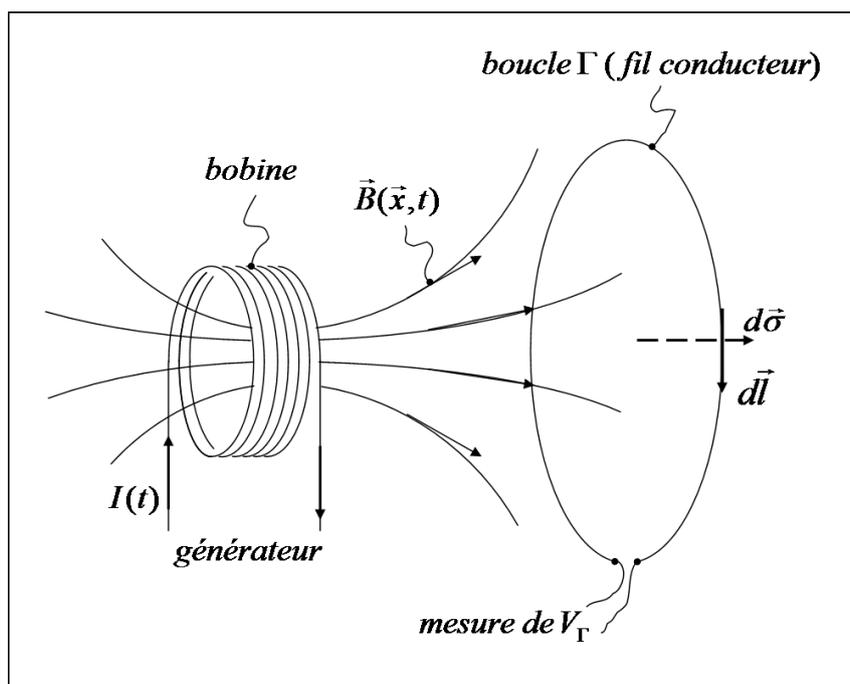


FIG. 23 – Expérience d'induction.

qui est bien l'Eq. de Maxwell (1)(b).

### Attention !

- à l'orientation relative de  $\vec{dl}$  et  $\vec{d\sigma}$ , selon la “règle de la vis”,
  - au signe “-” dans la loi de Faraday,
  - au fait que  $V_\Gamma$  n'est **PAS** un potentiel, car il dépend du chemin  $\Gamma$ , donc  $\vec{E} \neq -\nabla V_\Gamma$
- Applications :** le générateur AC, le transformateur AC, le betatron, etc.

Pour vérifier si on a les bons signes... on peut appliquer la “règle de Lenz” : le courant induit est toujours tel qu'il crée un flux magnétique qui s'oppose à la **variation** du flux magnétique extérieur. Voir figure 24.

## 4.3 Inductance

**Def. :** Soit un circuit  $\Gamma$  parcouru par un courant  $I$ . Soit  $\Phi_m$  le flux magnétique à travers  $\Gamma$  du champ  $\vec{B}$  créé par ce courant  $I$ . L'**auto-inductance**  $L$  du circuit est définie par

$$\boxed{\Phi_m = LI} . \quad (94)$$

Unités : le **Henry**,  $[H]$ ,  $[m^2 kgs^{-2} A^{-2}]$ . L'auto-inductance ne dépend que de la géométrie du circuit. (On remarque que la loi d'Ampère étant linéaire,  $|\vec{B}| \propto I$ , et donc  $\Phi_m \propto I$ ). Introduisant (94) dans la loi de Faraday, Eq.(91), on a

$$V_\Gamma = -\frac{d}{dt}(LI) = -L\frac{dI}{dt} - \frac{dL}{dt}I . \quad (95)$$

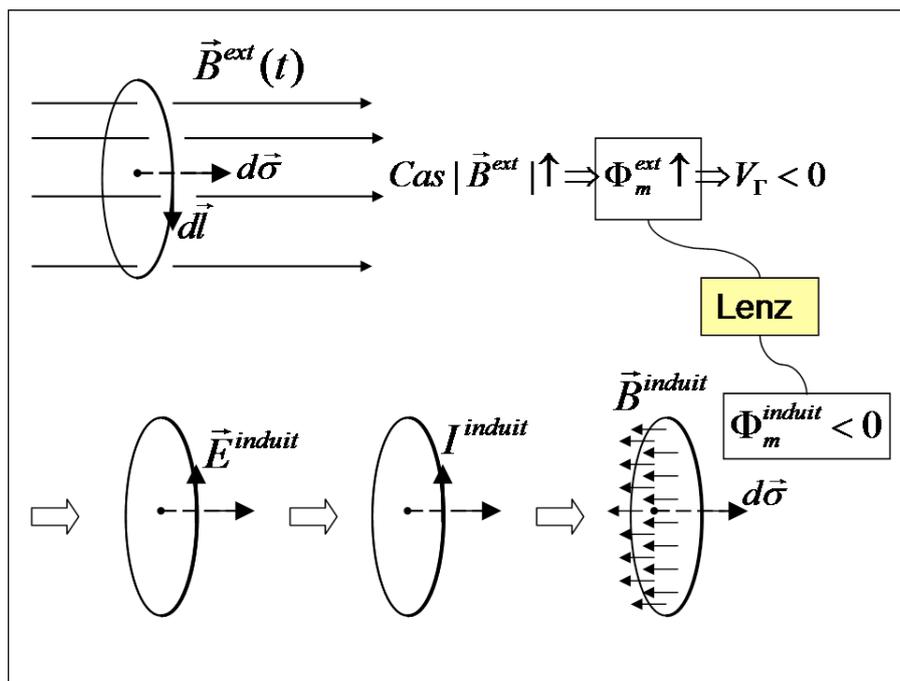


FIG. 24 – Règle de Lenz

Le deuxième terme est non-nul si le circuit se déforme.

**Déf. :** Soient 2 circuits  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_b$ . Soit  $I_a$  le courant dans  $\Gamma_a$  et  $\vec{B}_a(\vec{x}, t)$  le champ magnétique créé par ce courant. Soit  $I_b$  le courant dans  $\Gamma_b$  et  $\vec{B}_b(\vec{x}, t)$  le champ magnétique créé par ce courant. Voir Figure 25. Le flux magnétique à travers  $\Gamma_b$  du champ créé par le courant

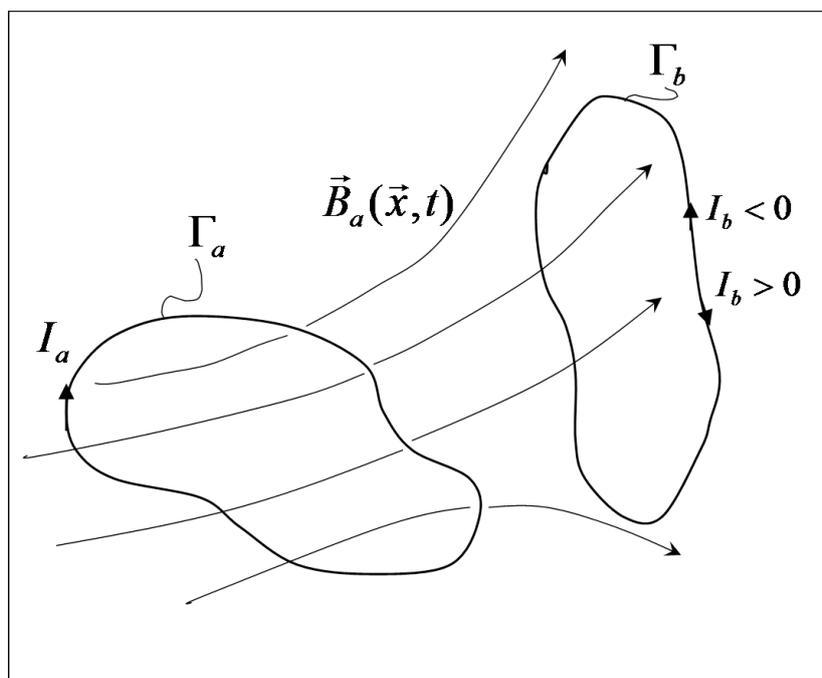


FIG. 25 – Inductance mutuelle

dans le circuit  $\Gamma_a$  est

$$\boxed{\Phi_{ab} = M_{ab}I_a} . \quad (96)$$

Le flux magnétique à travers  $\Gamma_a$  du champ créé par le courant dans le circuit  $\Gamma_b$  est

$$\boxed{\Phi_{ba} = M_{ba}I_b} . \quad (97)$$

On peut montrer que

$$\boxed{M_{ab} = M_{ba} = M} , \quad (98)$$

appelée **inductance mutuelle** des 2 circuits  $a$  et  $b$ .  $M$  ne dépend que de la forme des circuits et de leur position l'un par rapport à l'autre (distance et orientation).

Les 2 circuits  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_b$  sont **couplés** par leur inductance mutuelle. Ainsi (pour des circuits fixes), la f.e.m. dans  $\Gamma_a$  est

$$V_{\Gamma_a} = -L_a \frac{dI_a}{dt} - M \frac{dI_b}{dt} ,$$

et la f.e.m. dans  $\Gamma_b$  est

$$V_{\Gamma_b} = -L_b \frac{dI_b}{dt} - M \frac{dI_a}{dt} ,$$

### Exemple 1 : auto-inductance d'un câble coaxial

Soit 2 feuilles minces conductrices cylindriques coaxiales. Le cylindre intérieur, de rayon  $a$ , est parcouru par un courant  $I$ . Le cylindre extérieur, de rayon  $b$ , est parcouru par un courant  $-I$ . Voir Figure 26.

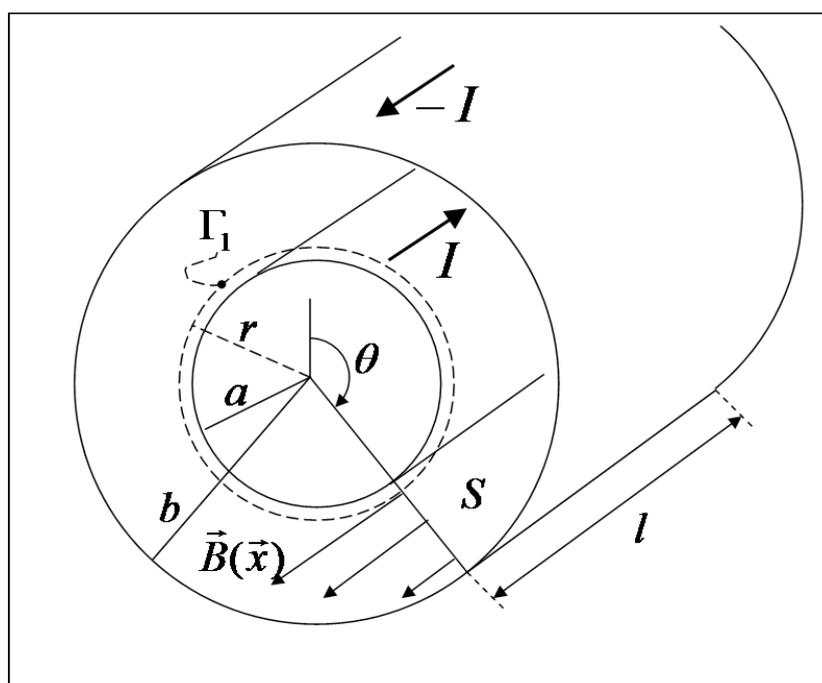


FIG. 26 – Câble coaxial

La 1e étape est de calculer le champ  $\vec{B}(\vec{x})$ . Par symétrie,  $\vec{B} = \vec{B}(r)$ . Choisisant un parcours  $\Gamma_1$ , cercle de rayon  $r$  entourant le cylindre intérieur, on a

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta.$$

La 2e étape est de calculer le flux de ce champ magnétique entre les 2 cylindres. L'élément de surface  $S$  est  $d\vec{\sigma} = l dr \vec{e}_\theta$ .

$$\Phi_m = \int \int_S B_\theta(r) l dr = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dr = \left( \frac{\mu_0}{2\pi} l \ln \frac{b}{a} \right) I.$$

Par définition, Eq.(94), le terme entre parenthèses est l'auto-inductance  $L$ ,

$$L = 2 \times 10^{-7} l \ln \frac{b}{a}$$

### Exemple 2. Inductance mutuelle d'un solénoïde torique et d'une bobine.

Soit un solénoïde torique ayant  $n$  spires par unité de longueur, une section  $S$ , et un courant  $I_s$  dans chaque spire. Soit une bobine de  $N$  spires, longueur  $l$ , section  $A$ , entourant la section du tore, et un courant  $I_b$  dans chaque spire. Voir Figure 27.

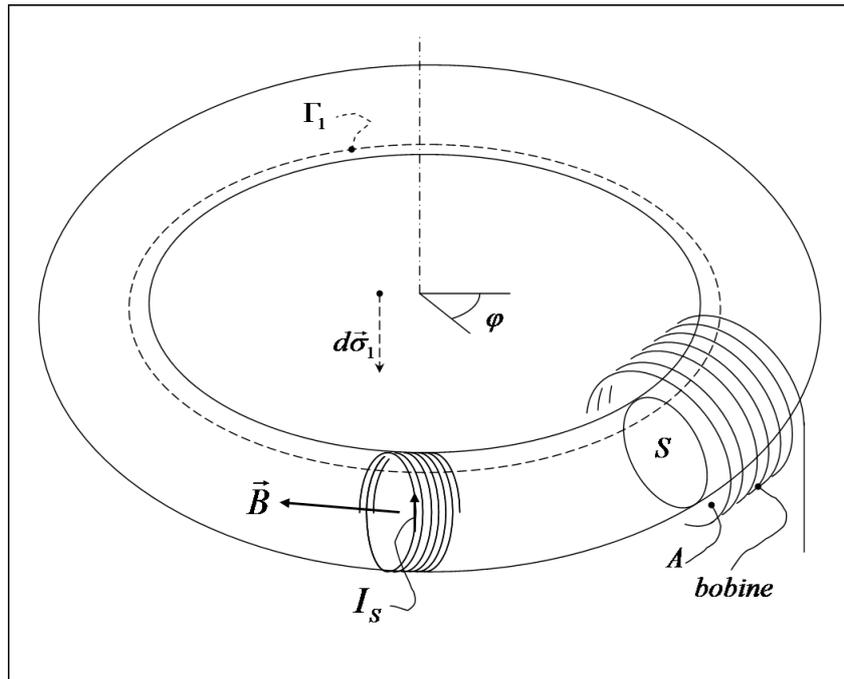


FIG. 27 – Solénoïde torique et bobine

La 1e étape est de calculer  $\vec{B}(\vec{x})$  pour un  $I_s$  donné. Soit un parcours  $\Gamma_1$  à l'intérieur du tore et une surface  $S_1$  de bord  $\Gamma_1$ . Le courant traversant  $S_1$  est égal à  $I_s$  fois le nombre de spires total du solénoïde torique,  $n2\pi r I_s$ . La loi d'Ampère donne

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 n 2\pi r I_s$$

Par symétrie,  $\vec{B} = B_\varphi(r)\vec{e}_\varphi$  et

$$2\pi r B_\varphi(r) = \mu_0 n 2\pi r I_s \Rightarrow \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 n I_s \vec{e}_\varphi$$

Choisisant un parcours  $\Gamma_2$  à l'extérieur du tore, on a  $\vec{B} = 0$ .

