

1. Fluides

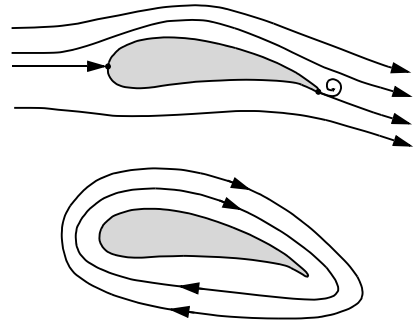
Q1 (0.5 pt) : Pour trouver une intégrale première de cette équation nous multiplions par $d\mathbf{r}$:

$$\underbrace{\rho \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r}}_{\rho g dz} - d\left(p + \frac{\rho v^2}{2}\right) = -2 \rho (\mathbf{v} \times \mathbf{T}) \cdot d\mathbf{r}$$

Lorsque $d\mathbf{r}$ est pris le long d'une ligne de courant = trajectoire, on a $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$, et donc $(\mathbf{v} \times \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} dt = 0$. On obtient la loi de Bernoulli, valable le long d'une ligne de courant par construction :

$$p + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g z = \text{cte},$$

Q2 (0.5 pt) : La loi de Kutta-Joukowski $F_p = I \rho L v$ exprime la force de portance F_p résultant d'une circulation I autour d'un profil de longueur L qui se déplace avec une vitesse v dans un milieu visqueux. A partir de la vitesse de décollage, un tourbillon sustentateur se forme autour d'une aile (paramètres : géométrie, angle d'attaque, etc), résultant en une force de portance dirigée vers le haut. Au cours nous avons vu de photos mettant en évidence ce tourbillon lorsqu'il quitte les extrémités des ailes. Dessin avec profil entouré d'une circulation d'air dans le sens à donner une force de portance.



Problème (4 pts) :

(a) Par symétrie : $v_r = 0$, $v_\phi = 0$, seule la composante v_z est non-nulle. Par invariance selon z et par symétrie par rapport à ϕ , on peut affirmer que $v_z = v_z(r)$. Donc $\mathbf{v} = v_z(r) \mathbf{e}_z$.

Eq. Navier-Stokes sans introduire le vecteur tourbillon

$$\rho \mathbf{g} - \mathbf{grad} p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\eta + \eta^*) \mathbf{grad} \text{div} \mathbf{v} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} \quad (1)$$

Grâce aux hypothèses sur $\mathbf{g}$ + pas de gradient de pression + éq de continuité et incompressibilité ($\rightarrow \text{div} \mathbf{v} = 0$) + régime permanent on trouve

selon r : $0 = 0$

selon ϕ : $0 = 0$

selon z : $\eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = 0$

Navier-Stokes avec vecteur tourbillon :

$$\rho \mathbf{g} - \mathbf{grad} p - \rho \mathbf{grad} \frac{v^2}{2} + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\eta + \eta^*) \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - 2\rho \mathbf{v} \times \mathbf{T} \quad (2)$$

$$\mathbf{grad} v^2 = \left(\frac{\partial v_z^2}{\partial r}, 0, 0 \right)$$

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \mathbf{rot} \mathbf{v} = \frac{1}{2} (0, -\frac{\partial v_z}{\partial r}, 0)$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{T} = \frac{1}{2} (v \frac{\partial v_z}{\partial r}, 0, 0)$$

dans la composante selon r on aurait à gauche $-\rho \frac{1}{2} \frac{\partial v_z^2}{\partial r} = -\rho v_z \frac{\partial v}{\partial r}$ et à droite : $-2\rho \frac{1}{2} v \frac{\partial v}{\partial r}$, ce qui donne $0 = 0$.

Les composantes selon ϕ et selon z de ces deux termes sont nulles, donc pas de changement par rapport aux équations écrites avant.

