

Physique Générale: électromagnétisme – Cours 28

review théorique

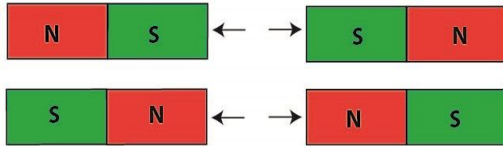
On a observé que...

un **aimant** agit sur un **aimant**

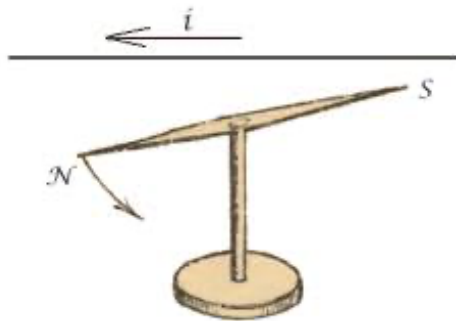
Les pôles opposés s'attirent



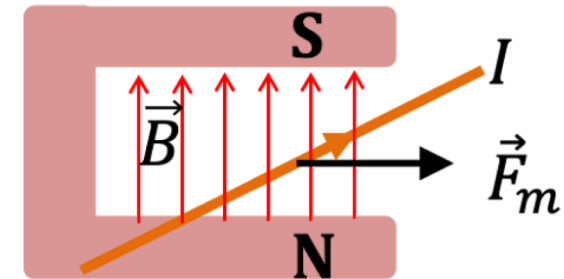
Les mêmes pôles se repoussent



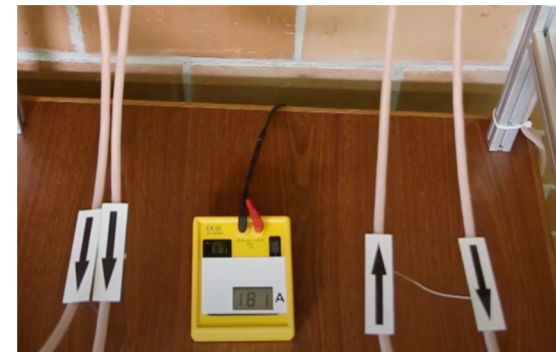
un **courant** agit sur un **aimant**



un **aimant** agit sur un **courant**

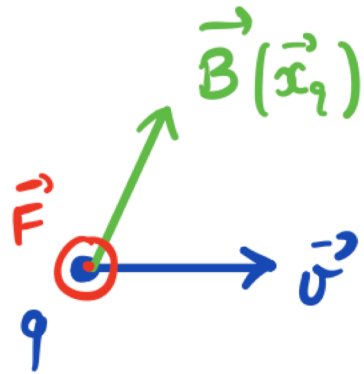


un **courant** agit sur un **courant**



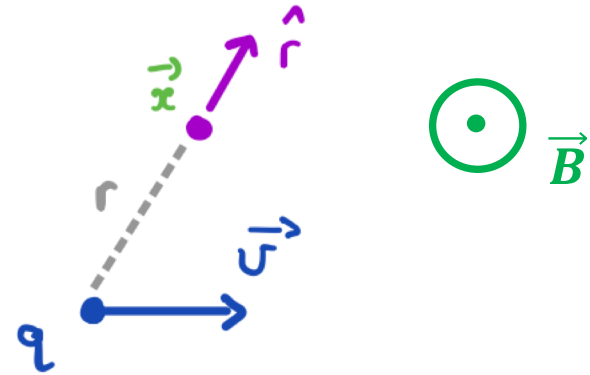
Une charge en mouvement est soumise à $\vec{B}$ et est source de $\vec{B}$!

effet de $\vec{B}$



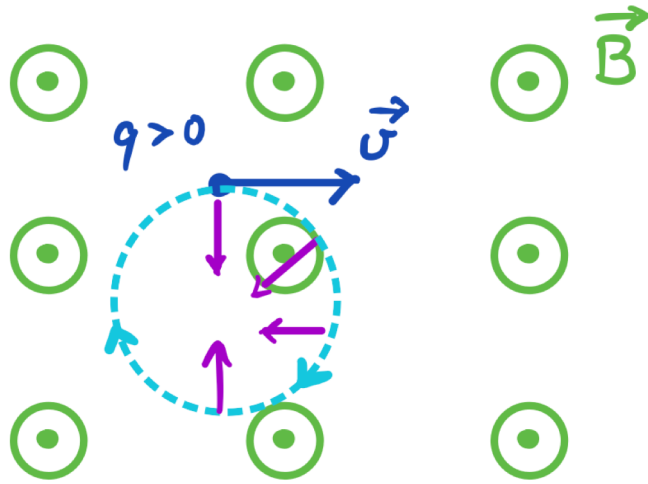
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

source de $\vec{B}$



$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$$

Conséquences de la force magnétique sur des charges:

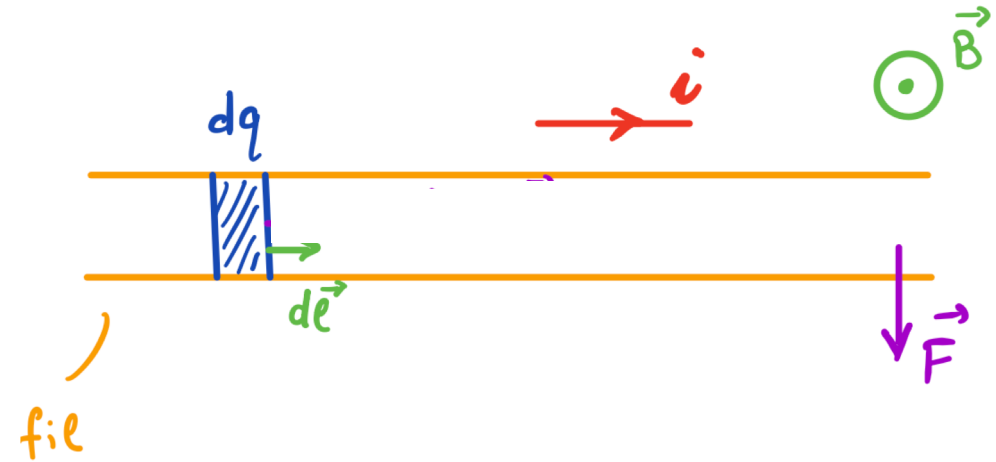


mouvement cyclotronique

$$R = \frac{mv}{|q|B} \quad (\text{rayon})$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{|q|B}{m} \quad (\text{fréquence})$$

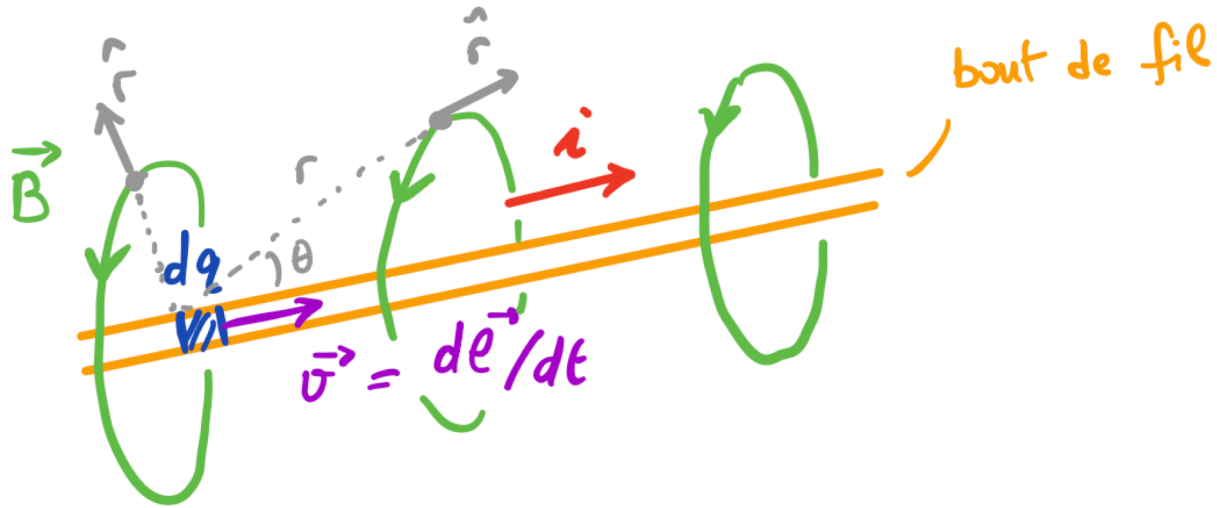
et la force ne travaille pas, donc $|\mathbf{v}| = \text{const}$



force sur un fil avec courant

$$\vec{F} = \int_{\text{fil}} i d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

Conséquence de $\mathbf{B}$ produit par le mouvement de charges:



$$d\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dq \vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$$

Champ produit par un courant

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int_{\text{fil}} \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$

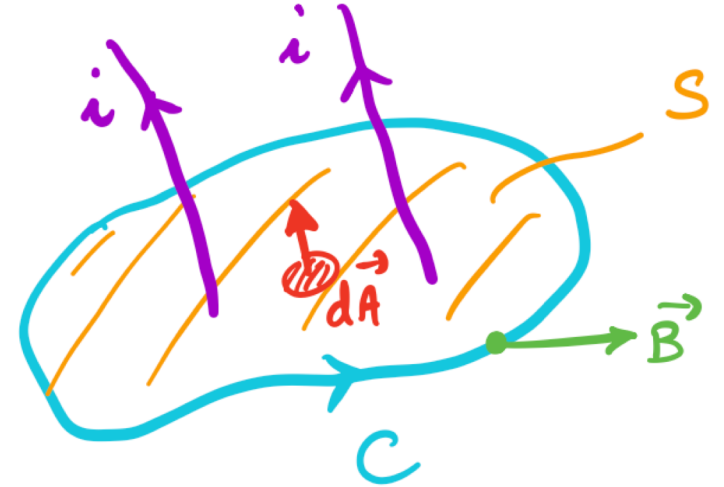
" loi de Biot - Savart "

Loi d'Ampère permet souvent de calculer $\vec{B}$ facilement:

Pour tout parcours fermé C ,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i_{\text{ent.}}^C$$

"loi d'Ampère"



$$i_{\text{ent.}}^C = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

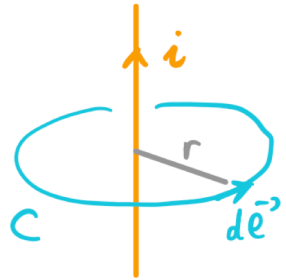
élément de surface orientée par parcours C

densité de courant $[A/m^2]$

ici, $\int \vec{B} \cdot d\vec{\ell} > 0$
car i orienté
comme S .