La 2e étape est de calculer le flux de ce champ à travers 1 spire de la bobine ;

$$\Phi_m = \int \int_A B_\varphi d\sigma = \int \int_S B_\varphi d\sigma = \mu_0 n I_s S .$$

Comme la bobine a  $N$  spires, le flux à travers la bobine est :

$$\Phi_m = (\mu_0 n N S) I_s ,$$

et le terme entre parenthèses est, par définition (96), l'inductance mutuelle de la bobine et du solénoïde torique. On pourrait calculer le champ créé par la bobine, puis le flux de ce champ à travers le solénoïde. Ce serait techniquement beaucoup plus compliqué. Pour un résultat finalement assez simple !

### Exemple 3 : Circuits électriques, tensions, impédances.

De  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_\Gamma$ , on a

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} - V_\Gamma = 0 \quad (99)$$

On appelle **tensions** des quantités  $U_i$  telles que

$$\sum_i U_i = 0 , \forall \text{ circuit fermé} . \quad (100)$$

- générateur de f.e.m.  $V_0$  : tension  $U_0 = -V_0$
- résistance  $R$  : tension  $U_R = RI$
- inductance  $L$  : f.e.m.  $V_\Gamma = -L dI/dt$ , tension  $U_L = -V_L = L dI/dt$
- capacité  $U_C = Q/C$  donc  $dU_C/dt = I/C$
- conservation de la charge  $\Rightarrow \sum_i I_i = 0$ , en tout noeud du circuit

Les équations différentielles d'un circuit s'obtiennent en combinant ces éléments.

**Pour un circuit AC**, où les tensions et courants oscillent à la fréquence angulaire  $\omega$  ( $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  est la fréquence), on peut utiliser la représentation complexe :

$$I(t) = \Re \left( \hat{I} e^{i\omega t} \right) \quad (101)$$

$$U(t) = \Re \left( \hat{U} e^{i\omega t} \right) \quad (102)$$

avec  $\hat{I}, \hat{U}$  nombres complexes, (amplitudes complexes). L'introduction de ces ansatz dans les équations différentielles du circuit donne un système d'équations **algébriques pour**

les amplitudes complexes. On définit l'impédance d'un circuit (ou élément de circuit) comme

$$Z = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} \quad (103)$$

Par exemple, pour une auto-inductance, on a  $U_L = L dI/dt$ , donc  $\hat{U}_L = Li\omega\hat{I}$ , donc  $Z_L = i\omega L$ . Pour une capacité, on a  $dU_C/dt = I/C$ , donc  $i\omega\hat{U}_C = \hat{I}/C$ , donc  $Z_C = 1/i\omega C$ .

#### 4.4 Energie et quantité de mouvement EM

Quel travail faut-il donner à un système pour qu'il crée un champ magnétique statique  $\vec{B}(\vec{x})$ ?  $\vec{B}(\vec{x})$  est créé par un courant  $I$  dans un circuit. Quel est donc le travail nécessaire à établir ce courant  $I$ ?

Le circuit peut être représenté par le schéma de la Figure 28. Au temps  $t = 0$ , on ferme

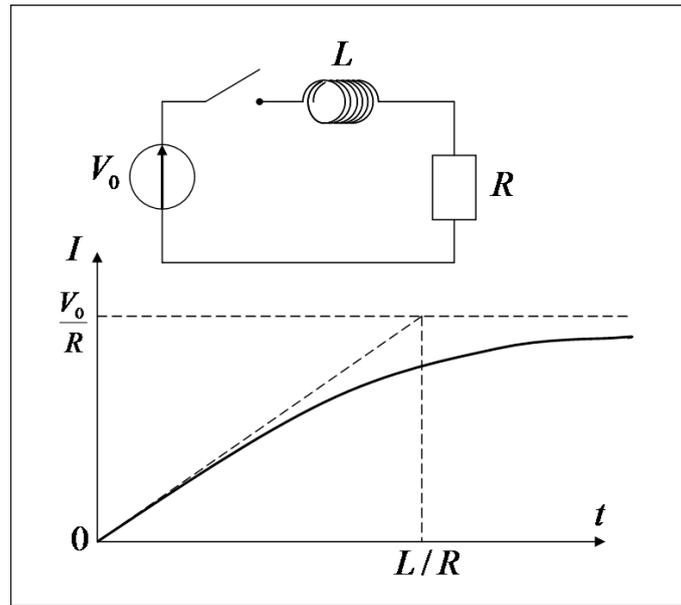


FIG. 28 – Circuit équivalent. Au temps  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur.

l'interrupteur. L'équation du circuit est :  $U_L + U_R + U_0 = 0$ , donc

$$L \frac{dI}{dt} + RI = V_0,$$

dont la solution est

$$I(t) = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-(R/L)t}).$$

La puissance fournie par le générateur est

$$P = V_0 I = LI \frac{dI}{dt} + RI^2$$

Le terme  $RI^2$  est la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance (chauffage ohmique). Le terme  $LI \frac{dI}{dt}$  est une puissance qui n'est pas dissipée. Elle sert à établir le courant  $I$ . Elle est "stockée" dans le champ magnétique que ce courant crée. L'énergie non dissipée fournie au système est donc une **énergie magnétique** :

$$\mathcal{E}_m = \int_0^t LI \frac{dI}{dt'} dt' = \int_0^t \frac{d}{dt'} \left( \frac{1}{2} LI^2 \right) dt' = \frac{1}{2} LI^2(t)$$

**Exemple du câble coaxial.** Voir Figure 26. On a vu

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \left( \frac{b}{a} \right),$$

et

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

entre  $r = a$  et  $r = b$ ,  $\vec{B}(\vec{x}) = 0$  ailleurs. Montrons que l'on peut écrire  $\mathcal{E}_m$  comme une expression où apparaît explicitement le champ magnétique. Calculons

$$\int \int \int |\vec{B}(\vec{x})|^2 d^3x.$$

Prenons pour élément de volume une tranche cylindrique de rayon  $r$ , longueur  $l$ , épaisseur  $dr$  :

$$d^3x = 2\pi r l dr.$$

Ainsi

$$\int \int \int |\vec{B}(\vec{x})|^2 d^3x = \int_a^b \frac{\mu_0^2 I^2}{(2\pi r)^2} 2\pi r l dr = \frac{\mu_0^2 I^2 l}{2\pi} \int_a^b \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0^2 l}{2\pi} \ln \left( \frac{a}{b} \right) I^2$$

Comparant avec

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{\mu_0 l}{4\pi} \ln \left( \frac{a}{b} \right) I^2,$$

on a

$$\boxed{\int \int \int \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0} d^3x}. \quad (104)$$

On interprète ainsi  $\mathcal{E}_m$  comme l'énergie nécessaire à établir un champ magnétique dans l'espace. La quantité

$$\boxed{\frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0}} \quad (105)$$

est la **densité d'énergie magnétique**. On peut vérifier qu'elle a bien pour unités des **Joules par mètre cube** [ $Jm^{-3}$ ]. On verra plus loin que cette expression est vraie en général.

### Exemple : le betatron

L'idée est d'accélérer des électrons par un champ électrique induit par une variation d'un champ magnétique.

On injecte des électrons dans l'entrefer d'un électro-aimant produisant un champ  $\vec{B}(\vec{x}, t) = B_z(r, t)\vec{e}_z$ . Voir Figure 29. La trajectoire  $\Gamma$  de l'électron est un cercle de rayon  $r_L =$

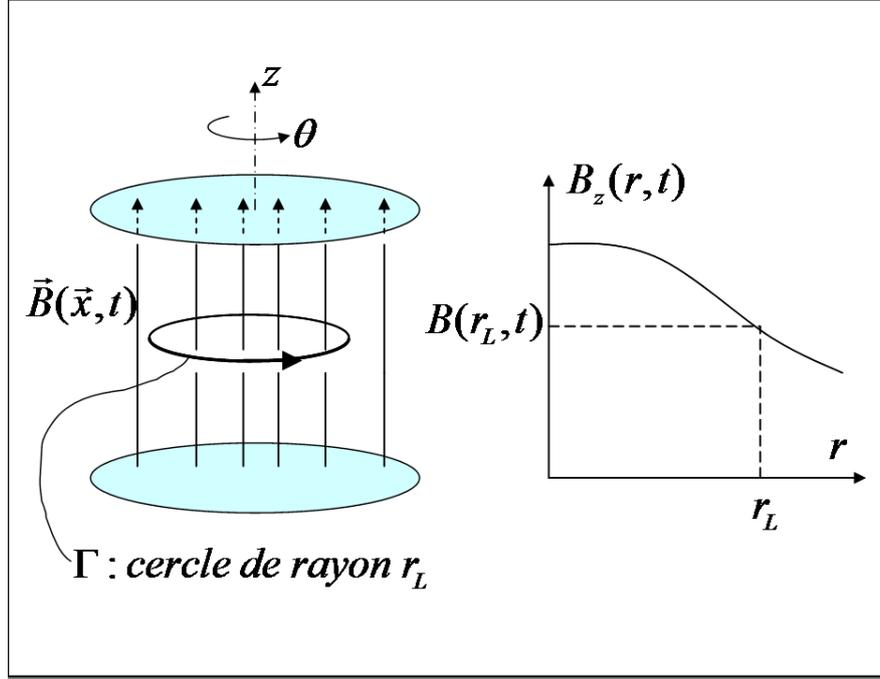


FIG. 29 – Betatron. Trajectoire  $\Gamma$  de l'électron (à gauche). Profil de l'intensité du champ magnétique (à droite).

$m_e v_e / eB$ , où  $B = B_z(r_L, t)$ . (N.B.  $\Gamma$  est centré par rapport à l'axe de symétrie du système, et donc  $|B|$  est constant sur la trajectoire. On fera varier  $B_z(r, t)$  de telle sorte que  $r_L$  sera constant, voir ci-dessous).

La loi de Faraday est

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \int_S \vec{B} \cdot d\vec{\sigma}.$$

On définit un champ moyen à l'intérieur de  $\Gamma$ ,  $B_{moy}$ , de telle sorte que  $\int \int_S \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = \pi r_L^2 B_{moy}$ . Donc

$$2\pi r_L E_{\theta} = -\pi r_L^2 \frac{dB_{moy}}{dt}$$

La variation du flux magnétique à l'intérieur de la trajectoire de l'électron crée un champ électrique parallèle à la trajectoire en tout point. Ce champ électrique accélère l'électron. La 2e loi de Newton projetée dans la direction  $\vec{e}_{\theta}$  est

$$m_e \frac{dv_{\theta}}{dt} = qE_{\theta} = -eE_{\theta} = \frac{er_L}{2} \frac{dB_{moy}}{dt}$$

Si la variation du champ moyen est une constante, on peut intégrer :

$$v_{\theta}(t) = v_0 + \frac{er_L}{2m_e} \frac{dB_{moy}}{dt} t$$

N.B. : Si on veut  $r_L = \text{const}$ , il faut

$$\frac{m_e v_\theta(t)}{eB(r_L, t)} = r_L = \text{const} \Rightarrow \frac{dv_\theta}{dt} = \frac{er_L}{m_e} \frac{\partial B(r_L, t)}{\partial t},$$

donc on doit avoir

$$\frac{dB_{\text{moy}}}{dt} = 2 \frac{\partial B(r_L, t)}{\partial t}.$$

### Flux d'énergie EM, quantité de mouvement

La loi de l'induction implique que lorsqu'on veut faire varier le champ  $\vec{B}$  dans une certaine région de l'espace, un champ électrique de circulation non nulle apparaît. Voir Figure 30. On sait donc que l'énergie du système a varié, puisque  $|\vec{B}|^2$  a varié. Question : par quel

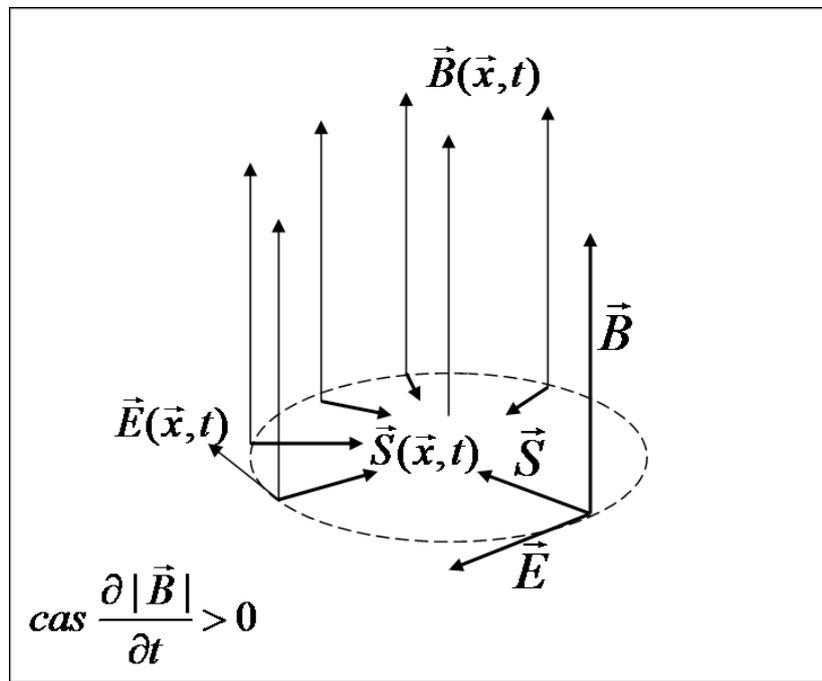


FIG. 30 – Champ magnétique croissant, champ  $\vec{E}$  induit, et flux d'énergie EM  $\vec{S}$ .

“chemin” l'énergie arrive-t-elle dans le système ? Réponse : la quantité

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}}, \quad (106)$$

appelée **vecteur de Poynting**, est un **flux d'énergie EM**. Unités :  $[Jm^{-2}s^{-1}]$ , ou Watt par mètre carré. Dans le cas de la Figure 30, où  $|\vec{B}|$  croît, le vecteur  $\vec{S}$  est radial, dirigé vers l'intérieur : c'est bien un flux d'énergie rentrant. Réciproquement, si  $|\vec{B}|$  décroît, la vecteur  $\vec{S}$  est radial, dirigé vers l'extérieur : c'est bien un flux d'énergie sortant.

Un champ EM a donc une **densité d'énergie**

$$\mathcal{E}_{em} = \frac{\varepsilon_0 |\vec{E}|^2}{2} + \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0}. \quad (107)$$

Il “transporte” de l’énergie avec un **flux**

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (108)$$

On verra qu’on peut associer au champ EM une **quantité de mouvement**

$$\vec{p}_{em} = \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} \quad (109)$$

On a ainsi

$$\vec{p}_{em} = \frac{1}{c^2} \vec{S}, \quad (110)$$

comme si de l’énergie EM était transportée à la vitesse de la lumière. (On rappelle que pour un photon  $\mathcal{E} = pc$ , voir relativité).

