

Notes : Gradient en coordonnées cylindriques

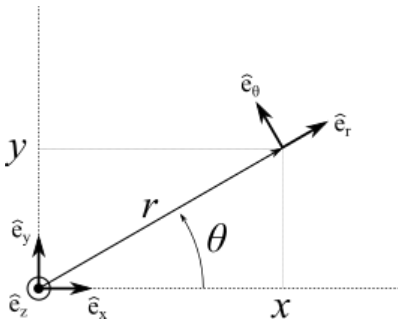
Soit une fonction $\phi(x, y, z)$. Son gradient en coordonnées cartésiennes s'écrit :

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{e}_z$$

Nous allons exprimer ce gradient dans le système de coordonnées polaires (ou cylindriques) défini par les coordonnées (r, θ, z) .

Les coordonnées des deux systèmes (x, y, z) et (r, θ, z) sont liées par les relations suivantes :

$$\begin{cases} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= z \end{cases}$$



De plus le système de coordonnées polaires a pour base les vecteurs unitaires $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_z)$ tels que :

$$\begin{cases} \hat{e}_r &= \cos \theta \hat{e}_x + \sin \theta \hat{e}_y \\ \hat{e}_\theta &= -\sin \theta \hat{e}_x + \cos \theta \hat{e}_y \\ \hat{e}_z &= \hat{e}_z \end{cases}$$

Regardons ce que deviennent les composantes de $\vec{\nabla}\phi$ en coordonnées polaires (ou cylindriques) :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\phi \cdot \hat{e}_r &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{e}_x \cdot \hat{e}_r + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{e}_y \cdot \hat{e}_r + 0 \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial\phi}{\partial y} \sin \theta \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\phi.\hat{e}_\theta &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{e}_x.\hat{e}_\theta + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{e}_y.\hat{e}_\theta + 0 \\
&= \frac{\partial\phi}{\partial x}(-\sin\theta) + \frac{\partial\phi}{\partial y}\cos\theta \\
&= \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial\theta} \\
&= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}\right] \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\phi.\hat{e}_z &= 0 + 0 + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{e}_z.\hat{e}_z \\
&= \frac{\partial\phi}{\partial z}
\end{aligned}$$

On peut donc finalement écrire $\vec{\nabla}\phi$ dans la base $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_z)$:

$$\boxed{\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{e}_\theta + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{e}_z}$$

Note :

Pour comprendre de manière intuitive la composante en θ , on peut voir la dérivé spatiale de ϕ selon une direction, comme une petite variation $d\phi$ selon cette direction, divisée par la longueur parcourue.

En effet lorsque les coordonnées (x, y, z, r) varient de manière infinitésimale, leur variation peut simplement s'écrire (dx, dy, dz, dr) . Mais lorsque θ varie de $d\theta$, la longueur parcourue est $r d\theta$. Donc la dérivée selon cette direction s'écrit comme $d\phi/r d\theta$.