En considérant l'équation selon z :

$$r \frac{dv_z}{dr} = \text{const} = A \implies dv_z = A \frac{dr}{r} \quad (3)$$

$$v_z(r) = A \ln \frac{r}{r_0} + B \quad (4)$$

Conditions bords pour déterminer les constantes : $v_z(r = R_1) = u$; $v_z(r = R_2) = 0$

$$A \ln \frac{R_2}{r_0} + B = 0 \implies B = -A \ln \frac{R_2}{r_0} \quad (5)$$

$$A \ln \frac{R_1}{r_0} - A \ln \frac{R_2}{r_0} = u \implies A = \frac{u}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \quad (6)$$

Pour la vitesse on trouve alors :

$$v_z(r) = \frac{u}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \ln \frac{r}{r_0} - \frac{u}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \ln \frac{R_2}{r_0} = u \frac{\ln \frac{r}{R_2}}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \quad (7)$$

(b) vecteur tourbillon

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \mathbf{rot} \mathbf{v} = \frac{1}{2} (0, -\frac{\partial v_z}{\partial r}, 0) = \frac{u}{2r} \frac{1}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \mathbf{e}_\phi \quad (8)$$

(c) force frottement

La contrainte de cisaillement résulte en une force dans le sens de l'écoulement. Un élément de surface de la paroi du tube a une aire $dS = R_2 d\phi dz$ sur laquelle s'applique une force $\tau = \eta \frac{dv_z}{dr}$.

$$\frac{dv_z}{dr} = u \frac{1}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \frac{1/R_2}{r/R_2} = \frac{u}{r} \frac{1}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \quad (9)$$

évaluée en $r = R_2$, pour τ on trouve

$$\tau = u\eta \frac{1}{R_2} \frac{1}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \quad (10)$$

La force de frottement par unité de longueur :

$$\frac{dF}{dz} = \tau \int_0^{2\pi} R_2 d\phi = u\eta \frac{1}{R_2} \frac{1}{\ln \frac{R_1}{R_2}} 2\pi R_2 = u \frac{2\pi\eta}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \quad (11)$$

2. Relativité restreinte

Q1 (0.5 pt) : De $t'_{\parallel} = t'_{\perp}$:

$$\frac{2\ell/c}{1 - v^2/c^2} = \frac{2\ell'/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \rightarrow \ell = \sqrt{1 - v^2/c^2} \ell' \quad (12)$$

Einstein a expliqué l'absence d'un changement du motif d'interférence dans l'expérience de Michelson et Morley en postulant que la vitesse de la lumière est identique dans tous les référentiels d'inertie.

Les expressions de la contraction de longueur de Lorentz & Fitzgerald et de la contraction de longueur résultant du postulat d'Einstein sont les mêmes. Dans le premier cas, il s'agit d'une contraction réelle, et dans le deuxième, la contraction est la conséquence de la transformation des coordonnées espace et temps.

Q2 (0.5 pt) : Considérons deux évènements A' et B' qui ont lieu au même endroit x' dans R'_i à deux temps différents $t'_{B'} - t'_{A'} = \Delta t'$. Pour exprimer l'intervalle de temps Δt entre ces deux évènements dans R_i en fonction de $\Delta t'$, en tenant compte de la condition $\Delta x' = 0$, il faut utiliser l'équation de transformation :

$$ct = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(ct' + x' \frac{v}{c} \right)$$

Il vient :

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} .$$

Problème (2 pts) :

A partir de l'expression de la quantité de mouvement relativiste pour le carburant, on trouve, avec $u_{carb} = -c/2$:

$$p_{carb} = \frac{m_0 u_{carb}}{\sqrt{1 - u_{carb}^2/c^2}} = \frac{-m_0 c}{2\sqrt{3}/4} = \frac{-m_0 c}{\sqrt{3}} \quad (13)$$

La conservation de la quantité de mouvement exige que $p_{vais} + p_{carb} = 0$, puisque on est dans le référentiel dans lequel le vaisseau est au repos avant d'éjecter le carburant. On tient compte de l'hypothèse que $M_0 \gg m_0$:

$$p_{vais} = -p_{carb} \rightarrow \frac{M_0 u_{vais}}{\sqrt{1 - u_{vais}^2/c^2}} = \frac{m_0 c}{\sqrt{3}} \rightarrow \frac{u_{vais}^2}{1 - u_{vais}^2/c^2} = \left(\frac{m_0 c}{M_0 \sqrt{3}} \right)^2 \quad (14)$$

Ainsi, la vitesse du vaisseau spatial est

$$u_{vais} = \frac{\frac{m_0 c}{M_0 \sqrt{3}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_0}{M_0 \sqrt{3}} \right)^2}} \quad (15)$$

Éventuellement approximation supplémentaire.