Dans l’exemple du betatron, figure 29, lorsque  $|\vec{B}|$  augmente, l’électron augmente son énergie cinétique : cette énergie est fournie par l’énergie EM transmise au système via le vecteur de Poynting  $\vec{S}$ . Mais l’électron a aussi augmenté son moment cinétique  $\vec{L}_O = \vec{OP} \times m\vec{v}$ . Comment est-ce possible puisqu’aucun couple de forces n’est appliqué au système ( $\vec{M}_O = 0$ ) ? La réponse est : le champ électromagnétique résultant (induit par la variation de  $|\vec{B}|$  plus celui de l’électron) a un moment cinétique. C’est la somme des moments cinétiques de la particule et du champ EM qui est conservée,  $\vec{L}_O + \vec{L}_{0,em} = const.$

Soit l’expérience de la Figure 31. Un disque de matière isolante de rayon  $r_0$  porte des charges  $q_i$  à sa circonférence  $\Gamma$ . Il est placé dans l’entrefer d’un électro-aimant créant un champ variable  $\vec{B}(t)$ . Il peut tourner sans frottements autour de son axe de symétrie. Sa vitesse initiale est nulle. L’électro-aimant, fait d’un matériau ferro-électrique, “guide” les lignes de champ  $\vec{B}$ , et on peut admettre que le champ magnétique est confiné dans une région de rayon  $a$ .

On fait décroître le champ  $B_v$  en un temps  $T$ , à partir d’une valeur  $B_{v0}$  donnée, jusqu’à la valeur nulle. Donc le flux de  $\vec{B}_v$  à travers le disque décroît,  $d\Phi_m/dt < 0$ . Donc la f.e.m. le long du cercle  $\Gamma$ ,  $V_\Gamma > 0$ . (On rappelle la convention pour les signes : une fois qu’une direction pour l’élément de surface  $\vec{d}\sigma$  est donnée, la direction de  $\vec{dl}$  est déterminée par la “règle de la vis”). Donc il y a un champ électrique induit. Ce champ crée une force sur les charges  $q_i$ . Le couple de ces forces n’est pas nul. Il va faire varier le moment cinétique du disque et provoquer une accélération angulaire. Comment est-ce possible puisqu’aucun couple de force n’est appliqué au système global ? Et donc que le moment cinétique du système global devrait être conservé ?

Eléments du calcul :

1) Calcul du moment cinétique mécanique final du disque. Soit  $\Phi_m$  le flux de  $\vec{B}_v$  à travers la surface du disque.

$$\Phi_m(t) = \pi a^2 B_v(t); \quad V_\Gamma = -\frac{d\Phi_m}{dt} \Rightarrow 2\pi r_0 E_\theta = -\pi a^2 \frac{dB_v}{dt} \Rightarrow E_\theta = \frac{a^2 B_{v0}}{2r_0 T}.$$

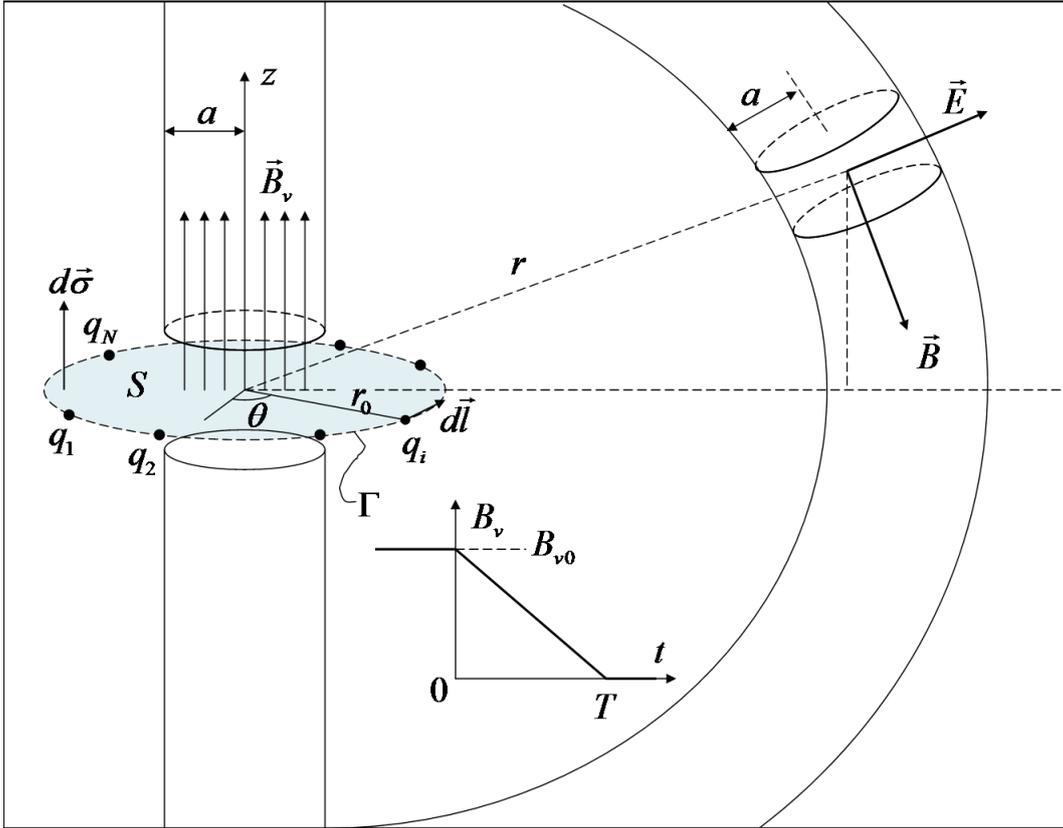


FIG. 31 – Disque isolant portant des charges  $q_i$ , dans le champ  $\vec{B}$  variable d'un électro-aimant.

Le moment de la force  $q_i \vec{E}$  sur une des charges  $q_i$  est donc

$$\vec{M}_{O,i} = r_0 \vec{e}_{r_0} \times \frac{q_i a^2 B_{v0}}{2r_0 T} \vec{e}_\theta = \frac{q_i a^2 B_{v0}}{2T} \vec{e}_z .$$

La même expression s'applique pour chacune des charges  $q_i$ . Le moment de force résultant (couple) est :

$$\vec{M}_O = \frac{Q a^2 B_{v0}}{2T} \vec{e}_z ,$$

où  $Q = \sum_i q_i$  est la charge totale sur le disque. De l'équation du mouvement du disque  $d\vec{L}_O/dt = \vec{M}_O$ , on obtient un moment cinétique du disque final ( $t \geq T$ ) :

$$\boxed{\vec{L}_O = \frac{Q a^2 B_{v0}}{2} \vec{e}_z} , \quad (111)$$

2) Calcul du moment cinétique électromagnétique initial. Si les "bras" de retour de l'électro-aimant ont un rayon  $r \gg r_0$ , on a dans ces bras un champ électrique (créé par les charges  $q_i$ )

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r .$$

Le champ magnétique dans les bras est

$$\vec{B} = B_{v0} \vec{e}_\theta .$$

Donc il y a un moment cinétique par unité de volume

$$r\vec{e}_r \times (\varepsilon_0\vec{E} \times \vec{B}) = -\frac{QB_{v0}}{4\pi r}\vec{e}_\theta.$$

La composante verticale de ce moment cinétique, une fois intégré sur tout le volume du bras, donne

$$\boxed{\vec{L}_{EM} = \frac{1}{2}QB_{v0}a^2\vec{e}_z}, \quad (112)$$

qui est **exactement la valeur du moment cinétique du disque final. Donc, le moment cinétique total (mécanique + EM) est bien conservé.**

## 4.5 Conducteurs en mouvement et loi de l'induction

Soit un élément de conducteur de longueur  $\Delta l$  se déplaçant dans un champ magnétique statique  $\vec{B}$ . Voir Figure 32. Le conducteur contient des charges libres. Celles-ci subissent

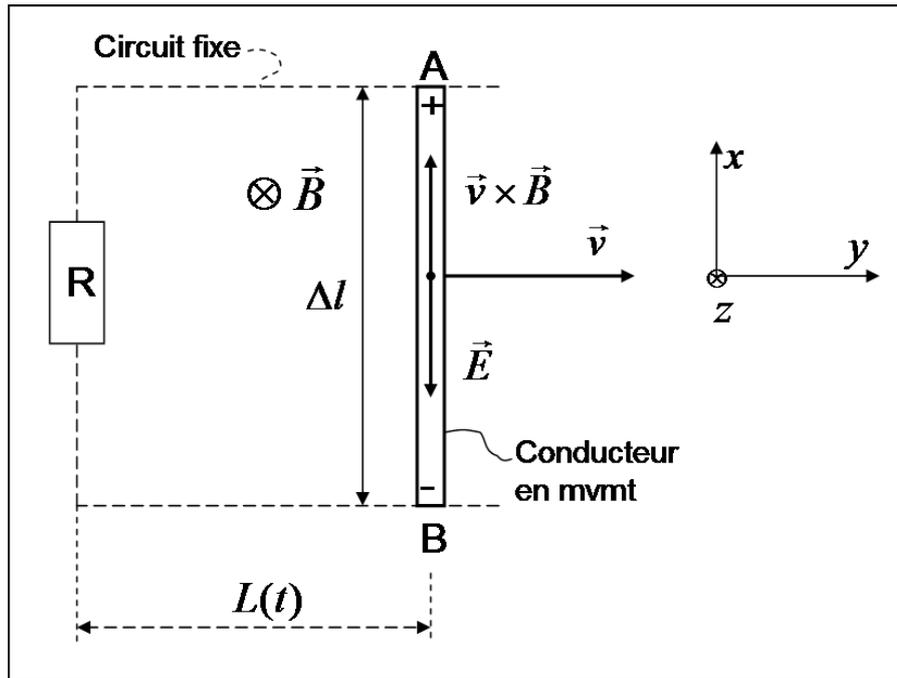


FIG. 32 – Conducteur en mouvement dans un champ magnétique.

la force de Lorentz  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ . Il y aura déplacement de ces charges, avec un excès de charges + en A et un excès de charges - en B. Cette distribution de charges va créer un champ électrique  $\vec{E}$ , orienté de A vers B. Les charges libres vont donc subir une force résultante  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ . L'excès de charge se stabilise lorsque cette force est nulle, donc lorsque :

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}}. \quad (113)$$

On peut calculer la différence de potentiel entre A et B :

$$V_A - V_B = V_{BA} = - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = + \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = (-v_y \vec{e}_y \times B_z \vec{e}_z) \cdot (\Delta l)(-\vec{e}_x) = v_y B_z (\Delta l).$$

Connectons les points A et B à un circuit électrique fixe de résistance  $R$  (pointillés Fig.32). Le flux magnétique à travers le circuit est

$$\Phi_m = (\Delta l) L B_z$$

La longueur du circuit  $L = L(t)$  varie, puisque l'élément de conducteur se déplace : on a  $dL/dt = v_y$ . Donc

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = (\Delta l) v_y B_z$$

On constate que l'on a

$$\boxed{V_{AB}(= -V_{BA}) = -\frac{d\Phi_m}{dt}}.$$

Donc, *tout se passe comme si* la différence de potentiel entre A et B était une circulation du champ  $\vec{E}$  (qu'on appelle aussi parfois "tension par tour"),  $V_\Gamma$ . Cependant, la circulation de  $\vec{E}$ , donc l'intégrale de  $\vec{E} \cdot d\vec{l}$  de B à A le long du conducteur en mouvement, plus l'intégrale de A à B le long de la portion fixe du circuit est en réalité NULLE! De plus, le courant  $I$  dans le circuit est **opposé** au champ électrique dans le conducteur en mouvement : les porteurs de courants se déplacent dans la direction  $\vec{v} \times \vec{B}$ . Du point de vue des équations du circuit, *tout se passe comme si* on pouvait remplacer le conducteur en mouvement par une tension par tour  $V_\Gamma = V(B) - V(A)$  et que la loi de Faraday, écrite sous sa forme de l'Eq.(91), était vérifiée même pour un circuit  $\Gamma$  en mouvement. Autrement dit, *comme si* le champ  $\vec{E}$  dans le conducteur n'était pas  $-\vec{v} \times \vec{B}$  mais  $+\vec{v} \times \vec{B}$ . On ne peut pas le faire en toute généralité. Voici un contre-exemple, dans lequel il y a  $V_\Gamma = 0$ , et cependant le dispositif se comporte comme un générateur. Considérons l'expérience suivante, Figure 33 : Un cylindre de rayon  $R$  de matière conductrice tourne à la vitesse angulaire  $\omega$  autour de son axe. Il est constitué d'un matériau ferromagnétique, donc le champ  $\vec{B}$  est intense à l'intérieur du cylindre ( $r < R$ ) et négligeable pour  $r > R$ . On connecte l'axe du cylindre (point A) avec un point B (fixe) en contact avec la surface du cylindre. Le circuit  $\Gamma$  est donc fixe, le champ magnétique est statique, et donc le flux magnétique à travers le circuit ne varie pas :  $d\Phi_m/dt = 0$ . En utilisant  $V_\Gamma = -d\Phi_m/dt$ , on conclut qu'il ne devrait pas exister de f.e.m. dans le circuit  $\Gamma$ . Or, l'expérience montre qu'il y a une tension non nulle! (Expliquez pourquoi!)

**Dans un conducteur en mouvement dans un champ magnétique, il y a séparation de charges. Si des endroits différents de ce conducteur sont connectés à un circuit, un courant peut s'établir. Le conducteur en mouvement apparaît ainsi comme un générateur.** La question des conducteurs en mouvement a inspiré Einstein pour sa théorie de la relativité restreinte (1905) : il a examiné ce qui se passe dans un référentiel en mouvement avec le conducteur.