Exemples de calculs de $\vec{B}$ avec Ampère:

fil droit infini

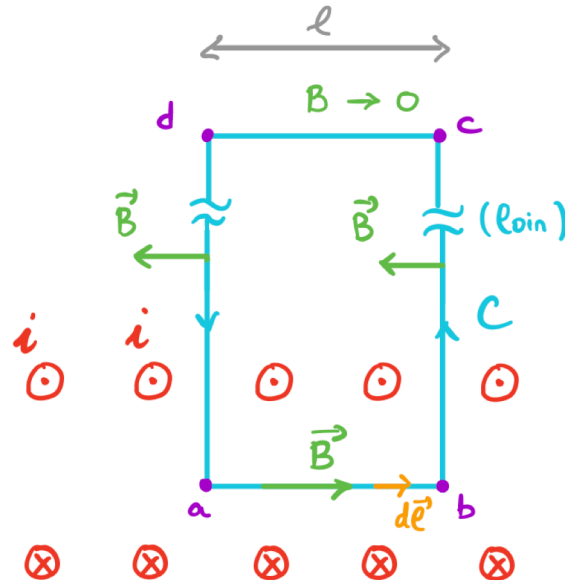
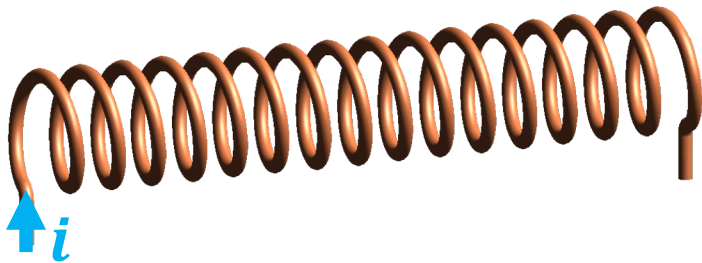


Par symétrie :

$$\begin{cases} \vec{B} \text{ azimutal} \Rightarrow \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B d\ell \\ B = B(r) \Rightarrow \oint B d\ell = B 2\pi r \end{cases}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

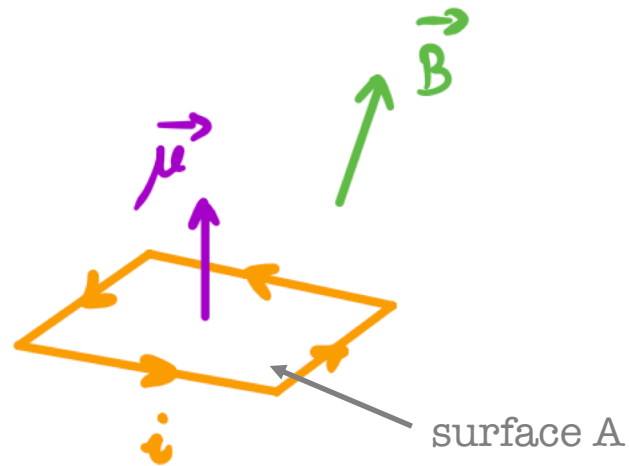
solénoïde



$$\oint_{abcd} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \underbrace{\int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{\ell}}_{B \cdot l} + \underbrace{\int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{\ell}}_{=0} + \underbrace{\int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{\ell}}_{=0} + \underbrace{\int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{\ell}}_{=0}$$

$$B_{\text{solénoïde}} = \frac{\mu_0 i N_{\text{tot}}}{L_{\text{tot}}}$$

Dipôles magnétiques et l'équivalence "spire courant" — "aimant"

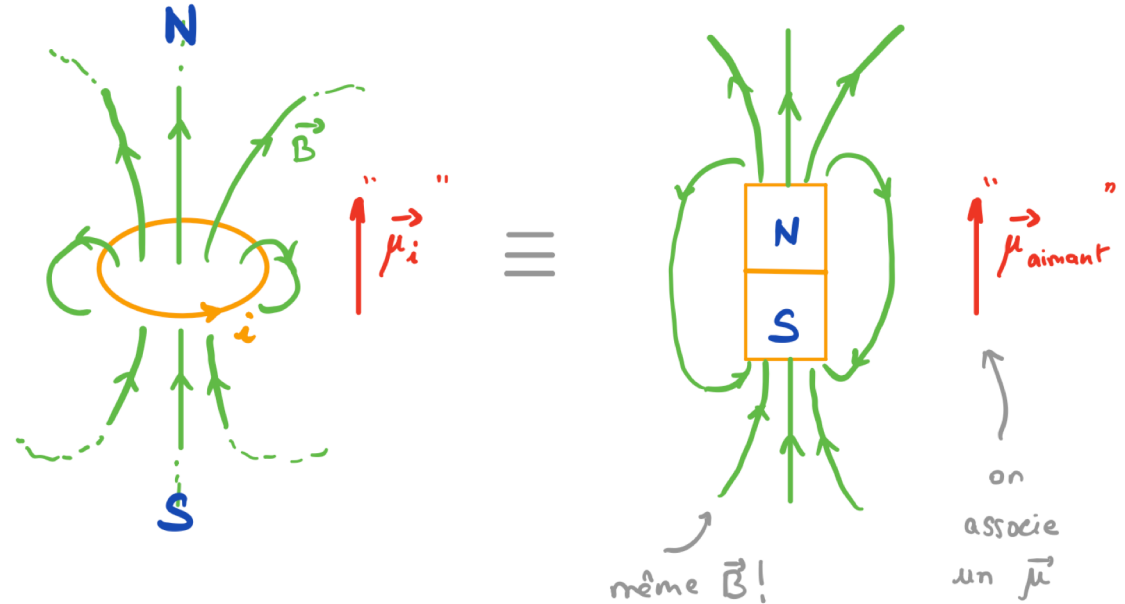


$$\vec{\mu} = i \vec{A}$$

(moment magnétique)

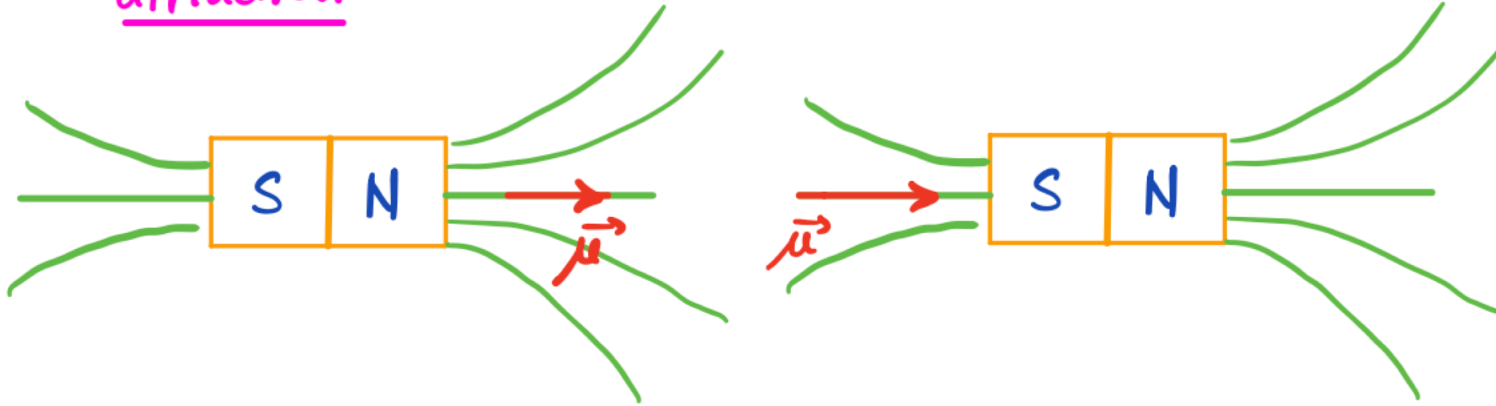
$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

(couple de force dans $\mathbf{B}$ uniforme)

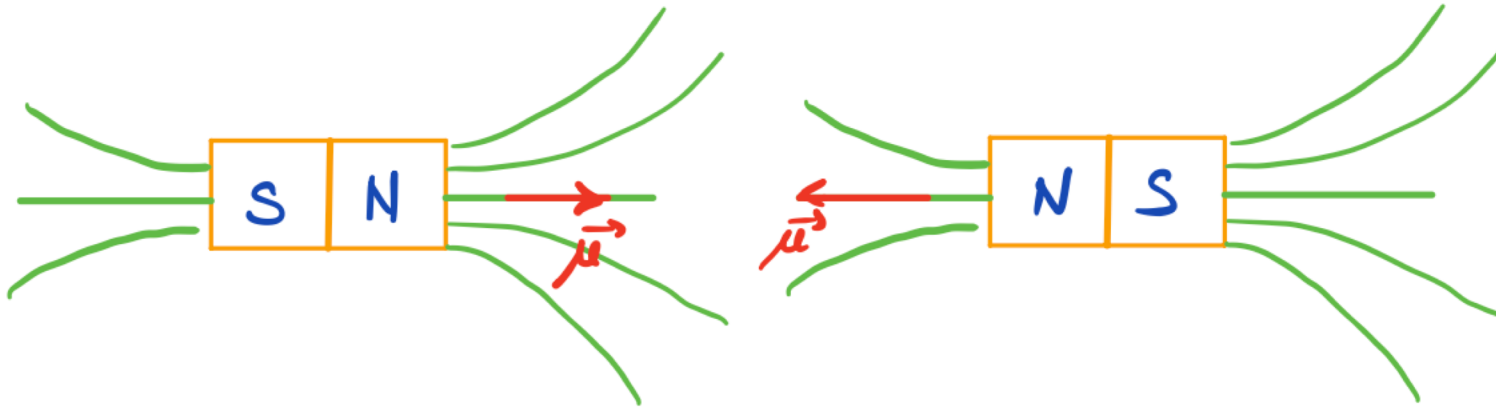


Dipôles dans $\mathbf{B}$ non-uniforme explique force entre aimants

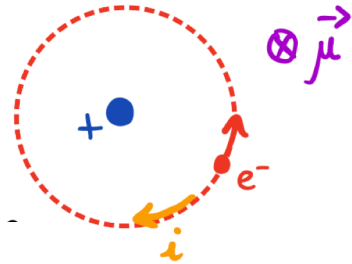
attraction :



répulsion :



B dans la matière et réponse à un champ externe:



**magnétisation
d'un milieu:**

$$\vec{M} = \frac{\sum_{\text{volume}} \vec{\mu}_i}{\text{volume}}$$

souvent $\mathbf{M} = 0$ car les μ sont aléatoires

avec un $\mathbf{B}_0$ externe les μ peuvent s'aligner

réponse à un champ externe $\mathbf{B}_0$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M} = K_m \vec{B}_0$$

permeabilité magnétique
relative

matériaux paramagnétiques: $K_m > 1$ (cas extrême: ferromagnétiques)

matériaux diamagnétiques: $K_m < 1$ (cas extrême: supraconducteurs)

Phénomène d'induction: un $\mathbf{B}$ peut induire un $\mathbf{E}$

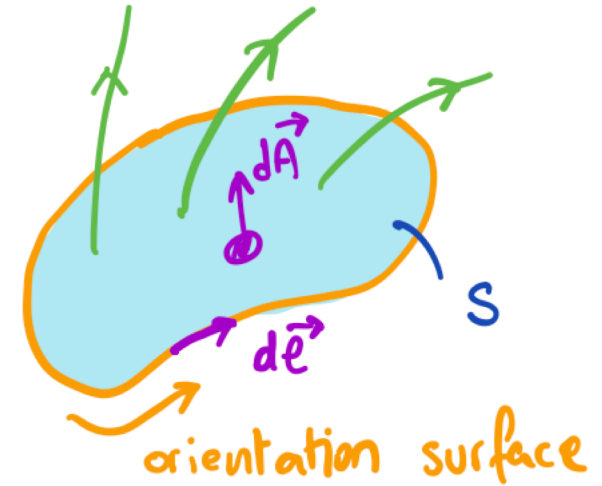
Loi de Faraday (loi d'induction)

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B^S}{dt}$$

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\text{travail boucle}}{\text{charge}} \quad [\text{V}]$$

↑ emf induite !
↑ champ électrique induit !