**Exemple : courants convectifs dans les conducteurs.**

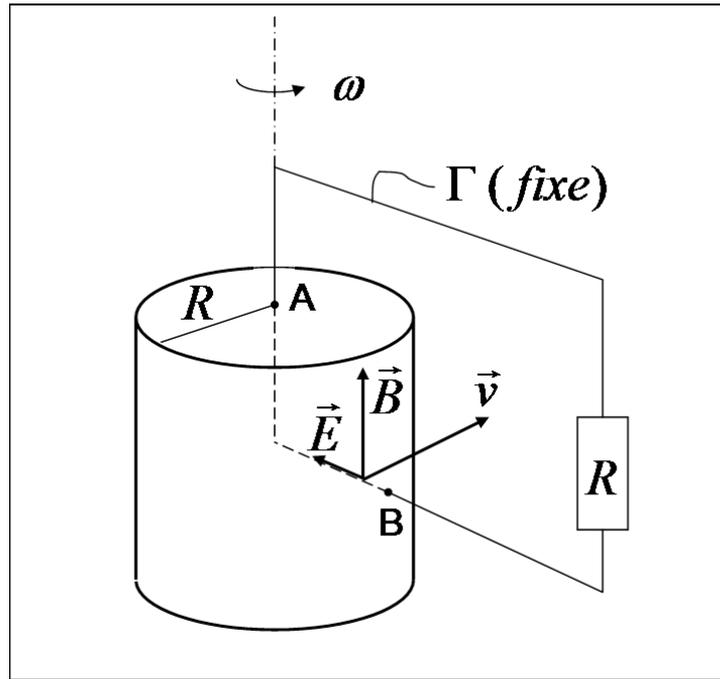


FIG. 33 – Générateur sans variation de flux magnétique

Expérience : une plaque conductrice se déplace dans une région à champ magnétique variable (dans l'espace). Voir Figure 34. Lorsque le conducteur entre dans la région à fort

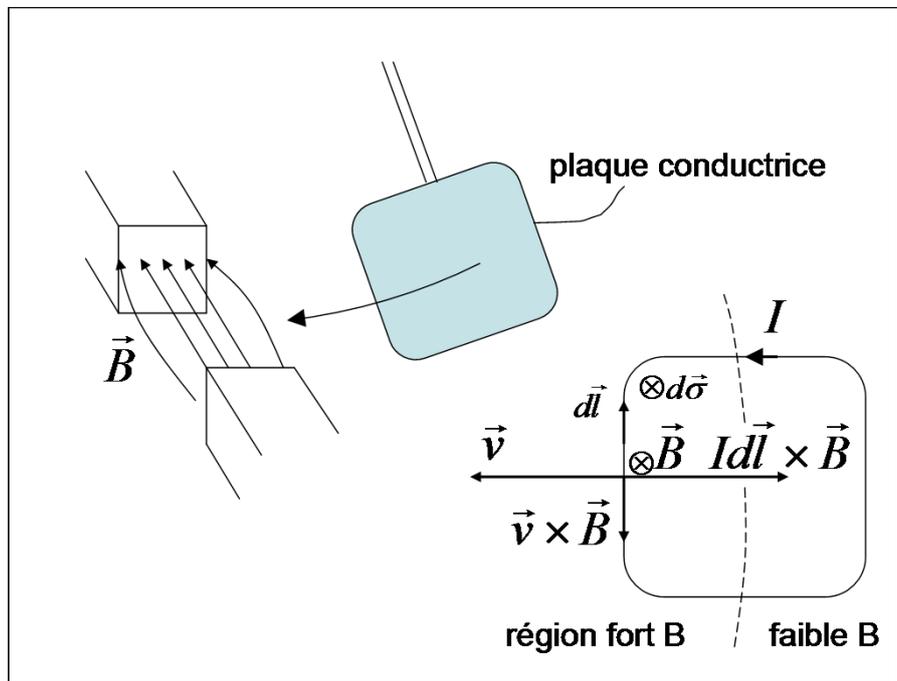


FIG. 34 – Courant convectif dans un conducteur en mouvement dans un champ magnétique non uniforme.

champ, le flux de  $\vec{B}$  à travers la plaque augmente. Par la loi de Faraday, Eq.(91), une f.e.m. est induite, et un courant induit circule dans la plaque. Ce courant induit, étant

plongé dans le champ  $\vec{B}$ , subit la force de Lorentz, Eq.(50), dont la résultante est :

$$\vec{F} = \oint_{\Gamma} I d\vec{l} \times \vec{B}.$$

Cette force s'oppose à la vitesse de la plaque  $\Rightarrow$  freinage.

En résumé la loi de l'induction fondamentale, toujours vérifiée, est :

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad (114)$$

## 5 Equations de Maxwell

L'ensemble des phénomènes électromagnétiques classiques est décrit par les équations de Maxwell :

$$\begin{aligned} \boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} & \quad (a) & \boxed{\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} & \quad (b) \\ \boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0} & \quad (c) & \boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} & \quad (d) . \end{aligned} \quad (115)$$

Ces équations s'écrivent, de façon équivalente, sous une forme intégrale, en utilisant les théorèmes de Gauss et de Stokes :

$$\begin{aligned} \boxed{\iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = \frac{Q_{enf}}{\epsilon_0}} & \quad (a) & \boxed{\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma}} & \quad (b) \\ \boxed{\iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = 0} & \quad (c) & \boxed{\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_S + \frac{1}{c^2} \iint_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \cdot d\vec{\sigma}} & \quad (d) . \end{aligned} \quad (116)$$

Dans (116),  $\Sigma$  est une surface fermée,  $S$  est une surface ouverte de bord  $\Gamma$ ,  $Q_{enf}$  est la charge totale à l'intérieur de  $\Sigma$ ,  $I_S$  est le courant à travers  $S$ . Notons que l'on peut écrire (116)(b) comme  $\boxed{V_{\Gamma} = -d\Phi_m/dt}$ , où  $V_{\Gamma}$  est la circulation du champ électrique et  $\Phi_m$  le flux magnétique. De plus, on a

$$\boxed{\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}}, \quad (117)$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide.

Ces équations décrivent comment les champs  $\vec{E}(\vec{x}, t)$  et  $\vec{B}(\vec{x}, t)$  sont créés par des charges et des courants (les champs  $\rho(\vec{x}, t)$  et  $\vec{j}(\vec{x}, t)$ ). Ces champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont tels qu'une charge  $q$  en  $\vec{x}$ , ayant une vitesse  $\vec{v}$ , subit une force (Lorentz) :

$$\boxed{\vec{F} = q \left( \vec{E}(\vec{x}, t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{x}, t) \right)}. \quad (118)$$

Cet ensemble d'équations a les propriétés suivantes :

1. Elles sont compatibles avec le principe de conservation de la charge.
2. Le courant de déplacement, 2e terme du membre de droite de (d), est essentiel pour satisfaire cette propriété.
3. Elles peuvent avoir des solutions ondulatoires dans le vide : les ondes électromagnétiques, dont la lumière, les ondes radio, etc, font partie.
4. Elles sont compatibles avec le principe de conservation de l'énergie.
5. Elles décrivent comment une charge ou un courant oscillant peut générer (rayonner) des ondes EM.

Nous allons présenter ces aspects dans les sections suivantes.

## 5.1 Compatibilité avec la conservation de la charge

Nous allons dans un premier temps établir une équation qui décrit le fait que la charge est conservée. Par analogie avec le principe de conservation de la masse dans le cas des fluides, on appellera cette équation *l'équation de continuité pour la charge*. Soit une surface  $S$

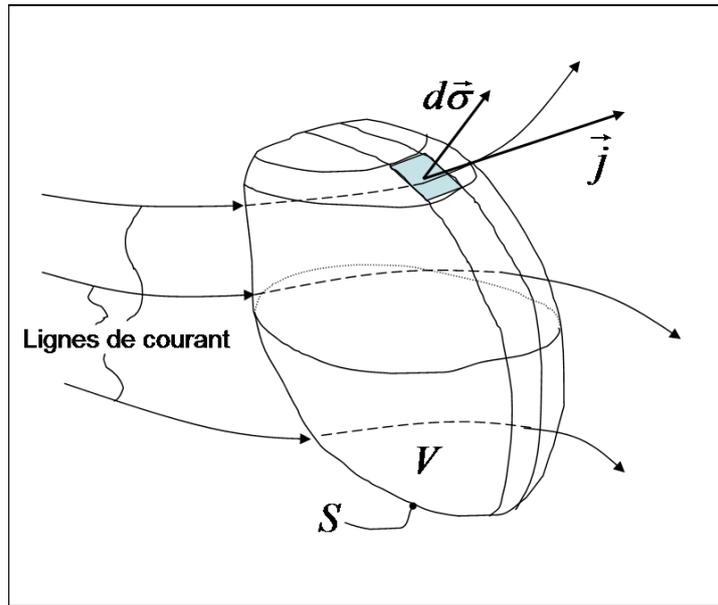


FIG. 35 – Volume  $V$  de surface  $S$  fermée fixe. Conservation de la charge.

fermée fixe. Soit  $V$  le volume à l'intérieur de  $S$ . Soient des densités de charge  $\rho(\vec{x}, t)$  et de courant  $\vec{j}(\vec{x}, t)$ . A l'instant  $t$ , la charge contenue dans  $V$  est :

$$Q(t) = \iiint_V \rho(\vec{x}, t) d^3x$$

Un instant plus tard, en  $t + \Delta t$ , la charge contenue dans  $V$  est :

$$Q(t + \Delta t) = \iiint_V \rho(\vec{x}, t + \Delta t) d^3x$$

Affirmer que la charge est conservée globalement revient à dire que la variation de la charge contenue dans  $V$  est due aux charges ayant traversé la surface  $S$  pendant  $\Delta t$  (en comptant positivement celles qui sont entrées et négativement celles qui sont sorties). On a donc

$$\oiint_S \vec{j}(\vec{x}, t) \cdot (-d\vec{\sigma}) \Delta t = Q(t + \Delta t) - Q(t)$$

(Le signe  $-$  devant  $d\vec{\sigma}$  vient du fait que, par convention, on oriente toujours l'élément d'une surface fermée vers l'extérieur). Divisant cette équation par  $\Delta t$  et faisant la limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , on obtient

$$\boxed{\oiint_S \vec{j}(\vec{x}, t) \cdot d\vec{\sigma} + \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x}, t) d^3x = 0} . \quad (119)$$

C'est l'**équation de continuité pour la charge**, sous forme intégrale. On obtient une forme locale (différentielle) grâce au théorème de Gauss pour le premier terme et en observant que l'équation doit être satisfaite pour tout volume  $V$  arbitrairement choisi. Donc

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x}, t) + \nabla \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) = 0} , \forall \vec{x}, \forall t . \quad (120)$$

C'est l'**équation de continuité pour la charge**, sous forme locale.

Rappel : en physique des fluides, on exprimait la conservation de la masse avec une équation de continuité qui avait une allure similaire : on avait un champ densité de masse  $\rho$  ; le champ  $\rho\vec{v}$  pouvait être considéré comme une "densité de courant de masse" (masse par unité de temps et par unité de surface), et on avait obtenu :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) = 0$$

## 5.2 Courant de déplacement

Historiquement, on a trouvé le terme  $-\partial\vec{B}/\partial t$  de la loi de l'induction, Eq.(115)(b), avant le terme  $(1/c^2)\partial\vec{E}/\partial t$  de l'Eq.(d). C'est Maxwell qui, à partir de considérations de conservation de la charge, a montré que l'équation (d) devait inclure ce terme. Sa théorie à l'époque n'a pas été acceptée facilement, car il n'y avait alors *pas de confirmation expérimentale* du bien-fondé de sa théorie. Ce terme  $(1/c^2)\partial\vec{E}/\partial t$  dans (d) est cependant crucial, non seulement pour la conservation de la charge, mais aussi pour la conservation de l'énergie et pour la propagation d'ondes dans le vide !

Dans cette section, nous allons examiner le rôle de ce terme. Plus précisément, on peut écrire l'équation de Maxwell (115)(d), avec la relation (117),

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (121)$$

Le terme

$$\boxed{\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \quad (122)$$

s'appelle **densité de courant de déplacement**.

### 5.2.1 Exemple 1 : champ $\vec{B}$ créé par un condensateur en chargement

Considérons un condensateur qui se charge ou se décharge (Figure 36). La charge sur les plaques change au cours du temps :  $+Q(t)$ ,  $-Q(t)$ . Un courant  $I$  circule donc dans les fils

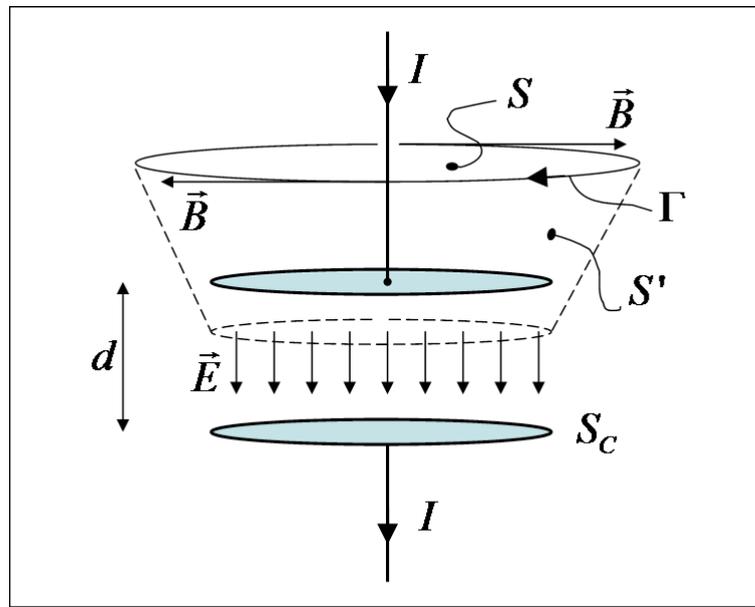


FIG. 36 – Condensateur se chargeant ou se déchargeant. Champ magnétique.

qui sont reliés à ces plaques. Calculons le champ magnétique créé par ce courant. Soit un cercle  $\Gamma$  entourant un des fils. Soit  $S$  une surface ouverte de bord  $\Gamma$  qui intersecte le fil. La surface  $S$  est entièrement en dehors du condensateur, donc  $\vec{E} \approx 0$ . La loi d'Ampère-Maxwell, (116)(d), implique

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow B_{\theta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Choisissons maintenant une surface  $S'$  de bord  $\Gamma$ , mais qui passe entre les deux plaques du condensateur. Le courant à travers  $S'$  est nul : aucune charge ne la traverse. Par contre, il y a un champ électrique, et ce champ électrique varie au cours du temps :  $\partial \vec{E} / \partial t \neq 0$ . La loi d'Ampère-Maxwell, (116)(d), implique dans ce cas

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{\sigma}$$

De  $Q(t) = CV(t)$ ,  $C = \varepsilon_0 S_c / d$ ,  $S_c =$  surface du condensateur,  $d =$  distance entre les plaques, et  $E(t) = V(t)/d$ , on tire :

$$E(t) = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0 S_c},$$

et on a

$$2\pi r B_\theta(r) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \frac{Q(t)}{\varepsilon_0}$$

Mais  $dQ/dt$  est, par définition, le courant  $I$ , et on retrouve bien

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Si le terme de courant de déplacement n'existait pas, la loi d'Ampère appliquée à  $S'$  donnerait  $B_\theta = 0$ , et on aurait une contradiction avec la loi d'Ampère appliquée à  $S$ , qui donne  $B_\theta = \mu_0 I / 2\pi r$ .

### 5.2.2 Exemple 2 : champ $\vec{B}$ créé par une charge variant au cours du temps

Soit une charge ponctuelle  $Q(t)$  qui varie au cours du temps. Cela pourrait être par exemple une substance qui se désintègre radioactivement en émettant un flux radial de particules chargées (désintégration  $\alpha$  ou  $\beta$ ). Il y a donc une densité de courant radiale

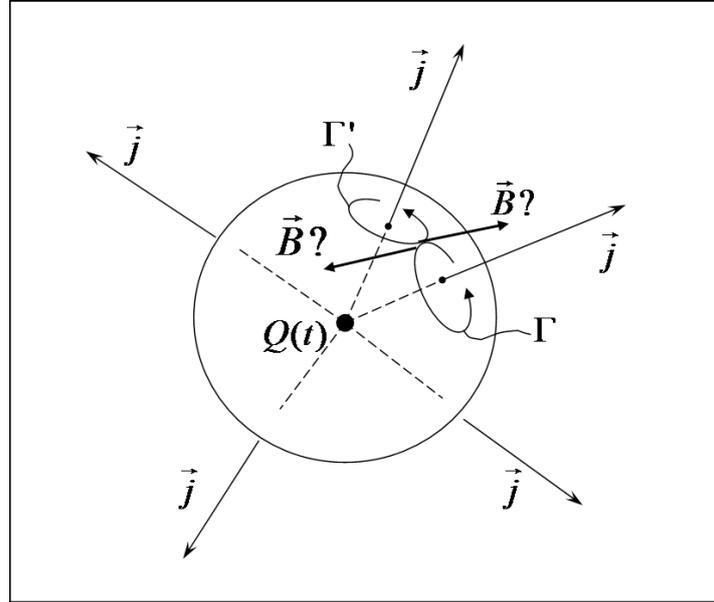


FIG. 37 – Champ magnétique créé par une charge  $Q(t)$  et une densité de courant radiale  $\vec{j} = j_r \vec{e}_r$ .

$\vec{j} = j_r \vec{e}_r$ . Calculons les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ . Soit  $S$  une sphère de rayon  $r$  entourant la charge. La loi de Gauss pour le champ électrique, (116)(a), donne

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_r(r, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q(t)}{r^2}$$

Pour le calcul de  $\vec{B}$ , supposons dans un premier temps que le terme courant de déplacement n'existe pas. On utilise la loi d'Ampère en choisissant un parcours  $\Gamma$  entourant un rayon (voir Figure 37). Il y aurait donc un champ magnétique dans la direction de  $\Gamma$ . Mais si on prend un parcours  $\Gamma'$  voisin, on trouverait un champ magnétique dans l'autre sens ! Il y a impossibilité d'appliquer la loi d'Ampère sans le terme courant de déplacement, dans cette situation, pourtant très simple : une densité de courant radiale à symétrie sphérique.

On peut montrer (cf exercices) que la densité de courant de déplacement, due au fait que le champ électrique varie au cours du temps, compense exactement la densité de courant :

$$\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

et on trouve donc, avec le terme de courant de déplacement dans Maxwell-Ampère, le résultat

$$\vec{B} = 0 .$$

### 5.2.3 Exemple 3 : champ $\vec{B}$ créé par un courant dans un fil de longueur finie

Soit un fil rectiligne de longueur  $b$ , parcouru par un courant  $I$ . S'il n'y avait pas de

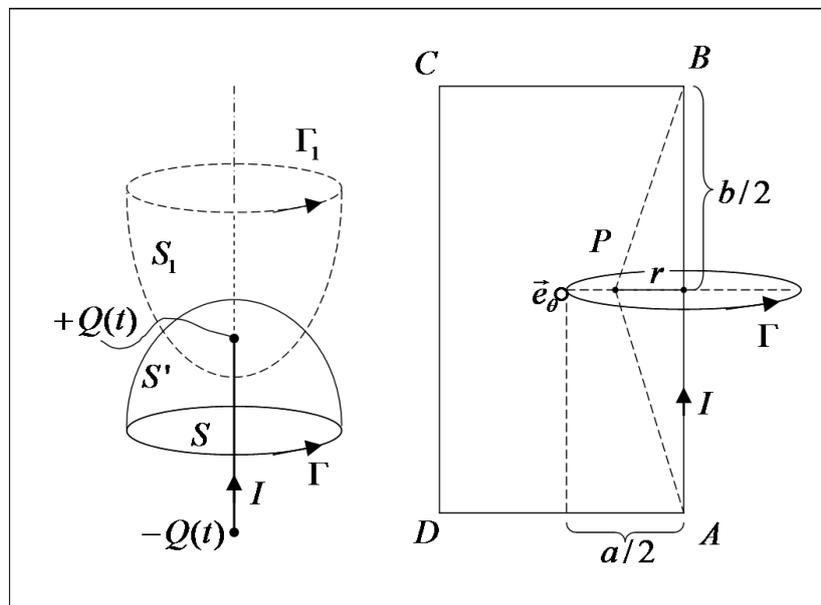


FIG. 38 – Champ magnétique créé par un fil de longueur  $b$ . Champ créé par un ensemble de 4 fils placés en boucle rectangulaire.

courant de déplacement, on pourrait calculer le champ  $\vec{B}$  créé par ce fil en considérant un parcours fermé  $\Gamma$ , un cercle de rayon  $r$  entourant le fil. Soit  $S$  le disque de bord  $\Gamma$ .

Par symétrie azimutale, on trouverait

$$2\pi r B_\theta = \mu_0 I \Rightarrow B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} .$$

Ce qui est étrange, c'est que l'on peut choisir une surface  $S'$  de bord  $\Gamma$ , mais qui n'intercepte pas le fil. Dans ce cas on a  $I_{S'} = 0$  et

$$B_\theta = 0 .$$

Laquelle de ces 2 expressions est correcte? On verra qu'en fait aucune des 2 ne l'est. Encore plus étrange : soit  $\Gamma_1$  un cercle de rayon  $r$ , centré sur la droite portant le segment de fil, mais à des millions de km du fil. Soit une surface  $S_1$  de bord  $\Gamma_1$  et qui intersecte le fil. Donc  $I_{S_1} = I$ , et on trouverait

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} ,$$

*indépendamment de l'éloignement du fil : un courant dans un fil de 1mm de long pourrait créer un champ magnétique quelque part sur la galaxie d'Andromède, ce qui est évidemment faux.*

La résolution de ces paradoxes est apportée lorsqu'on tient compte du courant de déplacement.

Il faut d'abord comprendre pourquoi il y a un champ électrique, et pourquoi ce champ est variable dans le temps. On verra ensuite comment l'application de la loi d'Ampère-Maxwell, Eq.(115) (d), conduit au résultat physiquement correct, en comparant avec l'application de la loi de Biot-Savart, Eq.(64).

- Lorsqu'un fil de longueur finie est parcouru par un courant  $I$ , il y a nécessairement accumulation de charges  $+Q$  et  $-Q$  aux 2 extrémités du fil : ceci résulte du principe de conservation de la charge.
- Ces charges sont variables, car le courant  $I$  amène ces charges. Par définition du courant, on a  $+Q(t)$  à l'extrémité "aval" du fil et  $-Q(t)$  à l'extrémité "amont" du fil, avec

$$I = \frac{dQ}{dt}(t) .$$

- Ces charges créent un champ électrique  $\vec{E}(\vec{x}, t)$ .
- Ce champ électrique est variable,  $\partial\vec{E}/\partial t \neq 0$ , car il est créé par des charges variables.
- **Un courant dans un fil de longueur finie crée donc non seulement un champ magnétique, mais aussi un champ électrique variable.**

Venons-en maintenant à un calcul explicite. On se propose de calculer le champ magnétique créé par une boucle de courant rectangulaire de dimensions  $a \times b$  (voir Figure 38). On considère cette boucle comme une superposition de 4 fils de longueur finie, et on calcule les contributions de chacun des fils. Soit le fil  $AB$ . Soit  $\Gamma$  un cercle de rayon  $a/2$  et  $S$  le disque de bord  $\Gamma$ , placé au milieu du fil. La loi de Maxwell-Ampère, Eq.(116)(d), est

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \varepsilon_0 \mu_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{\sigma}} . \quad (123)$$

Le champ  $\vec{E}$  s'obtient de la loi de Gauss pour  $\vec{E}$  : on remarque que l'Eq.(115)(a) est formellement la même que pour le cas statique, la seule différence étant la charge variable. Donc, pour un point  $P$  sur le disque

$$\vec{E}(\vec{x}_P, t) = \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0|\vec{BP}|^2} \frac{\vec{BP}}{|\vec{BP}|} + \frac{-Q(t)}{4\pi\epsilon_0|\vec{AP}|^2} \frac{\vec{AP}}{|\vec{AP}|}$$

Avec  $|\vec{BP}|^2 = |\vec{AP}|^2 = b^2/4 + r^2$  et  $\vec{BP} - \vec{AP} = -\vec{AB} = -b\vec{e}_y$  (voir Figure 38), on obtient

$$\vec{E}(\vec{x}_P, t) = \frac{-Q(t)b}{4\pi\epsilon_0(b^2/4 + r^2)^{3/2}} \vec{e}_y$$

Donc, avec  $I = dQ/dt$ ,

$$\epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(\vec{x}_P, t) = \frac{-\mu_0 I b}{4\pi(b^2/4 + r^2)^{3/2}} \vec{e}_y .$$

Nous intégrons ce terme sur la surface du disque  $S$ . Par symétrie axiale, on peut prendre des éléments de surface en forme d'anneau de rayon  $r$  et d'épaisseur  $dr$  :  $d\vec{\sigma} = 2\pi r dr$ , et on a

$$\begin{aligned} \epsilon_0\mu_0 \int \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(\vec{x}_P, t) \cdot d\vec{\sigma} &= \int_0^{a/2} \frac{-\mu_0 I b r dr}{2(b^2/4 + r^2)^{3/2}} = -\frac{\mu_0 I b}{2} [-(b^2/4 + r^2)^{-1/2}]_0^{a/2} = \\ &= \frac{\mu_0 I b}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{b^2/4 + a^2/4}} - \frac{1}{\sqrt{b^2/4}} \right) = \mu_0 I \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \mu_0 I . \end{aligned}$$

Introduisant dans Maxwell-Ampère, Eq.(123),

$$2\pi \frac{a}{2} B_\theta = \mu_0 I \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow B_\theta = \frac{\mu_0 I}{\pi \sqrt{a^2 + b^2}} \frac{b}{a} . \quad (124)$$

On constate que ce n'est aucun des résultats possibles obtenus sans le terme courant de déplacement (0 ou  $\mu_0 I/2\pi r$ ). Sommant les contributions des 4 côtés, on obtient

$$\boxed{B_\theta = \frac{2\mu_0 I}{\pi \sqrt{a^2 + b^2}} \left( \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)} . \quad (125)$$

On peut obtenir cette solution par une autre méthode, utilisant la formule de Biot-Savart, Eq.(64). La résolution sera faite en exercice. On obtient bien le même résultat.

## 5.3 Ondes EM

### 5.3.1 Ondes EM dans le vide

Soit le cas du vide :  $\rho(\vec{x}, t) = 0, \vec{j}(\vec{x}, t) = 0$ . Nous allons chercher des solutions aux équations de Maxwell (115) de type "onde plane", c'est-à-dire oscillatoires sinusoïdalement à la fois dans l'espace et le temps :

$$\boxed{\vec{E}(\vec{x}, t) = \hat{\vec{E}} \exp [i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)]} , \quad \boxed{\vec{B}(\vec{x}, t) = \hat{\vec{B}} \exp [i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)]} , \quad (126)$$

où  $\hat{\vec{E}}$  et  $\hat{\vec{B}}$  sont des vecteurs de nombres complexes,  $\vec{k}$  est un vecteur de nombres réels, appelé **vecteur d'onde**,  $\omega$  est un nombre réel, appelé **fréquence angulaire**. Unités :  $|\vec{k}| : [\text{m}^{-1}]$ ,  $\omega : [\text{s}^{-1}]$ .

Ceci représente un signal dont la partie réelle est sinusoïdale, se propageant à la fréquence

$$\boxed{\nu = \frac{\omega}{2\pi}}, \quad (127)$$

avec une longueur d'onde

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}}, \quad (128)$$

dans la direction (direction de propagation)  $\left[\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}\right]$ , à la vitesse (vitesse de phase)

$$\boxed{v_{ph} = \frac{\omega}{|\vec{k}|}}. \quad (129)$$

On verra que pour qu'une telle solution existe,  $\omega$  et  $\vec{k}$  ne sont pas arbitraires, mais doivent satisfaire une équation qui les relie, appelée **relation de dispersion** :

$$\boxed{\omega = \omega(\vec{k})}. \quad (130)$$

On verra au chapitre suivant qu'un signal de type "impulsion" ("pulse") se propage à la vitesse  $\vec{v}_g$  appelée **vitesse de groupe**, donnée par

$$\vec{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}}. \quad (131)$$

L'introduction de l'ansatz ondes planes, Eq.(126), dans le système d'équations différentielles de Maxwell, Eq.(115), est facilité par la règle de substitution formelle :

$$\boxed{\nabla \rightarrow i\vec{k} \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega}. \quad (132)$$

On obtient (dans le vide,  $\rho = 0, \vec{j} = 0$ ) :

$$\begin{array}{ll} \boxed{i\vec{k} \cdot \hat{\vec{E}} = 0} & (a) \quad \boxed{i\vec{k} \times \hat{\vec{E}} = i\omega \hat{\vec{B}}} & (b) \\ \boxed{i\vec{k} \cdot \hat{\vec{B}} = 0} & (c) \quad \boxed{i\vec{k} \times \hat{\vec{B}} = \frac{1}{c^2}(-i\omega)\hat{\vec{E}}} & (d) \end{array} \quad (133)$$

On déduit de (a) que  $\vec{E} \perp \vec{k}$ , de (c) que  $\vec{B} \perp \vec{k}$  : il s'agit d'une onde dite transverse : les champs sont perpendiculaires à la direction de propagation. De (b), on tire que  $\vec{B} \perp \vec{E}$ .  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$  forment un trièdre orthogonal orienté droit (voir Figure 39). Ces relations sont vraies en tout point et en tous temps ( $\forall \vec{x}, \forall t$ ).

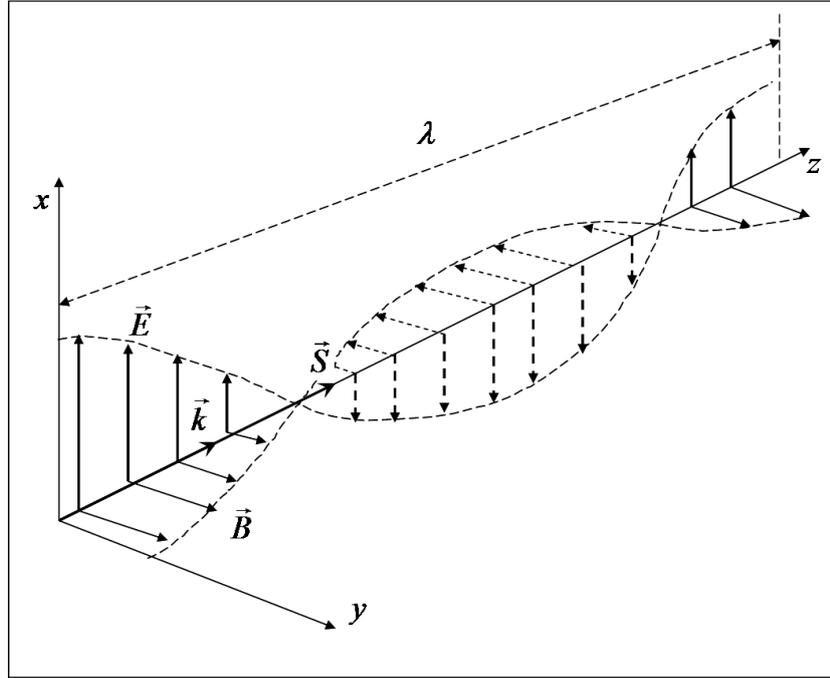


FIG. 39 – Onde EM dans le vide.

De (b) et (d), on tire  $\vec{k} \times \vec{k} \times \hat{\vec{E}}/\omega = -(\omega/c^2)\hat{\vec{E}}$ . Donc  $(\vec{k} \cdot \hat{\vec{E}})\vec{k} - k^2\hat{\vec{E}} = -(\omega^2/c^2)\hat{\vec{E}}$ , qui n'a de solution non-triviale ( $\hat{\vec{E}} \neq 0$ ) que si

$$\boxed{\omega^2 = k^2 c^2} . \quad (134)$$

C'est la **relation de dispersion des ondes EM dans le vide**. On a la vitesse de phase = vitesse de groupe =  $c$ ,

$$\boxed{c = 2.99792458 \times 10^8 [\text{ms}^{-1}]}$$

On notera que sans le terme courant de déplacement dans l'éq.(d), il n'y aurait pas d'onde EM dans le vide : on aurait l'équation

$$\vec{k} \times \vec{k} \times \hat{\vec{E}} = 0 \Rightarrow (\vec{k} \cdot \hat{\vec{E}})\vec{k} - k^2\hat{\vec{E}} = 0 \Rightarrow k^2\hat{\vec{E}} = 0$$

On trouverait soit  $\hat{\vec{E}} = 0$  soit  $k = 0$  (“longueur d'onde infinie” : pas de propagation).