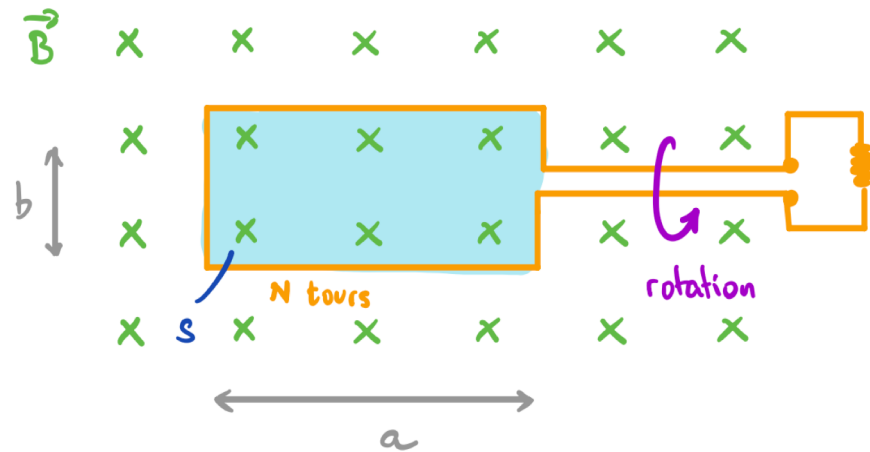
$$\Phi_B^S = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$



règle de Lenz: emf s'oppose (si courant induit) à la variation de flux magnétique

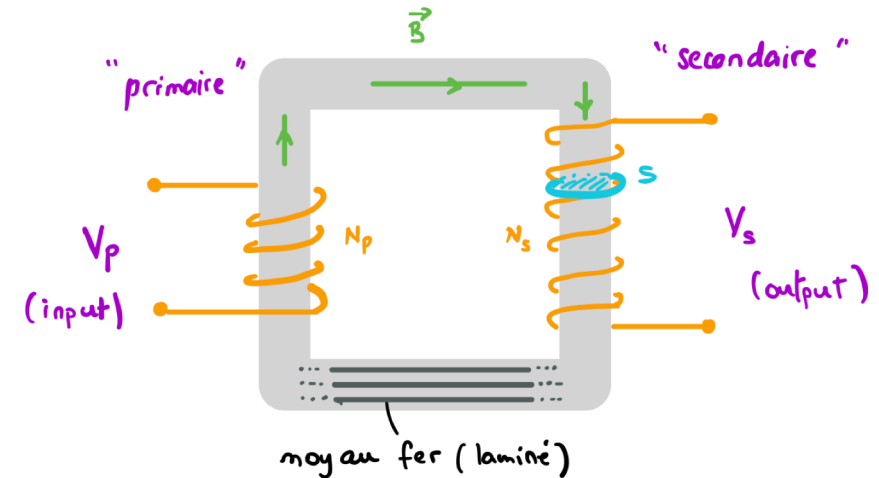
Applications du phénomène d'induction

génération d'électricité (AC)



$$\mathcal{E} = -N a b B \frac{d}{dt} (\cos \theta) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t)$$

transformateurs



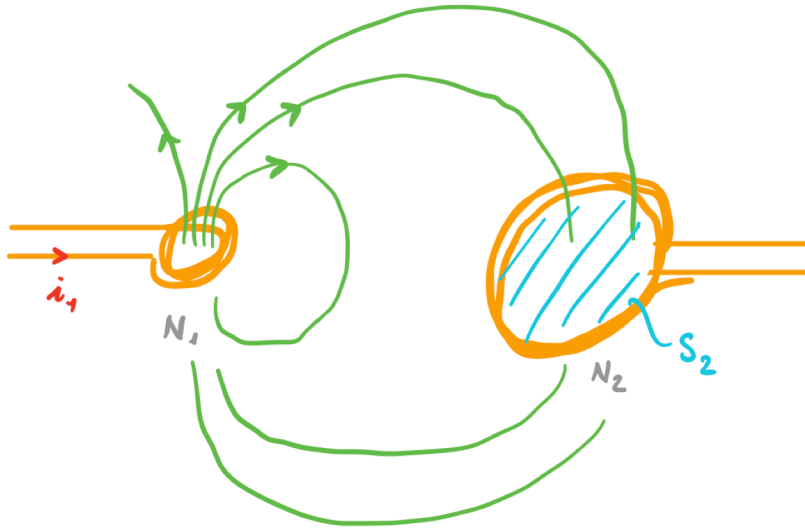
$$\frac{V_s}{V_p} = \frac{N_s}{N_p}$$

$$\frac{i_s}{i_p} = \frac{N_p}{N_s}$$

autres exemples: **chauffage par induction, freinage magnétique, striction, etc.**

Inductance mutuelle et auto-inductance

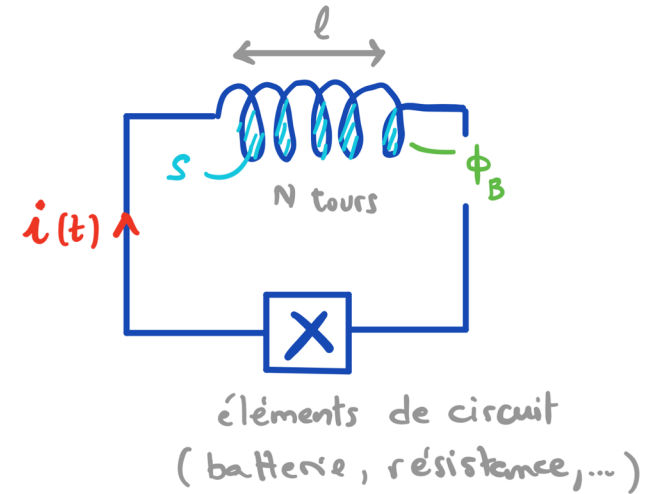
inductance mutuelle



$$M_{12} = \frac{\Phi_B^2}{i_1} = \frac{N_2 \Phi_B^{s_2}}{i_1}$$

$$M_{21} = M_{12} \equiv M$$

auto-inductance



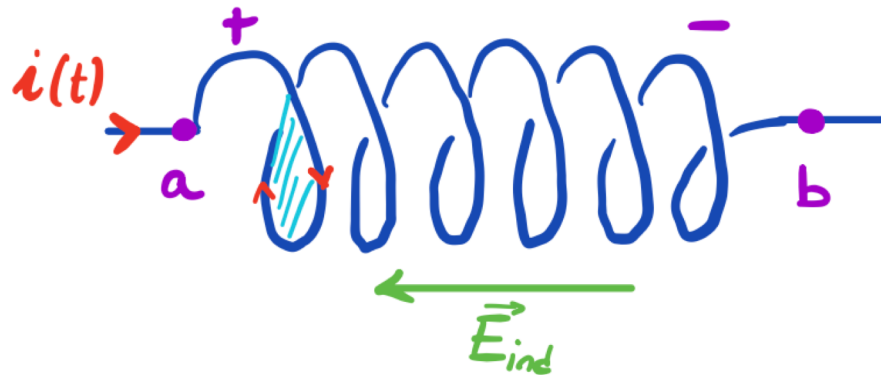
$$L \equiv \frac{\Phi_B}{i}$$

exemple solénoïde: $L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S$

sans solénoïde, cadre d'un circuit a aussi une L !

Force électromotrice induite par une L

par Faraday: $\mathcal{E}_{\text{ind}} = - \frac{d\phi_B}{dt} = - L \frac{di}{dt}$ "back enf"

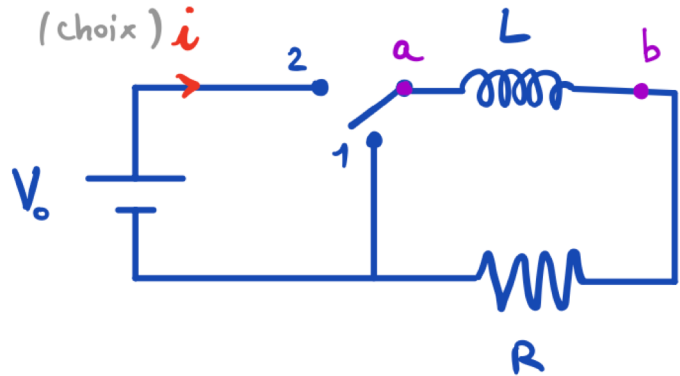


$$\frac{di}{dt} > 0$$
$$\mathcal{E}_{\text{ind}} < 0$$

$$V_a - V_b = - \mathcal{E}_{\text{ind}} = L \frac{di}{dt}$$

définis par rapport
au sens choisi pour i

Circuits RL (exemple de 'charge')



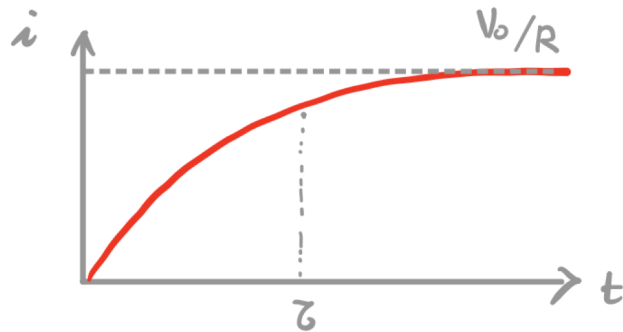
switch $1 \rightarrow 2$

$$i(t) = ?$$

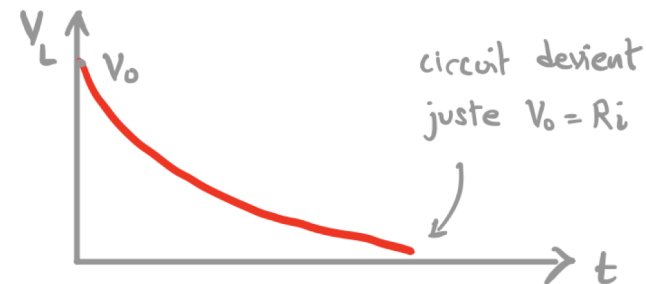
$$V_L(t) = ?$$

loi des mailles:

$$V_0 - L \frac{di}{dt} - Ri = 0$$



$$i(t) = \frac{V_0}{R} \left(1 - e^{-t/\tau} \right)$$



$$V_L = V_0 e^{-t/\tau}$$

$$\tau = L/R$$

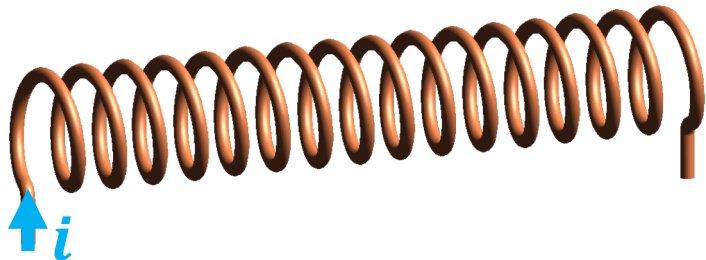
(temps caractéristique)

Important: ne pas prendre ces formules comme générales, elles dépendent des conditions initiales et de la configuration du circuit!