On remarque que dans l'onde EM dans le vide,  $\hat{\vec{E}}$  et  $\hat{\vec{B}}$  sont en phase. De plus, on a

$$|\vec{B}(\vec{x}, t)| = \frac{1}{c} |\vec{E}(\vec{x}, t)|$$

### 5.3.2 Ondes EM dans la matière

Dans le cas de matière avec polarisation et aimantation linéaires, donc d'un matériau de permittivité relative (= constante diélectrique)  $\varepsilon_r$  et de perméabilité relative  $\mu_r$ , on

peut montrer (exercice) que cela revient, du point de vue de la relation de dispersion, à remplacer  $\varepsilon_0$  par  $\varepsilon_0\varepsilon_r$  et  $\mu_0$  par  $\mu_0\mu_r$ . Comme  $c^2 = 1/\varepsilon_0\mu_0$ , on a la relation de dispersion :

$$\omega^2 = k^2 \frac{c^2}{\varepsilon_r\mu_r}.$$

Ceci implique une vitesse de phase

$$v_{ph} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}$$

L'indice de réfraction du matériau est défini comme  $N = c/v_{ph} = ck/\omega$ . On a :

$$N = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}.$$

## 5.4 Compatibilité avec la conservation de l'énergie

On rappelle qu'un champ électrostatique a une densité d'énergie

$$e_{ES} = \frac{\varepsilon_0 |\vec{E}|^2}{2}$$

et qu'un champ magnétostatique a une densité d'énergie

$$e_{MS} = \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0}.$$

Qu'en est-il dans le cas général des champs EM dépendant du temps ?

### 5.4.1 Equation de continuité pour l'énergie

Le système est constitué du champ EM ( $\vec{E}(\vec{x}, t)$  et  $\vec{B}(\vec{x}, t)$ ) et des particules qui portent les charges et les courants ( $\rho(\vec{x}, t)$  et  $\vec{j}(\vec{x}, t)$ ). L'équation qui exprime la conservation de l'énergie, aussi appelée équation de continuité pour l'énergie, s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{E}_{EM}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = -w}, \quad (135)$$

avec :

- $\mathcal{E}_{EM}$  est la densité d'énergie EM. Unités : [Watts/m<sup>3</sup>].
- $\vec{S}$  est le flux d'énergie EM. Unités : [Watts/m<sup>2</sup>].
- $w$  est la puissance par unité de volume des forces EM sur les particules. Unités [Watts/m<sup>3</sup>].

Soit un volume  $V$  fixe, de frontière  $S$  (surface fermée). Intégrant l'Eq.(135) sur le volume  $V$ , utilisant le théorème de Gauss pour le 2e terme, on a :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \mathcal{E}_{EM} d^3x + \oiint_S \vec{S} \cdot d\vec{\sigma} = - \iiint_V w d^3x}. \quad (136)$$

- Le 1er terme est la vitesse de variation de l'énergie EM contenue dans  $V$ .
- Le 2e terme est le flux d'énergie EM à travers  $S$  (positif signifie un flux sortant).
- Le terme de droite est, au signe près, la puissance des forces EM sur les particules contenues dans  $V$ .

Essayons d'obtenir des expressions pour  $\mathcal{E}_{EM}$ ,  $\vec{S}$  et  $w$ . Soit  $n$  particules par unité de volume, chaque particule étant de charge  $q$ . La puissance par unité de volume est donc :

$$w = n \vec{v} \cdot \vec{F} = n \vec{v} \cdot q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) = nq\vec{v} \cdot \vec{E} .$$

Avec la définition de la densité de courant,  $\vec{j} = nq\vec{v}$ ,

$$\boxed{w = \vec{j} \cdot \vec{E}} . \quad (137)$$

La densité d'énergie EM est la somme de la densité d'énergie "électrostatique" et de la densité d'énergie "magnétostatique" :

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{\varepsilon_0 |\vec{E}|^2}{2} + \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0}} . \quad (138)$$

Le flux d'énergie EM, appelé **vecteur de Poynting**, est

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \left( \vec{E} \times \vec{B} \right) = \varepsilon_0 c^2 \left( \vec{E} \times \vec{B} \right)} . \quad (139)$$

**Preuve.** Des équations de Maxwell, Eq.(115), on obtient, en effectuant  $\vec{B} \cdot (b) - \vec{E} \cdot (d)$ ,

$$\vec{B} \cdot \left( \nabla \times \vec{E} \right) - \vec{E} \cdot \left( \nabla \times \vec{B} \right) = -\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E} - \frac{1}{c^2} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} .$$

Par une identité d'analyse vectorielle, le membre de gauche s'écrit  $\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B})$ . On a  $\vec{B} \cdot (\partial \vec{B} / \partial t) = (1/2) \partial |\vec{B}|^2 / \partial t$ ,  $\vec{E} \cdot (\partial \vec{E} / \partial t) = (1/2) \partial |\vec{E}|^2 / \partial t$ . Divisant ensuite par  $\mu_0$  et utilisant  $1/c^2 = \varepsilon_0 \mu_0$ , on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0} + \frac{\varepsilon_0 |\vec{E}|^2}{2} \right) + \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \left( \vec{E} \times \vec{B} \right) = -\vec{j} \cdot \vec{E}} . \quad (140)$$

On appelle cette dernière relation le **théorème de Poynting** : elle a bien la forme requise d'une équation de continuité, Eq.(135).

### 5.4.2 Densité et flux d'énergie d'une onde EM dans le vide

Soit une onde plane dans le vide comme à la Section précédente :  $\sim \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)]$ . On a vu que  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$  forment un trièdre orthogonal orienté droit : voir Figure 39. Ainsi,

le vecteur de Poynting  $\vec{S}$  a la même direction que  $\vec{k}$  : le flux d'énergie EM est dans la direction de propagation de l'onde. L'intensité de l'onde est, par définition,  $|\vec{S}|$ .

$$|\vec{S}| = \varepsilon_0 c^2 |\vec{E} \times \vec{B}| = \varepsilon_0 c^2 |\vec{E}| |\vec{B}|$$

On a montré que pour une onde EM  $|\vec{B}| = |\vec{E}|/c$ . Donc

$$|\vec{S}| = \varepsilon_0 c |\vec{E}|^2$$

La densité d'énergie EM de l'onde est

$$\mathcal{E}_{EM} = \frac{\varepsilon_0 |\vec{E}|^2}{2} + \frac{|\vec{E}|^2}{2\mu_0 c^2} = \varepsilon_0 |\vec{E}|^2.$$

De ces deux dernières relations, on tire :

$$\vec{S} = \mathcal{E}_{EM} c \vec{e}_k.$$

Autrement dit, l'énergie EM est transportée par l'onde à la vitesse  $c$ .

### 5.4.3 Quantité de mouvement et moment cinétique EM

En relativité d'Einstein, on a décrit la lumière comme étant constituée de particules élémentaires, appelées **photons**, ayant une vitesse toujours égale à  $c$ , dans tout référentiel d'inertie, et une "masse-au-repos"  $m_0 = 0$ . Le photon a une énergie  $E$  et une quantité de mouvement  $\vec{p}$  liées par la relation

$$E = |\vec{p}|c \Rightarrow \vec{p} = \frac{E}{c} \vec{e}_k$$

où  $\vec{e}_k$  est la direction de la vitesse du photon. Dans la théorie EM de Maxwell, la lumière est décrite par une **onde EM**, qui a une densité d'énergie  $\varepsilon_0 |\vec{E}|^2$  et une vitesse de propagation  $c$ . Si on fait le rapprochement avec la description particulaire d'Einstein, on obtient que le champ EM a une **quantité de mouvement par unité de volume**

$$\vec{p}_{EM} = \frac{\varepsilon_0 |\vec{E}|^2}{c} \vec{e}_k$$

Avec les propriétés  $\vec{e}_k = \vec{E} \times \vec{B} / |\vec{E}| |\vec{B}|$  et  $|\vec{B}| = |\vec{E}|/c$ , on obtient :

$$\boxed{\vec{p}_{EM} = \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}}, \quad (141)$$

autrement dit

$$\vec{p}_{EM} = \frac{1}{c^2} \vec{S}. \quad (142)$$

Le moment cinétique par unité de volume est  $\boxed{\vec{\mathcal{L}}_{O,EM} = \vec{OP} \times \vec{p}_{EM}}$ .

**Application : “voile solaire”.** Une onde EM est incidente perpendiculairement sur un miroir (surface d'aire  $A$ ) parfaitement réfléchissant. Connaissant l'intensité  $|\vec{S}|$  de l'onde incidente, calculer la force subie par le miroir.

On résoudra ce problème en exercice. L'origine de l'existence d'une force est l'échange de quantité de mouvement avec les ondes EM : l'onde incidente a une quantité de mouvement par unité de volume  $+\vec{p}_{EM}$ , l'onde réfléchie  $-\vec{p}_{EM}$ . La différence de quantité de mouvement EM est transférée au miroir. On obtient une force par unité de surface, qu'on appelle **pression de radiation**. Pour la lumière qui vient du soleil, on a au niveau de la terre environ  $1000\text{W}/\text{m}^2$ , et la pression exercée sur le miroir est (cf exercices) :  $2|\vec{S}|/c \approx 6.67 \times 10^{-6}\text{N}/\text{m}^2$ .

## 5.5 Rayonnement d'ondes EM

Dans cette Section, nous posons la question de savoir quelle est la “source” des ondes EM. La réponse est :

**Une charge accélérée rayonne (c-à-d émet) des ondes EM.**

### 5.5.1 Champ EM créé par une particule en mouvement

Le calcul de la solution générale des équations de Maxwell (115) pour des densités de charge et de courant  $\rho(\vec{x}, t)$  et  $\vec{j}(\vec{x}, t)$  données ne sera pas faite dans ce cours. On se limitera au cas d'une particule chargée, point matériel de charge  $q$ , de trajectoire donnée. On se place en un point  $P$  fixe, de position  $\vec{x}_P$  : c'est la position d'un “observateur”. Voir figure 40. On peut montrer que le champ EM en  $(\vec{x}_P, t)$  est donné par l'expression suivante :

$$\vec{E}(\vec{x}_P, t) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{d^2}{dt^2} \vec{e}_{r'} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{r'}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{e}_{r'}}{r'^2} \right) + \frac{\vec{e}_{r'}}{r'^2} \right] \quad (143)$$

$$\vec{B}(\vec{x}_P, t) = -\frac{1}{c} \vec{e}_{r'} \times \vec{E}(\vec{x}_P, t) \quad (144)$$

où  $r'$  est la distance entre l'observateur  $P$  et la position de la particule au temps

$$t' = t - \frac{r'}{c} \quad (145)$$

On remarque que  $r'/c$  est le temps de propagation de la lumière entre la particule et l'observateur. La position  $A$  de la particule au temps  $t - r'/c$  est donc la **position apparente** de la particule, c'est-à-dire comme l'observateur  $P$  la voit. Le vecteur unité  $\vec{e}_{r'}$  est dans la direction de la position apparente de la particule (figure 40).

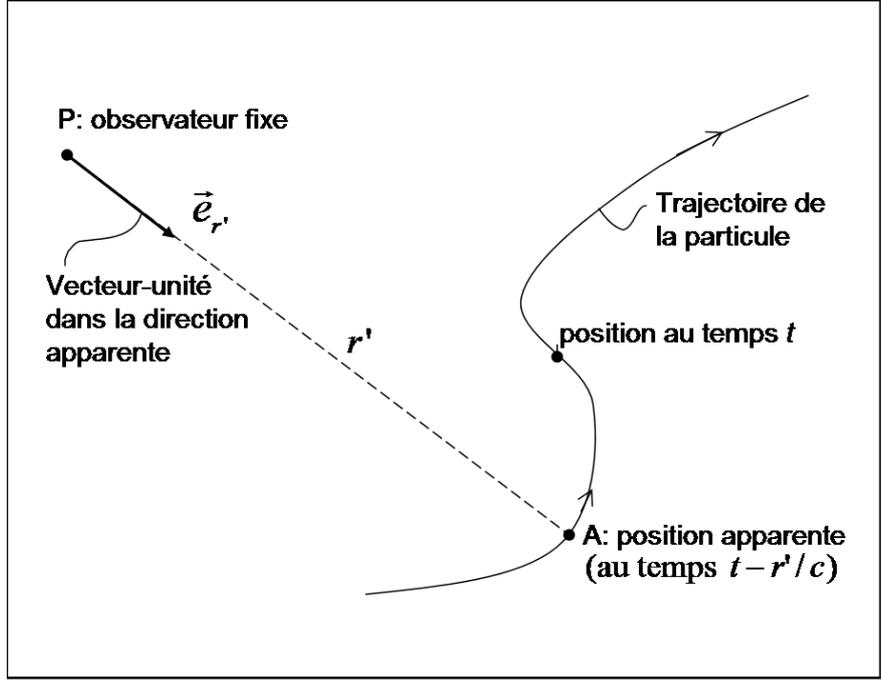


FIG. 40 – Particule chargée en mouvement et observateur P.

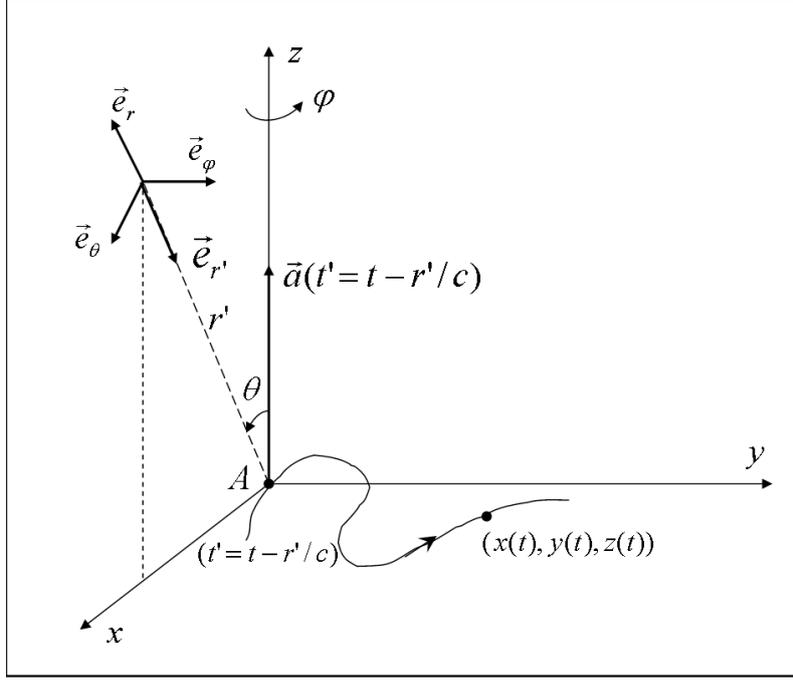
Le champ EM en  $(\vec{x}_P, t)$  dépend de la position, vitesse et accélération de la particule au temps antérieur  $t - r'/c$ . Ceci est consistant avec le principe de relativité d'Einstein : aucune information ne peut se transmettre à des vitesses supérieures à  $c$ .

Examinons l'expression (143). On va montrer que pour des grandes distances  $r'$ , le premier terme varie avec la distance  $r'$  comme  $1/r'$ , et dépend de l'accélération de la particule, alors que le 2e terme, qui contient d'ailleurs le terme de l'électrostatique, est en  $1/r'^2$ . **Le résultat important est que pour des charges accélérées, le champ EM (variable dans le temps) peut se transmettre beaucoup plus loin que dans le cas statique : l'amplitude va en  $\sim 1/r'$ , alors que dans la statique elle va en  $\sim 1/r'^2$ .**

Soit les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  centrées sur la position apparente de la particule A, où on place la direction  $\theta = 0$  parallèle à la direction de l'accélération instantanée de la particule au temps  $t - r'/c$  (voir Figure 41). Le terme  $d^2\vec{e}_{r'}/dt^2$  est l'accélération du vecteur unité visant la position apparente de la particule. Elle dépend donc de l'accélération *transverse*, c.a.d. *perpendiculaire* à la ligne de vue. Sans restreindre la généralité, on peut prendre la position de l'observateur en  $\varphi = 0$ , autrement dit dans le plan  $(x, z)$ . On a, dans le cas où la particule se déplace dans une région de l'espace beaucoup plus petite que la distance à l'observateur,

$$\vec{x} = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z \quad \vec{x}_P = r' \sin \theta \vec{e}_x + r' \cos \theta \vec{e}_z$$

$$\vec{x} - \vec{x}_P = (x - r' \sin \theta)\vec{e}_x + y\vec{e}_y + (z - r' \cos \theta)\vec{e}_z$$


 FIG. 41 – Calcul de  $d^2\vec{e}_{r'}/dt^2$ .

$$|\vec{x} - \vec{x}_P|^2 = r'^2 \left( 1 - \frac{2x}{r'} \sin \theta - \frac{2z}{r'} \cos \theta + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r'^2} \right)$$

Calculant au premier ordre en  $x/r'$ ,  $y/r'$  et  $z/r'$ ,

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_P|} \approx \frac{1}{r'} \left( 1 + \frac{x}{r'} \sin \theta + \frac{z}{r'} \cos \theta \right)$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_{r'} = \frac{\vec{x} - \vec{x}_P}{|\vec{x} - \vec{x}_P|} &\approx -\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_z + \frac{x}{r'} \left( (1 - \sin^2 \theta) \vec{e}_x - \sin \theta \cos \theta \vec{e}_z \right) + \frac{y}{r'} \vec{e}_y \\ &\quad + \frac{z}{r'} \left( -\sin \theta \cos \theta \vec{e}_x + (1 - \cos^2 \theta) \vec{e}_z \right). \end{aligned}$$

Dérivant par rapport au temps,

$$\frac{d}{dt} \vec{e}_{r'} \approx \frac{\dot{x}}{r'} \left( (1 - \sin^2 \theta) \vec{e}_x - \sin \theta \cos \theta \vec{e}_z \right) + \frac{\dot{y}}{r'} \vec{e}_y + \frac{\dot{z}}{r'} \left( -\sin \theta \cos \theta \vec{e}_x + \sin^2 \theta \vec{e}_z \right).$$

Ainsi, le 2e terme de l'Eq.(143) va comme  $\sim 1/r'^2$ . Dérivant encore une fois par rapport au temps, en utilisant  $\ddot{x} = 0$  et  $\ddot{y} = 0$ , puisque on a choisi l'axe  $z$  parallèle à l'accélération, on a

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{e}_{r'} = \frac{\ddot{z}}{r'} \sin \theta \left( -\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_z \right).$$

En se rappelant que  $\ddot{z}$  est l'accélération instantanée de la particule au temps  $t' = t - r'/c$ , on peut écrire

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{e}_{r'} = -\frac{a_z(t' = t - r'/c) \sin \theta}{r'} \vec{e}_\theta.$$

Cette dernière expression est valable pour une particule dont la vitesse est bien inférieure à  $c$  (on a négligé les effets relativistes sur le mouvement de la particule) et pour des

distances  $r'$  grandes par rapport à l'amplitude du mouvement de la particule. On obtient ainsi, négligeant les termes en  $1/r'^2$ , **le champ EM créé par une particule chargée, accélérée,  $v \ll c$ , à des grandes distances :**

$$\vec{E}(\vec{x}_P, t) = \frac{qa_z(t' = t - r'/c) \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r'} \vec{e}_\theta \quad (146)$$

$$\vec{B}(\vec{x}_P, t) = \frac{E_\theta}{c} \vec{e}_\varphi \quad (147)$$

Ceci représente un signal qui se propage à la vitesse  $c$  à partir de la position de la particule. On remarque que  $\vec{B} \perp \vec{E}$ . L'amplitude du signal va en  $\sim 1/r'$ .

### 5.5.2 Flux d'énergie et puissance EM émises par la charge accélérée

Par définition, ce flux est le vecteur de Poynting, Eq.(139) :

$$\vec{S} = \epsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B} = \epsilon_0 c^2 E_\theta \vec{e}_\theta \times \frac{E_\theta}{c} \vec{e}_\varphi = \epsilon_0 c E_\theta^2 \vec{e}_r .$$

On remarque que  $S_r$  est toujours positif, ce qui veut dire que le flux d'énergie EM s'éloigne toujours de la particule, autrement dit que la particule *émet* de l'énergie EM. (N.B. :  $\vec{e}_{r'} = -\vec{e}_r$ , voir Fig.41). Avec (146)(147),

$$\boxed{\vec{S} = \frac{q^2 a_z^2 (t' = t - r'/c) \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r'^2} \vec{e}_r} \quad (148)$$

L'intensité de l'onde EM émise par la particule accélérée va comme  $\sim 1/r'^2$ . Elle est modulée en direction comme  $\sim \sin^2 \theta$ , où  $\theta$  est l'angle entre l'accélération instantanée de la particule à sa position apparente et la direction d'observation (Figure 42).

**Puissance totale instantanée rayonnée par la charge accélérée.** Soit  $S$  une sphère de rayon  $R$  centrée sur la position apparente de la particule (Figure 43). La puissance totale à travers  $S$  est

$$P_{rad} = \oiint \vec{S} \cdot \vec{d}\sigma$$

En coordonnées sphériques, l'élément de surface est

$$\vec{d}\sigma = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{e}_r$$

ainsi,

$$P_{rad} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \frac{q^2 a^2 \sin^3 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} .$$

Avec  $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = 4/3$ , on obtient

$$\boxed{P_{rad} = \frac{q^2 a^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}} . \quad (149)$$

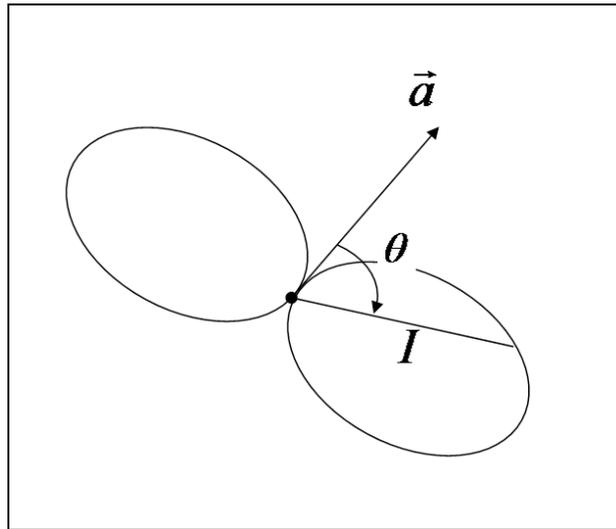


FIG. 42 – Diagramme de l'intensité émise par la particule accélérée en fonction de l'angle entre son accélération et la direction d'observation.

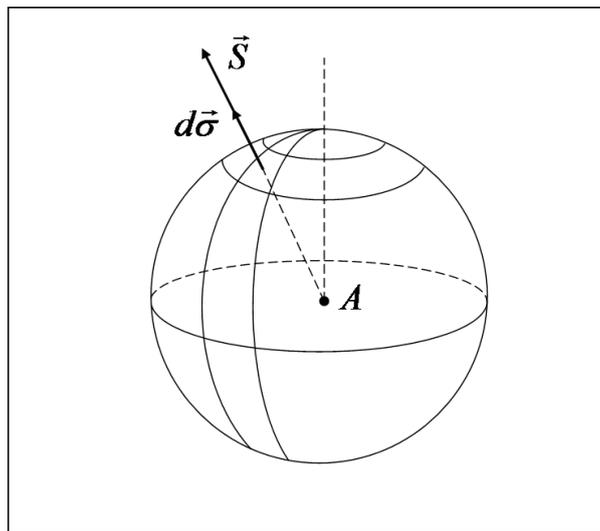


FIG. 43 – Calcul du flux d'énergie EM rayonnée par la particule accélérée.

C'est la **formule de Larmor**, qui donne la puissance rayonnée par une particule accélérée, sous forme d'onde EM, reçue à une distance  $R$ , à l'instant  $t$ , et émise par la particule au temps  $t - R/c$ .

Dans les unités SI, pour une charge élémentaire  $q = e = 1.6 \times 10^{-19}[\text{C}]$ , on a

$$P_{rad} = 5.68 \times 10^{-54} a^2 [\text{Watt}] .$$

Cela semble minuscule, cependant **c'est par ce mécanisme fondamental que les antennes émettrices d'ondes EM fonctionnent.**

On notera que  $P_{rad}$  est indépendant du rayon  $R$  de la sphère où le flux d'énergie EM est reçu, mis à part le temps de retard  $R/c$ . Par le principe de conservation de l'énergie,  $P_{rad}$

est, par unité de temps, l'énergie perdue par la particule sous forme d'onde EM du fait de son accélération. On retrouve la même quantité d'énergie sous forme de flux d'énergie EM un temps  $R/c$  plus tard, à la distance  $R$  de la position "initiale" (apparente) de la particule.

L'intensité de l'onde émise varie en  $\sim 1/R^2$ , et la surface de la sphère va comme  $\sim R^2$ , et donc le produit des deux est constant. Il n'y a pas de dissipation d'énergie EM dans le vide.

### 5.5.3 Antenne émettrice : exemple

On considère deux fils de longueur  $d/2$  reliés à un générateur de courant AC (Figure 44). Le courant oscillant  $I(t)$  fait osciller les charges électriques entre le fil supérieur et le fil inférieur. Pour simplifier le calcul, on admettra que cela revient à prendre une charge ponctuelle  $q$  qui a un mouvement oscillant d'amplitude  $d/2$  :

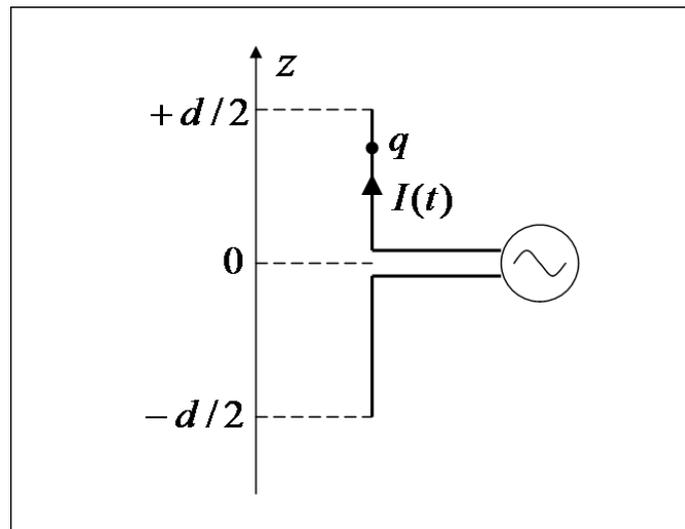


FIG. 44 – Antenne dipolaire.

$$z(t) = \frac{1}{2}d \cos(\omega t) .$$

Son accélération est ainsi

$$a(t) = -\frac{1}{2}\omega^2 d \cos(\omega t) .$$

La puissance rayonnée, Eq.(149) est ainsi

$$P_{rad} = \frac{q^2 \omega^4 d^2 \cos^2(\omega t)}{24\pi \varepsilon_0 c^3}$$

La relation entre  $q$  et l'amplitude du courant est

$$|q| = \frac{2|\hat{I}|}{\omega} ,$$

et donc on a, après moyenne sur une période, ( $\langle \cos^2 \rangle = 1/2$ ),

$$P_{rad} = \frac{|\hat{I}|^2 \omega^2 d^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}.$$

On peut calculer la **résistance de rayonnement**  $R_{rad}$  de l'antenne à partir de la formule

$$P_{rad} = \frac{1}{2} R_{rad} |\hat{I}|^2$$

et de la relation de dispersion  $\omega^2 = k^2 c^2$ , et de  $k = 2\pi/\lambda$ , où  $\lambda$  est la longueur d'onde de l'onde EM émise dans le vide. On obtient

$$R_{rad} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 = 789 \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 \text{ [Ohm]}. \quad (150)$$

#### 5.5.4 Transmission d'ondes EM dans un câble coaxial

On considère un câble coaxial, formé de deux conducteurs cylindriques concentriques, de rayons  $a$  et  $b$  (Figure 45). On peut montrer (exercice) qu'une solution possible des équations de Maxwell, Eq.(115), est

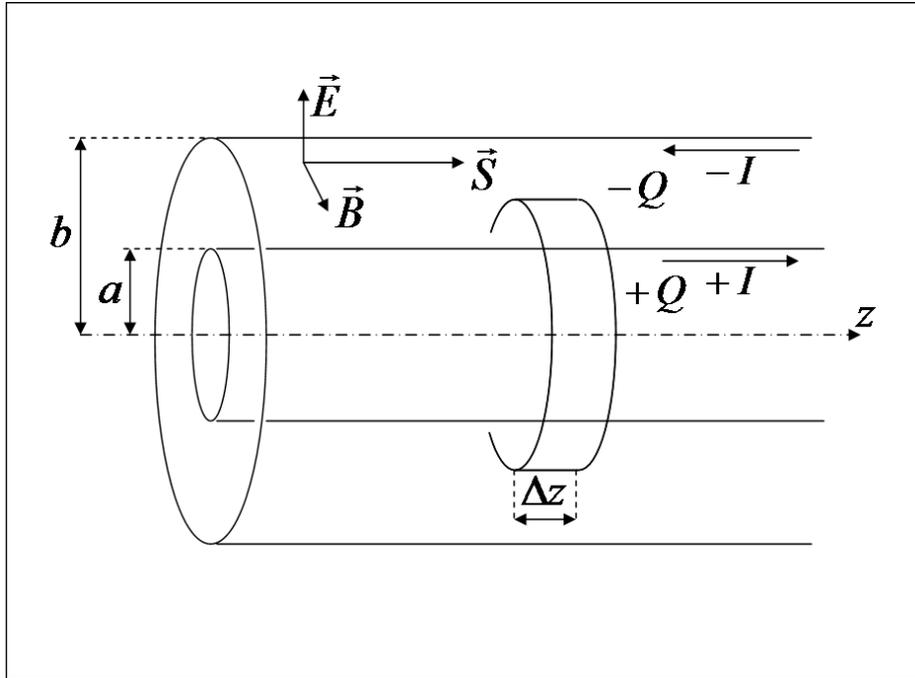


FIG. 45 – Propagation d'onde EM dans un câble coaxial.