Energie stockée dans une bobine

**énergie (magnétique)
stockée dans une bobine:**

$$U_L = \frac{1}{2} L i^2 \quad [\text{Joules}]$$

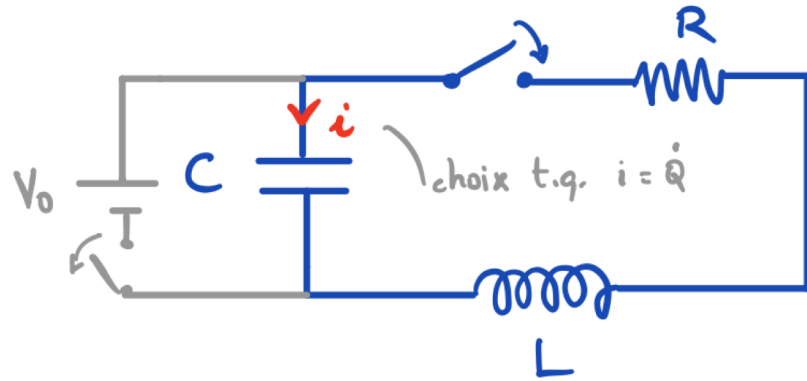


densité d'énergie (magnétique):

$$u = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad [\text{Joules/m}^3]$$

Formule plus générale, aussi valable pour
l'énergie (magnétique) dans les ondes é.m.!

Circuits RLC (exemple avec condensateur initialement chargé)



On charge C .

À $t = 0$, $Q(0) = Q_0$

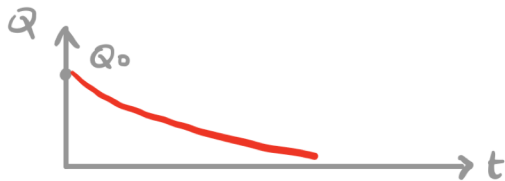
et on ferme le circuit.

loi des mailles:

$$-\frac{Q}{C} - Ri - L \frac{di}{dt} = 0$$

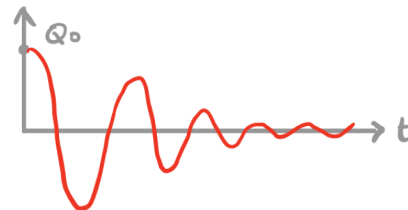
Cas "sur-amorti": $R^2/L^2 - \frac{4}{LC} > 0$

$Q(t)$ décroît exponentiellement



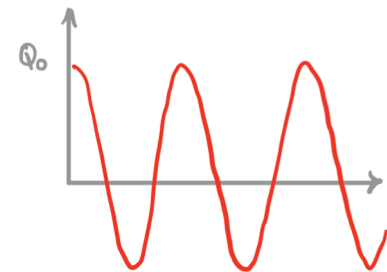
Cas "sous-amorti": $R^2/L^2 - \frac{4}{LC} < 0$

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{R}{2L}t} e^{\pm i\omega t}$$



$R = 0$?

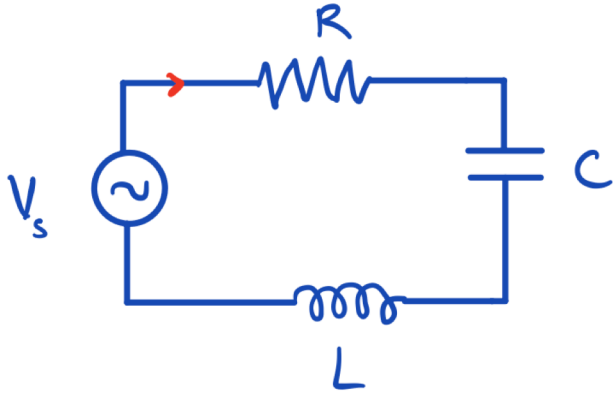
"oscillations électromagnétiques"



$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Important: ne pas prendre ces formules comme générales, elles dépendent des conditions initiales et de la configuration du circuit!

Circuits AC et impédance complexe (*exemple circuit RLC série*)



$$V_s = V_0 \sin(\omega t) = \text{Im}(V_0 e^{j\omega t})$$

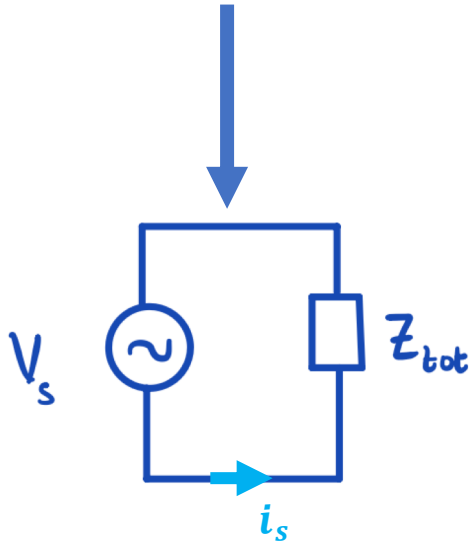
imposée extérieurement.

**Formules générales
impédances:**

$$Z_R = R$$

$$Z_L = j\omega L$$

$$Z_C = 1/j\omega C$$



Impédances se combinent comme des résistances:

$$\text{en série} \Rightarrow Z_{\text{tot}} = Z_R + Z_C + Z_L$$

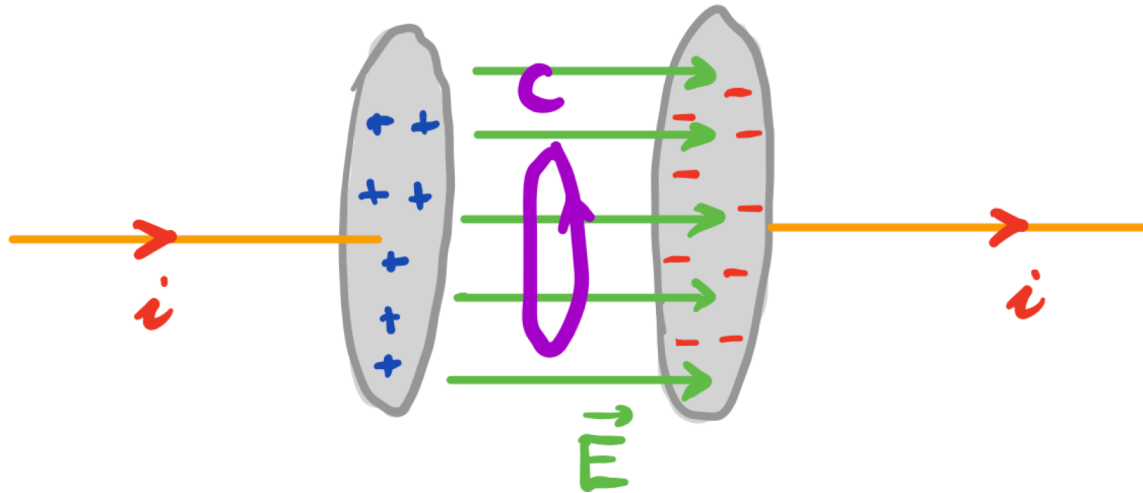
$$i_s(t) = V_s(t)/Z_{\text{tot}}$$

condition de résonance: $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ tel que $Z_{\text{tot}} \rightarrow 0$ (pour $R = 0$)

Note: si circuit en parallèle, on a vu que $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ tel que $Z_{\text{tot}} \rightarrow \infty$ (pour $R = 0$)

Loi d'Ampère généralisée avec un "courant de déplacement"

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i_{\text{ent.}}^c + \underbrace{\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_{S(c)} \vec{E} \cdot d\vec{A}}_{\mu_0 i_D}$$



Implique que dans un condensateur avec $E(t)$, il y a aussi un champ magnétique à l'intérieur!

Plus généralement: une variation de $E(t)$ produit un champ magnétique!

Equations de Maxwell

$$\int_{S_{\text{fermée}}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enf}}^s}{\epsilon_0} \quad ; \quad \int_{S_{\text{fermée}}} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \int_{S(c)} \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad ; \quad \oint_c \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i_{\text{enf}}^c + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_{S(c)} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

forme intégrale

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

forme différentielle

Equations de Maxwell dans le vide prédisent des ondes é.m. avec $u = c$!

dans le vide:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

exemple d'équation d'onde:

$$\vec{E} = \vec{E}(z, t)$$

$$\vec{B} = \vec{B}(z, t)$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$$

(idem pour E_y, B_x, B_y)

exemple de solution (onde plane):

$$E_x(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t)$$

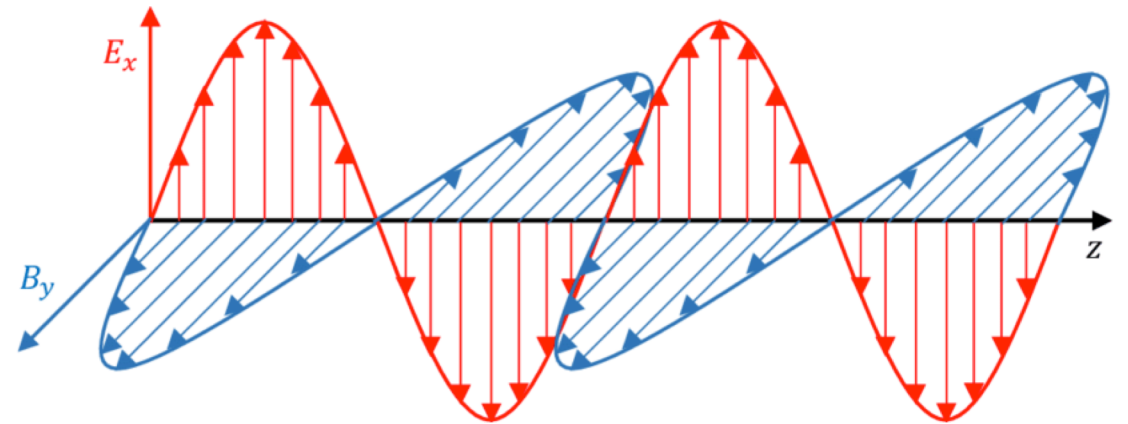
propagation selon +z

$$\lambda = 2\pi/k \quad : \quad \text{"longueur d'onde"}$$

$$T = 2\pi/\omega = \frac{1}{f} \quad : \quad \text{"période"} = 1/\text{"fréquence"}$$