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \mathcal{R}e \left( \frac{\hat{\alpha}}{r} e^{i(kz - \omega t)} \right) \vec{e}_r, \quad \vec{B}(\vec{x}, t) = \mathcal{R}e \left( \frac{\hat{\beta}}{r} e^{i(kz - \omega t)} \right) \vec{e}_\theta, \quad (151)$$

avec  $\omega$  et  $k$  constantes réelles satisfaisant la relation de dispersion  $\omega^2 = k^2 c^2$ , et  $\hat{\alpha}$  et  $\hat{\beta}$  constantes complexes satisfaisant la relation

$$\beta = \frac{k}{\omega} \alpha .$$

Le champ EM est une onde sinusoïdale se propageant à la vitesse  $\omega/k = c$  dans la direction  $z$ . L'amplitude est en  $\sim 1/r$ . Le flux d'énergie EM associé est

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} E_r B_\theta \vec{e}_z$$

qui est dans la direction  $z$ . Moyennant sur une période d'oscillation, on a

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\hat{\alpha}^* \hat{\beta}}{r^2} \vec{e}_z = \frac{\varepsilon_0 |\hat{\alpha}|^2}{2r^2} c \vec{e}_z$$

La puissance transmise à travers une section du câble coaxial est :

$$\langle P \rangle = \int_a^b \langle \vec{S} \rangle \cdot \vec{e}_z 2\pi r dr = \varepsilon_0 |\hat{\alpha}|^2 c \pi \ln \left( \frac{b}{a} \right)$$

**Calcul de l'impédance du câble coaxial.** On calcule, avec la loi d'Ampère-Maxwell, Eq.(116)(d), la relation entre le courant  $I_z(z, t)$  sur le conducteur central et les champs EM (exercice) :

$$I_z(z, t) = 2\pi \varepsilon_0 c \hat{\alpha} e^{i(kz - \omega t)} .$$

[Sur le conducteur externe, le courant est  $-I_z(z, t)$ ]. On a donc  $\hat{I} = 2\pi \varepsilon_0 c \hat{\alpha}$ . La tension entre les deux conducteurs s'obtient de

$$U = - \int_a^b E_r dr = \hat{\alpha} \ln \left( \frac{b}{a} \right) e^{i(kz - \omega t)}$$

On a donc  $\hat{U} = \hat{\alpha} \ln(b/a)$ . L'impédance  $Z = \hat{U}/\hat{I}$  est ainsi

$$Z = \frac{1}{2\pi \varepsilon_0 c} \ln \left( \frac{b}{a} \right) = \frac{\mu_0}{2\pi} c \ln \left( \frac{b}{a} \right) \approx 60 \ln \left( \frac{b}{a} \right) [\text{Ohm}] . \quad (152)$$

Le câble coaxial a donc une **impédance réelle, et donc se comporte comme une résistance** (alors qu'aucune résistivité du conducteur n'a été prise en compte!). On remarque, en effet, que le courant et la tension,  $I_z$  et  $U$ , sont en phase, comme pour une "vraie" résistance. Pour  $b/a = 2.3$ , un câble coaxial de longueur infinie se comporte comme une résistance de 50 Ohm.

### 5.5.5 Modélisation du câble coaxial comme une suite de capacités et d'auto-inductances

Avec la loi de Gauss pour le champ électrique, Eq.(116)(a), on obtient la charge pour une longueur  $\Delta z$  sur le conducteur central, (exercice) :

$$Q(z, t) = 2\pi \varepsilon_0 \hat{\alpha} e^{i(kz - \omega t)} \Delta z .$$

Sur le conducteur externe, cette charge est  $-Q(z, t)$ . On remarque que  $I_z = (Q/\Delta z)c$ , comme si la charge se propageait à la vitesse de la lumière  $c$ . Avec la tension  $U$  calculée plus haut et la définition de la capacité  $Q = CU$ , on obtient la capacité pour une longueur de câble  $\Delta z$  :

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)}\Delta z \quad (153)$$

Le calcul du flux magnétique entre les 2 conducteurs, pour une longueur de câble  $\Delta z$ , donne :

$$\Phi_m(z, t) = \frac{\mu_0 I(z, t)}{2\pi} \ln(b/a)\Delta z .$$

De la définition de l'auto-inductance  $\Phi_m = LI$ , on obtient l'auto-inductance pour une longueur de câble  $\Delta z$  :

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(b/a)\Delta z . \quad (154)$$

On peut ainsi considérer le câble coaxial comme une suite infinie de capacités et d'auto-inductances telles que représentées à la Figure 46. On obtient l'impédance d'une suite de

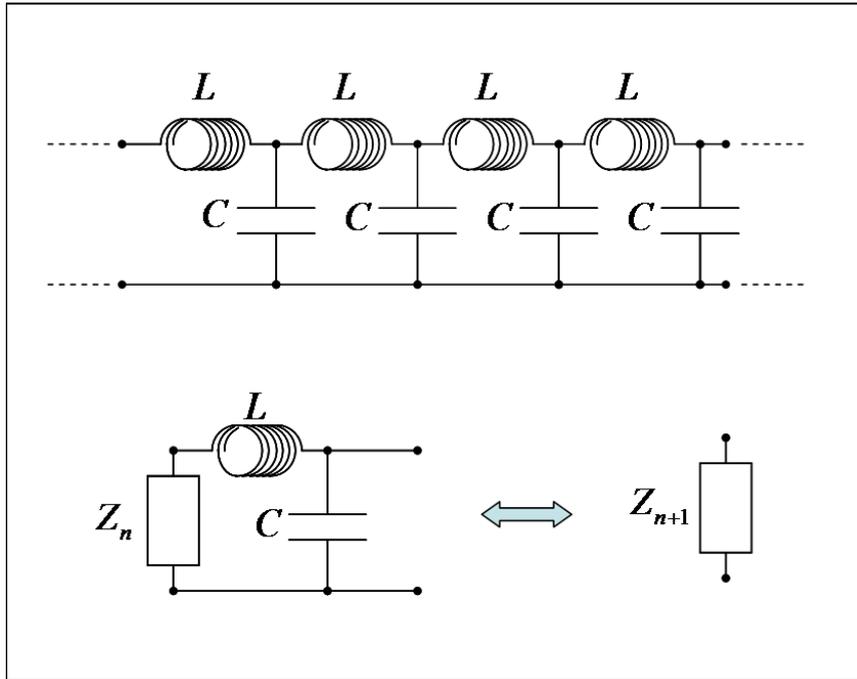


FIG. 46 – Modélisation d'un câble coaxial.

$n + 1$  connaissant celle d'une suite de  $n$  :

$$Z_{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{Z_n + i\omega L} + i\omega C} = \frac{Z_n + i\omega L}{1 - \omega^2 LC + i\omega CZ_n} .$$

Dans la limite d'une infinité d'éléments,  $n \rightarrow \infty$ ,  $\Delta z \rightarrow 0$ , on a  $Z_{n+1} = Z_n = Z$ , et

$$i\omega CZ^2 + (1 - \omega^2 LC)Z = Z + i\omega L \Rightarrow Z^2 + i\omega LZ - \frac{L}{C} = 0 .$$

Dans cette dernière équation, le terme  $i\omega L$  va comme  $\Delta z$  et donc tend vers zéro pour une suite infinie d'éléments infinitésimaux, alors que le terme  $L/C$  reste fini. On trouve

$$\boxed{Z = \sqrt{\frac{L}{C}}} \quad (155)$$

Introduisant les expressions pour  $L$  et  $C$ , Eqs.(153-154), on trouve

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0(\ln(b/a))^2}{(2\pi)^2\varepsilon_0}} = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right), \quad (156)$$

qui est bien ce qu'on avait trouvé en (152).

L'approche adoptée ci-dessus fait partie de la théorie des lignes de transmission. Nous avons montré, dans cet exemple, son analogie avec la théorie des ondes de Maxwell. Le câble coaxial peut ainsi être considéré comme un guide d'onde, d'une part, et comme une chaîne de capacités et inductances, d'autre part. Si on rajoute les effets de la résistance du conducteur  $R$  et d'une conductance  $G$  entre les 2 conducteurs (par unité de longueur  $\Delta z$ ), on peut montrer que la tension dans le câble obéit à **l'équation du télégraphe** :

$$\boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right) \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{RG}{LC} U = \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}} \quad (157)$$

Sans résistance ni conductance,  $R = 0$  et  $G = 0$ , l'équation du télégraphe est de type *d'Alembert*. On verra au chapitre III ONDES qu' elle décrit une propagation d'onde indéformable dans la direction  $z$  à la vitesse  $u = \sqrt{1/LC}$ . Avec les valeurs de  $L$  et  $C$  calculées à la page précédente, on trouve

$$u = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}} = c$$

ce qui confirme bien le fait que les ondes se propagent à la vitesse de la lumière dans un câble coaxial.

Pour plus de détails, voir sous

<http://www.math.ubc.ca/~feldman/apps/telegrph.pdf>

## A Compléments

### A.1 Champ magnétique dipolaire, Eq.(75), démonstration

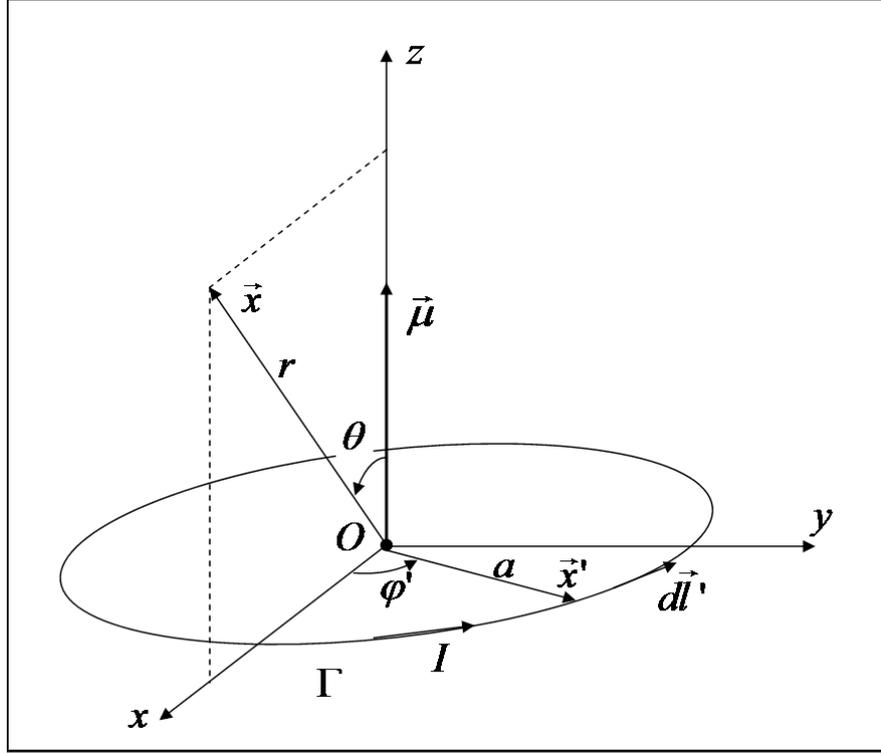


FIG. 47 – Calcul du champ dipolaire.

Le dipôle est une boucle de courant  $I$ , cercle de rayon  $a$ . Soit  $(x, y, z)$  les coordonnées cartésiennes et  $(r, \theta, \varphi)$  les coordonnées sphériques. A partir de la formule de Biot-Savart pour le potentiel vecteur  $\vec{A}$ , Eq(62), avec  $\vec{j}(\vec{x}')d^3x' = I\vec{dl}'$ , on a

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{\vec{dl}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (158)$$

Plaçons les axes de telle sorte que  $\vec{x}$  soit dans le plan  $(x, z)$ . On a :

$$\vec{x} = r (\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_z) \quad (159)$$

$$\vec{x}' = a (\cos \varphi' \vec{e}_x + \sin \varphi' \vec{e}_y) \quad (160)$$

$$\vec{dl}' = a d\varphi' (-\sin \varphi' \vec{e}_x + \cos \varphi' \vec{e}_y) \quad (161)$$

On a donc

$$\vec{x} - \vec{x}' = (r \sin \theta - a \cos \varphi') \vec{e}_x - a \sin \varphi' \vec{e}_y + r \cos \theta \vec{e}_z$$

$$\begin{aligned} |\vec{x} - \vec{x}'|^2 &= r^2 \sin^2 \theta - 2ar \sin \theta \cos \varphi' + a^2 \cos^2 \varphi' + a^2 \sin^2 \varphi' + r^2 \cos^2 \theta \\ &= r^2 \left( 1 - 2\frac{a}{r} \sin \theta \cos \varphi' + \frac{a^2}{r^2} \right) \end{aligned}$$

Au premier ordre en  $(a/r)$ ,

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \approx \frac{1}{r\sqrt{1 - 2(a/r)\sin\theta\cos\varphi'}} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r}\sin\theta\cos\varphi'\right). \quad (162)$$

Insérant cette dernière expression et (161) dans l'Eq. (158), on a

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}) &\approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} a d\varphi' (-\sin\varphi'\vec{e}_x + \cos\varphi'\vec{e}_y) \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r}\sin\theta\cos\varphi'\right) \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{r} \int_0^{2\pi} \left[ (-\sin\varphi' - \sin\varphi'\frac{a}{r}\sin\theta\cos\varphi') \vec{e}_x \right. \\ &\quad \left. + \left(\cos\varphi' + \frac{a}{r}\sin\theta\cos^2\varphi'\right) \vec{e}_y \right] d\varphi'. \end{aligned}$$

Seul le dernier des 4 termes sous l'intégrale donne un résultat non nul,  $(\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi' d\varphi' = \pi)$ , et donc

$$\vec{A}(\vec{x}) \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a^2}{r^2} \pi \sin\theta \vec{e}_y.$$

Avec la définition du moment magnétique dipolaire, Eq.(74),  $|\mu| = I\pi a^2$ , on a

$$\vec{A}(\vec{x}) \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{|\mu| \sin\theta}{r^2} \vec{e}_y.$$

Ceci est le potentiel vecteur en un point  $\vec{x}$  choisi en  $\varphi = 0$  (voir Figure). Pour un point  $\vec{x}$  quelconque,  $\varphi \neq 0$ , et on a

$$\boxed{\vec{A}(\vec{x}) \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{|\mu| \sin\theta}{r^2} \vec{e}_\varphi}. \quad (163)$$

On remarque qu'en coordonnées sphériques,  $\vec{A}$  n'a qu'une composante (selon  $\varphi$ ) : on a  $\vec{A} = A_\varphi(r, \theta)\vec{e}_\varphi$ , autrement dit

$$A_r = 0, \quad A_\theta = 0, \quad \frac{\partial}{\partial\varphi} = 0. \quad (164)$$

En utilisant ces propriétés, on obtient l'expression du champ magnétique  $\vec{B}(\vec{x})$  à partir de  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$  en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{x}) &\approx \frac{\mu_0 |\vec{\mu}|}{4\pi} \left\{ \vec{e}_r \left[ \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \frac{\sin\theta}{r^2} \sin\theta \right) \right] + \vec{e}_\theta \left[ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\sin\theta}{r^2} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{\mu_0 |\vec{\mu}|}{4\pi} \left\{ \vec{e}_r \frac{2 \sin\theta \cos\theta}{r^3 \sin\theta} + \vec{e}_\theta \left[ -\frac{\sin\theta}{r} \left( \frac{-1}{r^2} \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 |\vec{\mu}|}{4\pi r^3} (2 \cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta)}. \quad (165)$$

L'équation (75) est donc démontrée.