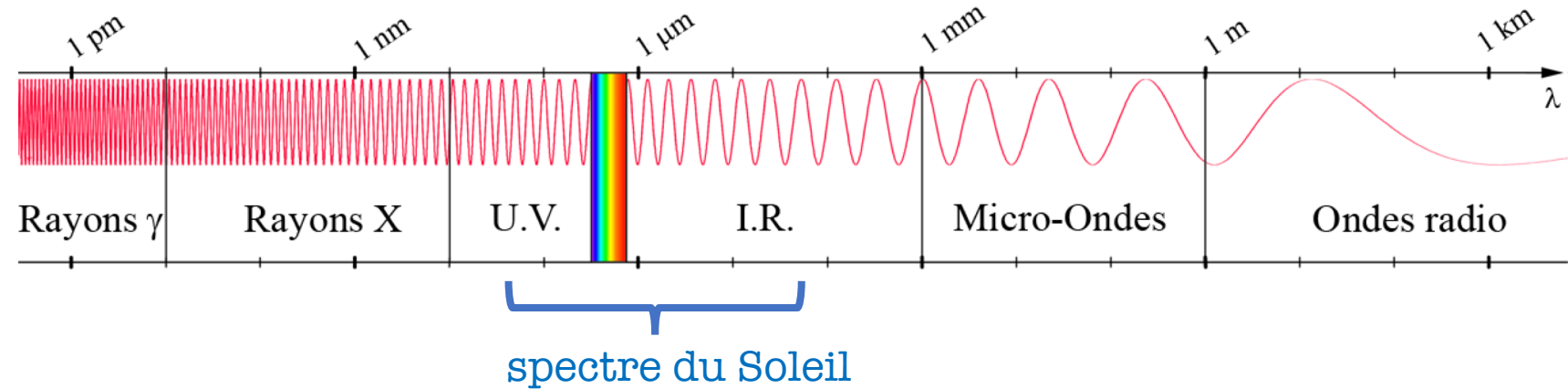
$$\frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = c$$

C'est la lumière!



$$\vec{E} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{E} \times \vec{B} \propto \hat{z} \quad \frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = c$$

Très souvent, les ondes é.m. ont un spectre de fréquences/longueurs d'onde:



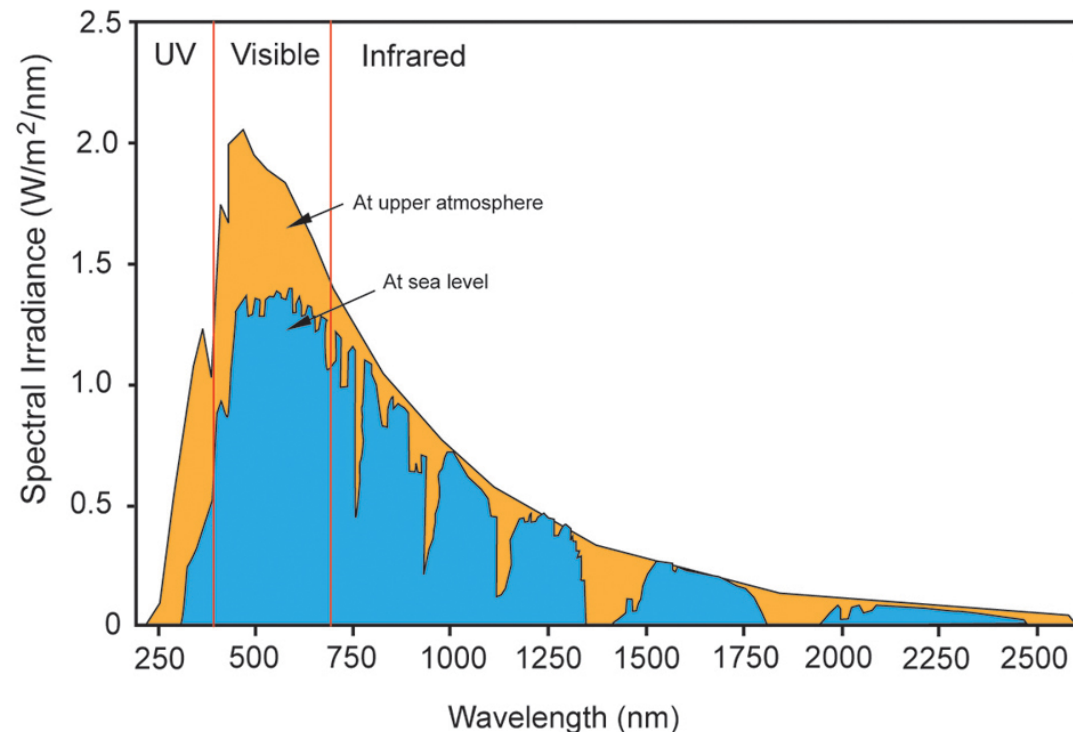
spectre Fourier 4D

$$\tilde{E}(\omega, \vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint \int E(\vec{x}, t) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} d^3 \vec{x} dt$$

spectre Fourier 1D (fréquence)

$$\tilde{E}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int E(t) e^{i\omega t} dt$$

et dans le vide $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi c}{\lambda}$



Energie dans les ondes é.m.

Densité d'énergie :

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

"vecteur de Poynting" (mesure le flux d'énergie [W/m²] et sa direction de propagation)

Intensité = moyenne temporelle de $S(x,t)$:

$$\overline{S} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$$

$$\overline{S} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{\mu_0} E B dt = \epsilon_0 c E_0^2 \underbrace{\overline{\cos^2(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}}_{= 1/2}$$

↑
pour une onde plane

Permet en particulier de calculer E_0 et B_0 à partir de l'intensité de la lumière.

Pression de radiation

$$\vec{g} = \frac{1}{c^2} \vec{S}$$

← densité de q'té mvt
des champs é.m.

- cas "absorbteur parfait" :

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{g} c A$$

$$\Rightarrow \text{pression} = \frac{F}{A} = c g = \frac{\overline{S}}{c} \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$$

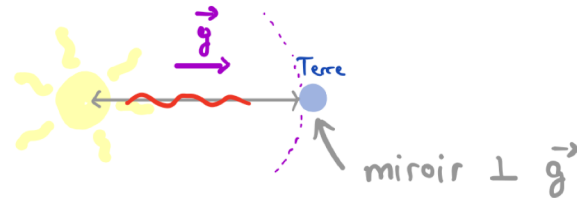
" Pa

- cas "miroir parfait" :

$$\vec{F} = 2 \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \text{pression} = \frac{2 \overline{S}}{c}$$

exemple: rayonnement solaire sur miroir



$$\begin{aligned} p_{\text{miroir}} &= \frac{2 \overline{S}}{c} \\ &\approx \frac{1.4 \times 10^3}{3 \times 10^8} \\ &\approx 4 \times 10^{-6} \text{ Pa} \end{aligned}$$

Ondes dans diélectriques (constante diélectrique K)

vitesse de propagation $v = \frac{1}{\sqrt{K K_m \epsilon_0 \mu_0}} := \frac{c}{n}$

$$n \approx \sqrt{K}$$

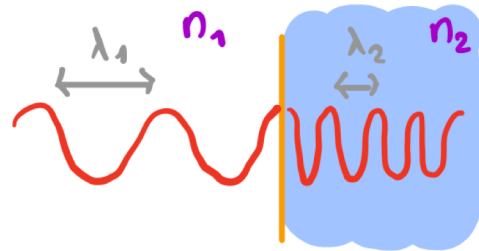
"indice de réfraction"

peut dépendre de la fréquence (couleur)!

Implication pour un rayon passant d'un milieu à un autre:

$$f \lambda = c \quad (\text{vide})$$

$$f \lambda = \frac{c}{n_2} \quad (\text{eau})$$



$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

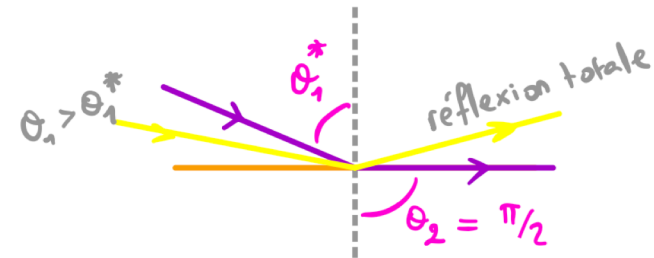
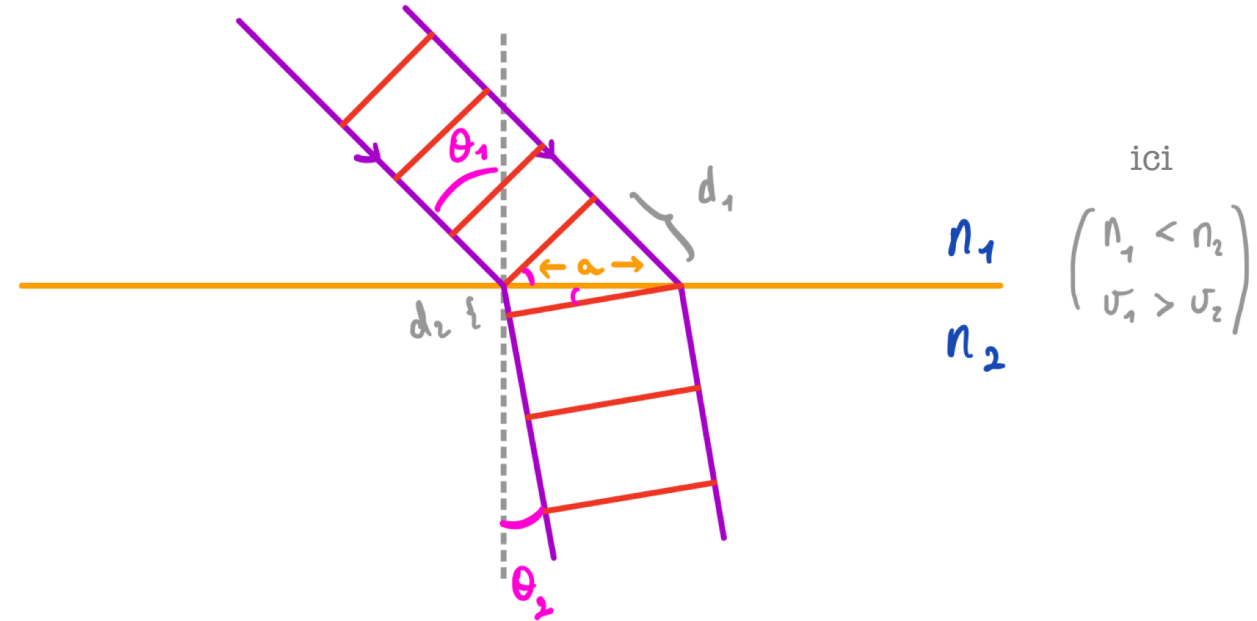
Loi de la refraction et de la réflexion:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

Mais $\sin \theta_2 = \underbrace{\frac{n_1}{n_2}}_{\text{supposons } > 1} \sin \theta_1$ ne peut pas être > 1 !

Pour $n_1 > n_2$, il y a donc un θ_1 maximal.

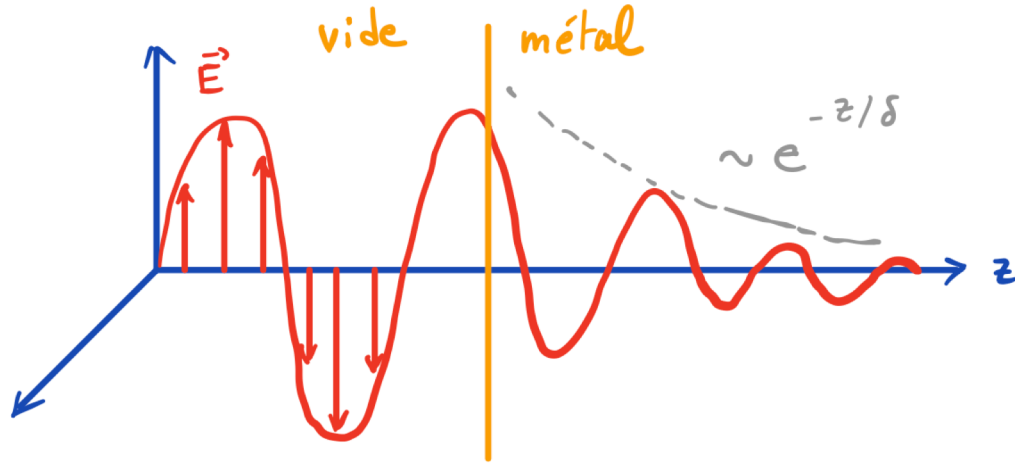
Pour $\theta_1 > \theta^*$, réflexion totale ($\theta_r = \theta_i$).



$$\theta_1^* = \text{asin}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

"angle de Brewster"

Ondes dans conducteurs (conductivité σ)



$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} \propto e^{-z/\delta}$$

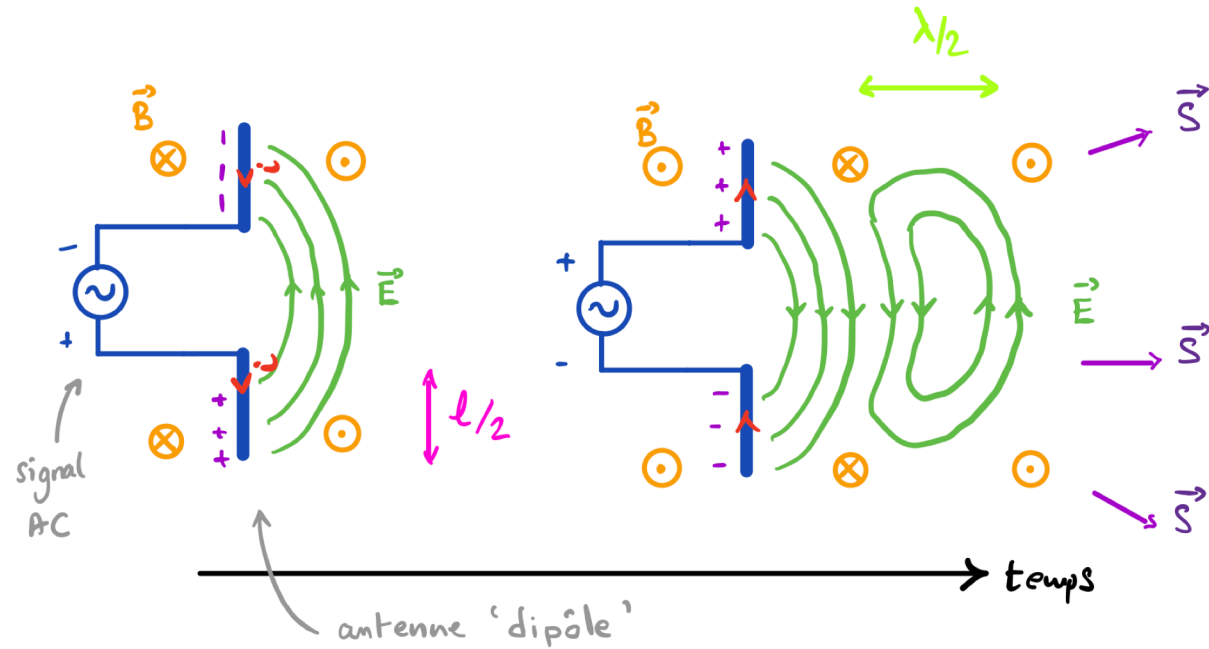
$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$$

Cas limite : $\sigma \rightarrow \infty$ (conducteur parfait)

$$\Rightarrow \delta = 0$$

$\Rightarrow$ pas de propagation !

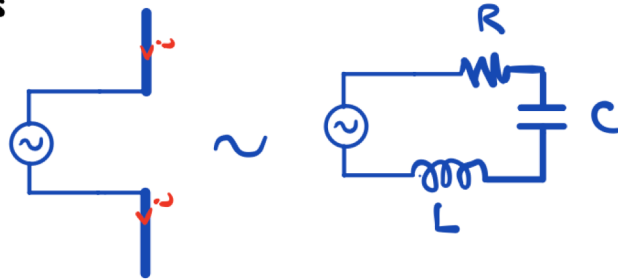
Génération d'ondes par une antenne



λ_{onde} dictée par $f_{\text{onde}} = f_{\text{oscillations antenne}}$

résonance $\Rightarrow \omega_0 \sim \frac{1}{\sqrt{LC}}$

et $\begin{cases} L_{\text{antenne}} \sim l \\ C_{\text{antenne}} \sim l \end{cases} \Rightarrow \lambda \sim \frac{1}{\omega_0} \sim l$



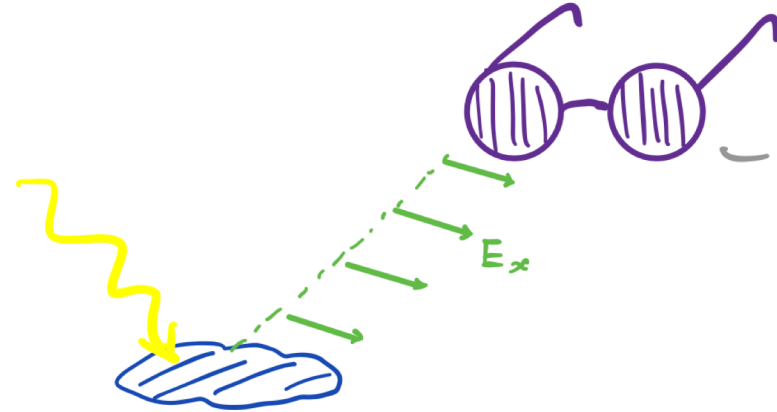
Donc: taille optimale l d'une antenne est comparable à la longueur d'onde λ de l'onde émise (ou reçue)

Polarisation des ondes

Polarisation $\equiv$ direction du champ électrique de l'onde



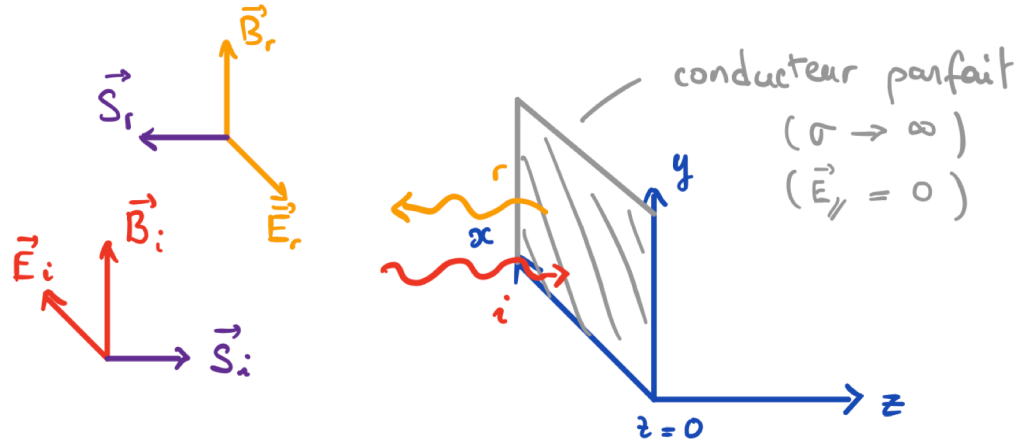
onde émise par une antenne est polarisée



onde devient polarisée après réflexion par une surface, avec $\vec{E}$ parallèle au plan de réflexion

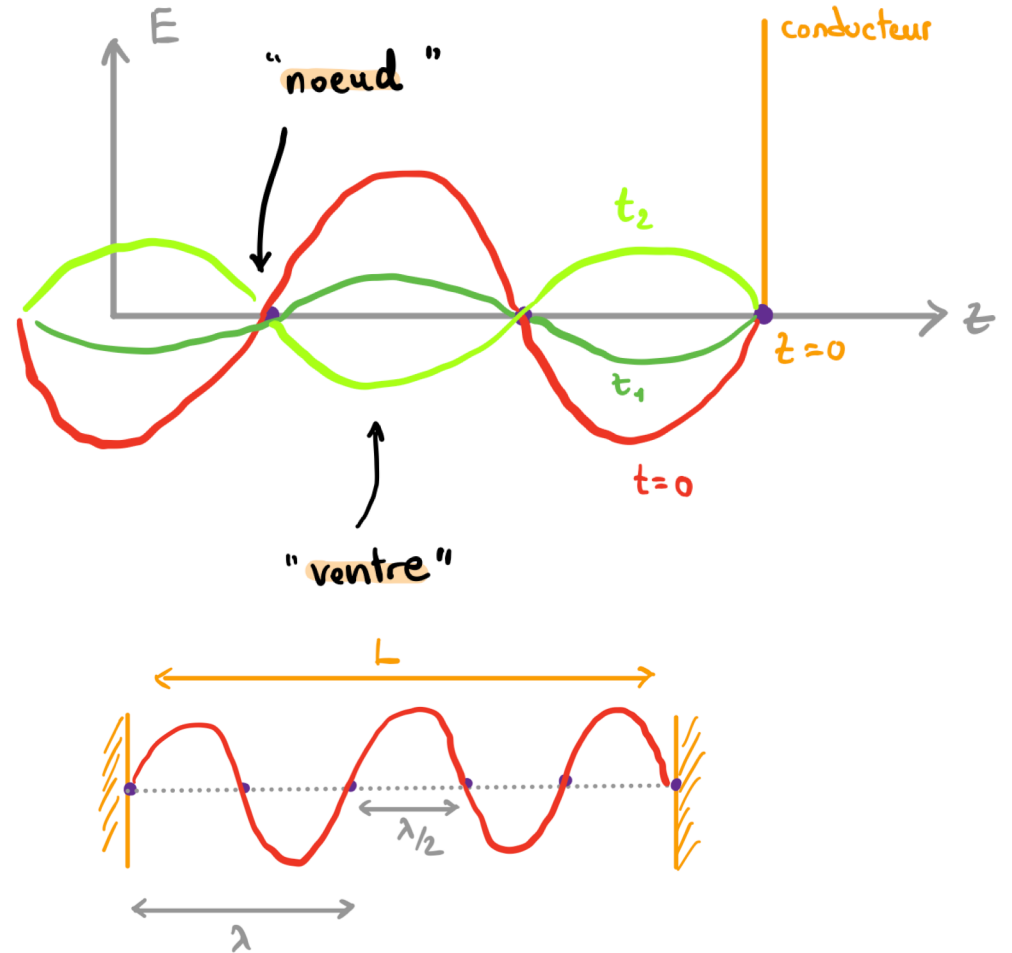
lunettes de soleil polarisées $\Rightarrow$ laissent passer $\uparrow E_t$ seulement

Ondes stationnaires



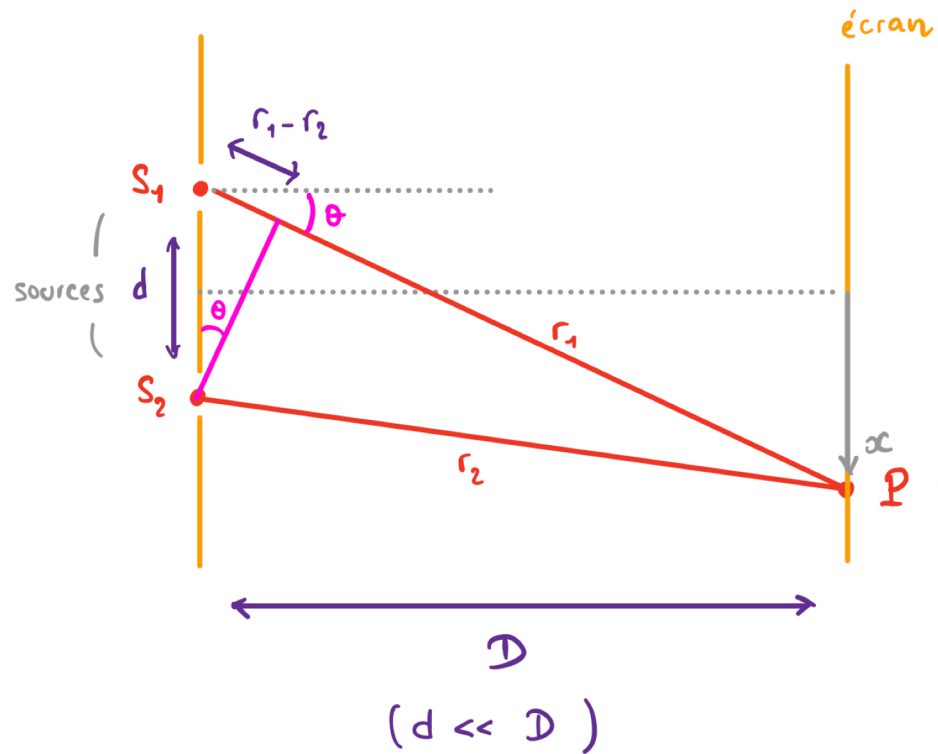
$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_i + \vec{E}_r = \frac{E_0}{2} [\cos(kz - \omega t) - \cos(kz + \omega t)] \hat{x} \\ &= E_0 \cdot \underbrace{\sin(kz)}_{\text{espace}} \underbrace{\sin(\omega t)}_{\text{temps}} \hat{x}\end{aligned}$$

$$\vec{B} = \dots = \frac{E_0}{c} \cos(kz) \cos(\omega t) \hat{y}$$

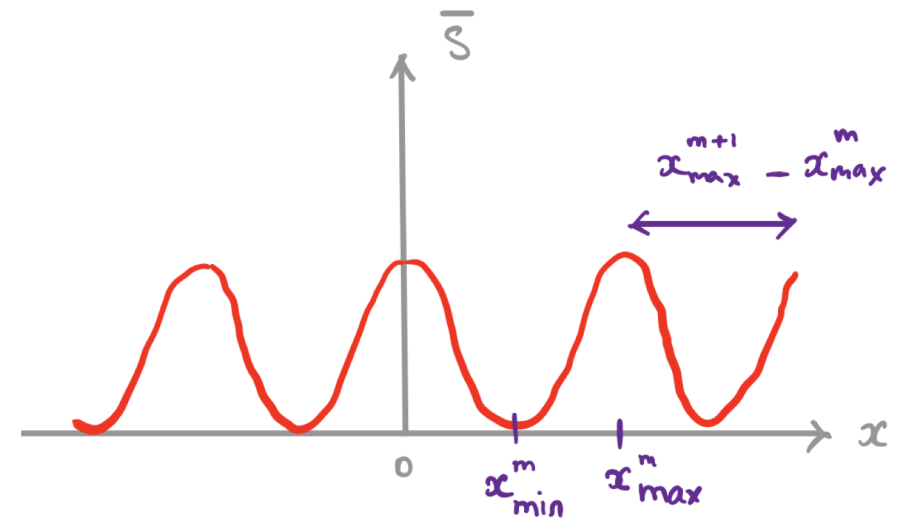


Il faut que $L = m \frac{\lambda}{2}$, $m = 1, 2, 3, \dots$

Interférences: 2 sources ponctuelles



$$\bar{S} \propto \cos^2 \left(\frac{k d}{2 \mathcal{D}} x \right) = \cos^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda \mathcal{D}} x \right)$$



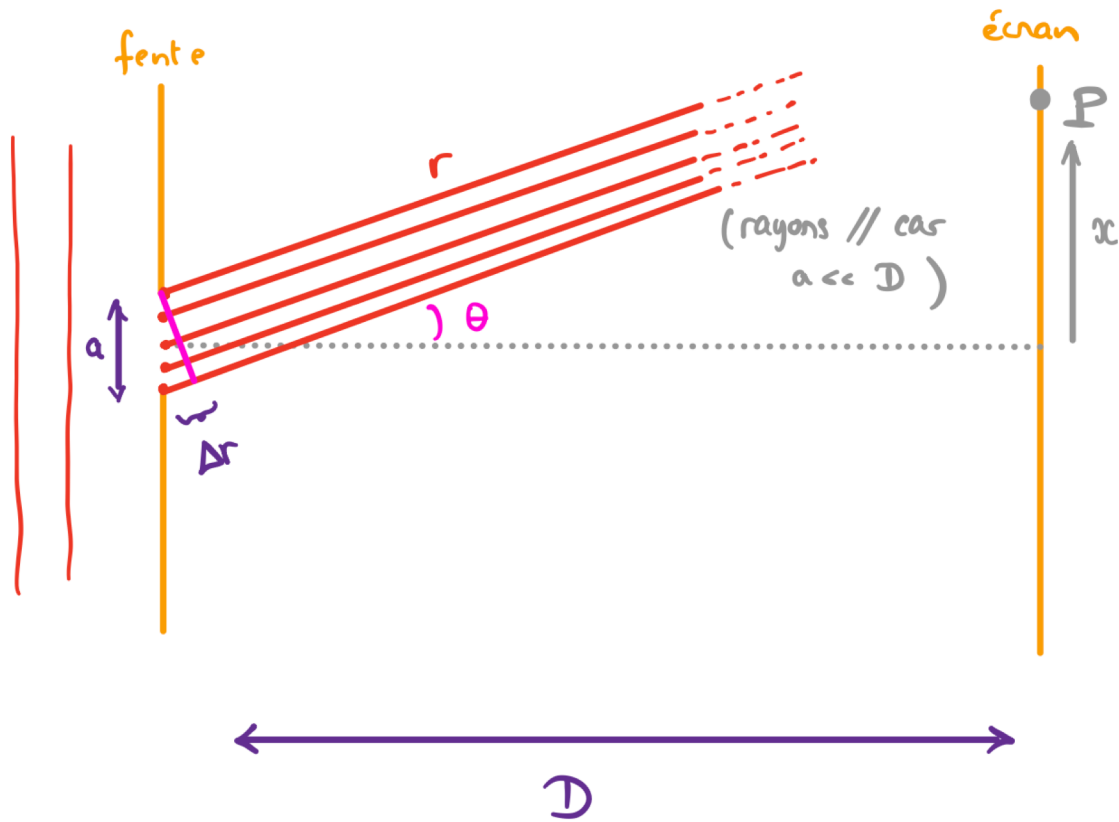
$$x_{\max}^m = m \frac{\lambda \mathcal{D}}{d}$$

"interférences
constructives"

$$x_{\min}^m = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda \mathcal{D}}{d}$$

"interférences
destructives"

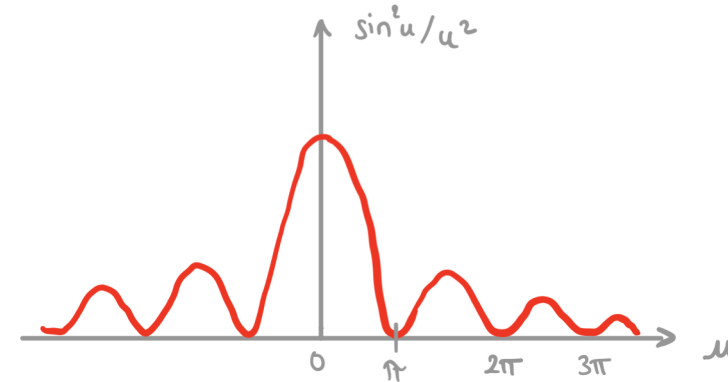
Interférences: diffraction par une fente



$$\overline{S} \propto \langle E^2 \rangle$$

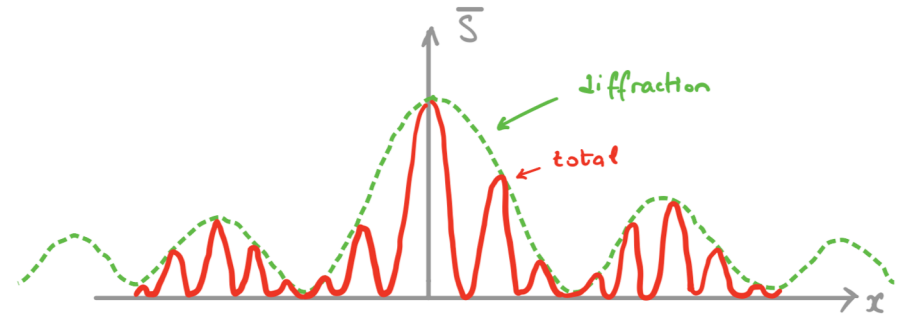
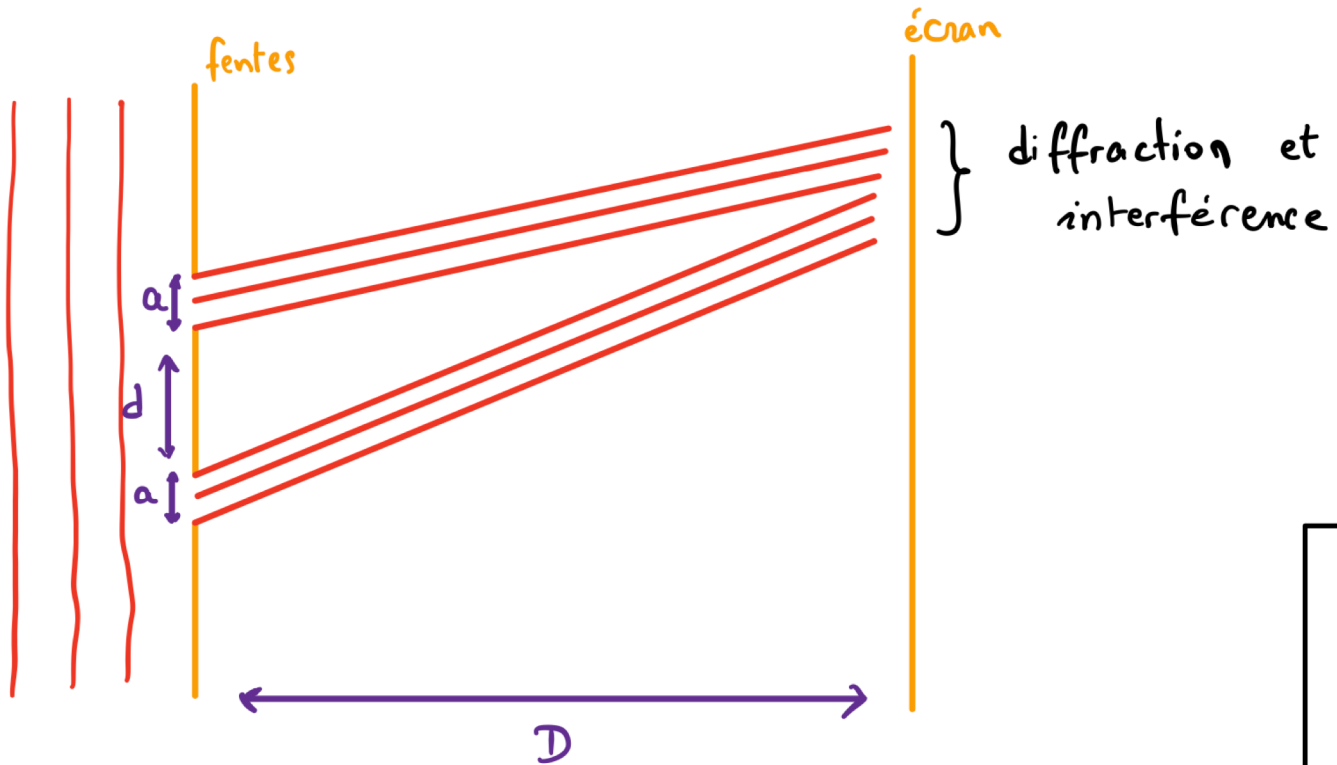
$$\propto E_0^2 \frac{a^2}{2} \frac{\sin^2(k a/2 \sin \theta)}{(k a/2 \sin \theta)^2}$$

$$\propto \frac{\sin^2(u)}{u^2} \quad u = k \frac{a}{2} \sin \theta$$



$$x_{min}^m = m D \frac{\lambda}{a}$$

Interférences: diffraction et interference par deux fentes

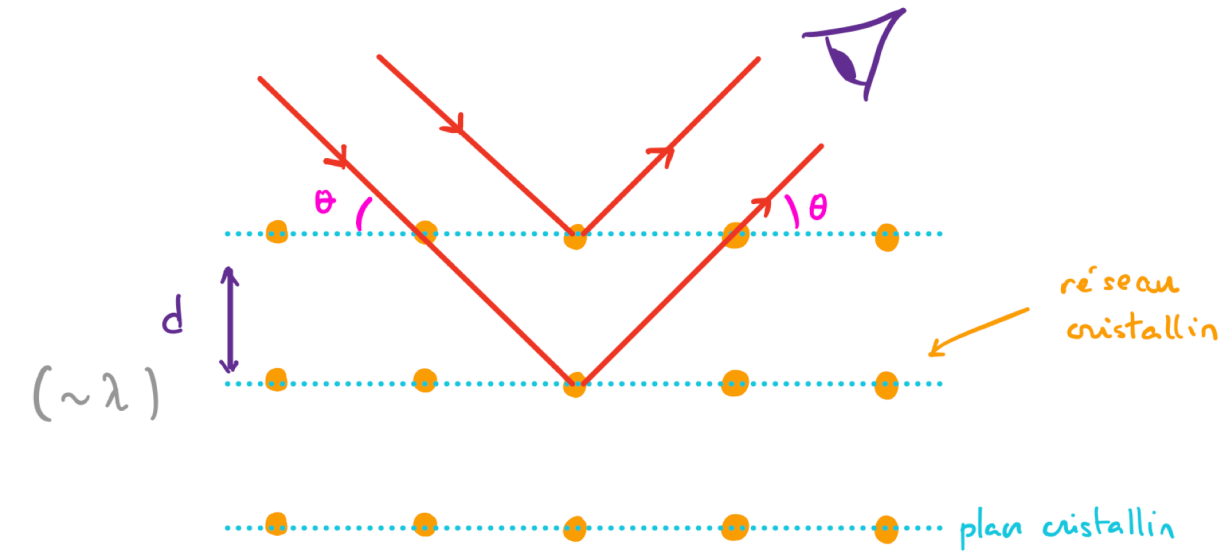


$$\bar{S} \propto \frac{\sin^2\left(\frac{ka}{2}\sin\theta\right)}{\left(\frac{ka}{2}\sin\theta\right)^2} \times \cos^2\left(\frac{kd}{2}\sin\theta\right)$$

diffraction
d'une fente

interférence
entre 2 fentes

Diffraction de Bragg



condition pour interférence constructive :

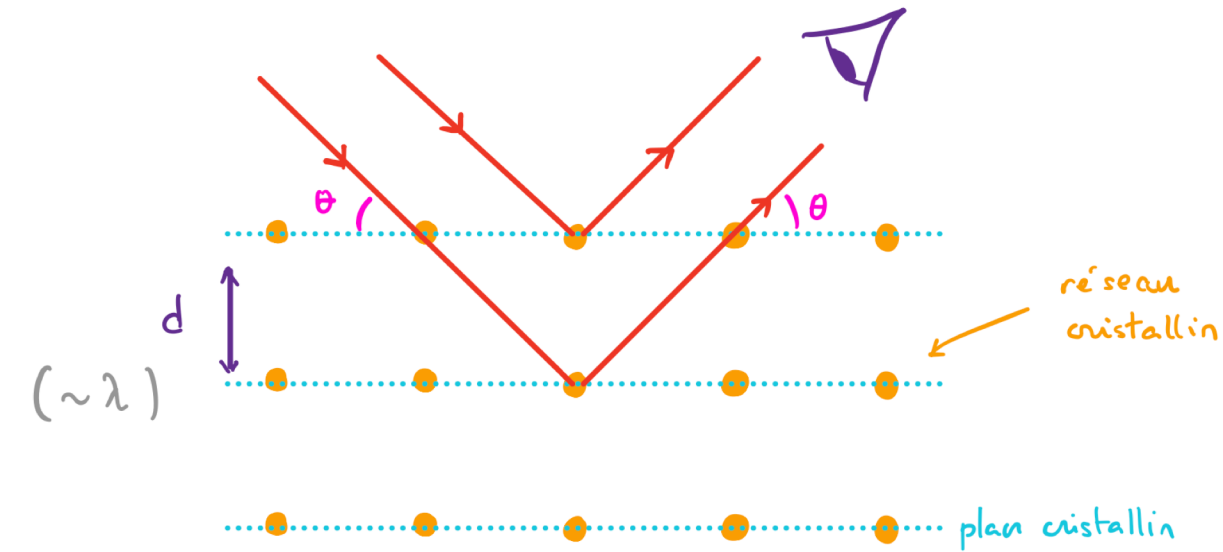
$$\text{déphasage} = k 2d \sin \theta = m 2\pi \quad m = 1, 2, \dots$$

$\Leftrightarrow$

$$2d \sin \theta = m \lambda$$

ex : on connaît λ , mesure $\theta \Rightarrow d_{\text{cristal}}$

Diffraction de Bragg



condition pour interférence constructive :

$$\text{déphasage} = k 2d \sin \theta = m 2\pi \quad m = 1, 2, \dots$$

$\Leftrightarrow$

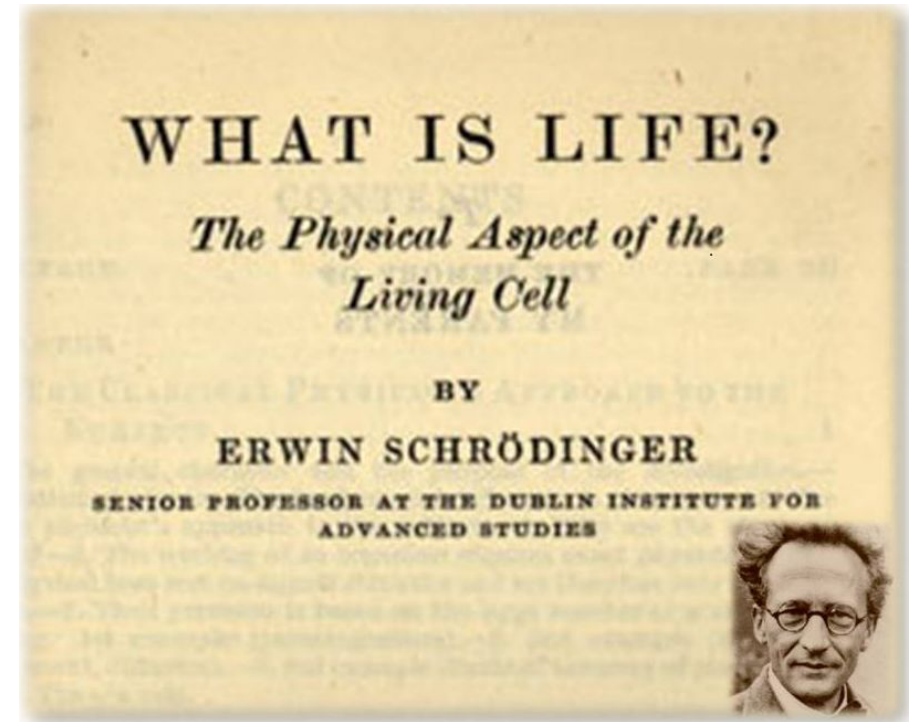
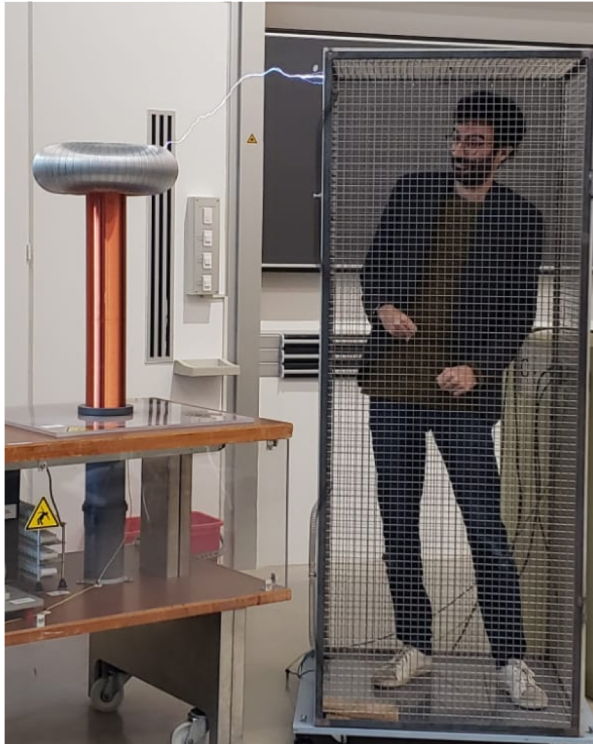
$$2d \sin \theta = m \lambda$$

ex : on connaît λ , mesure $\theta \Rightarrow d_{\text{cristal}}$

Merci et belle fin d'année 2024!



Ce fut un plaisir de vous enseigner...



ma petite recommandation de lecture pour vos vacances...