3. Electrostatique

Q1 (0.5 pt) : L'orientation de dipôles permanents dépend de la température, en $1/T$. La raison est la compétition de l'énergie potentielle $E_{\text{pot}} = -\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\mu}$ du dipôle dans un champ homogène $\mathbf{E}$ avec l'énergie thermique. La loi de Boltzmann donne l'occupation des états en fonction de E_{pot} et la moyenne sur tous les états donne une polarisation électrique P en $1/T$.

Problème (2.5 pts) :

Pour déterminer le champ électrique en tout point, nous pouvons utiliser la loi de Gauss :

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(r, \phi, z) dV \quad (16)$$

On utilise une surface de Gauss cylindrique de rayon r et longueur l , coaxiale par rapport à la distribution de charge :

$$E 2\pi l r = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \int_V \left(a - \frac{r}{b}\right) dV \quad (17)$$

L'élément de volume pour l'intégration est un "tube" de rayon r , longueur l , et épaisseur dr tel que $dV = 2\pi l r dr$.

Pour $r \leq R$ on obtient :

$$E = \frac{1}{2\pi l r} \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \int_0^r \left(a - \frac{r}{b}\right) 2\pi l r dr = \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0} \left(a - \frac{2r}{3b}\right) \quad (18)$$

Pour $r > R$ la loi de Gauss s'écrit :

$$E 2\pi r l = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \int_0^R \left(a - \frac{r}{b}\right) 2\pi r l dr \quad (19)$$

Donc on obtient

$$E = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0 r} \left(a - \frac{2R}{3b}\right) \quad (20)$$

4. Electrodynamique

Q1 (0.5 pt) : Une réponse au choix :

1. équation de continuité

La loi d'Ampère $\mathbf{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ est incomplète car $\text{div} \mathbf{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \text{div} \mathbf{j} = -\mu_0 \partial \rho / \partial t \neq 0$ dans le cas non-stationnaire. Rajouter à la loi d'Ampère l'expression $\partial \mathbf{D} / \partial t$ résout le problème et donne $\text{div} \mathbf{rot} \mathbf{B} = 0$.

2. condensateur, loi d'Ampère

condensateur plan, I variable, deux surfaces S_1 et S_2 délimitées par le même contour (dessin). La loi d'Ampère donne deux résultats différents pour ces deux surfaces. Si $I \neq 0$, la densité de charges sur les plaques change et par conséquent $\mathbf{E}$ change entre les plaques. Avec $\varepsilon_0 E = D = Q/S = \rho_{2D}$, on peut introduire un terme $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ qui représente une densité de courant dans le condensateur : $I = \frac{d}{dt} \int \rho_{2D} dS = \int \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$

3. le courant de déplacement dans un condensateur crée un champ magnétique

Similaire au cas 2 ; non seulement $\mathbf{j}$ mais aussi la densité de courant de déplacement $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ génère un champ d'induction magnétique

4. distribution radiale de courant

est-ce que un champ magnétique est généré ? Ce n'est pas possible parce que on aurait une source ponctuelle de champ magnétique. Explication :

Densité de courant $\mathbf{j}$ sur une sphère de rayon r : $j = -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial Q}{\partial t}$

On considère $\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, dans ce cas le deuxième terme compense le terme $\mathbf{j}$:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial Q}{\partial t}$$

$\Rightarrow \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{0}$. Il n'y a pas de champ $\mathbf{H}$ créé dans ce condensateur sphérique.

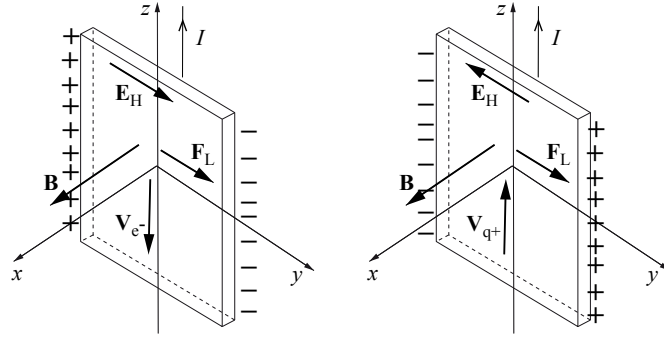
Q2 (0.5 pt) : Jauge de Coulomb : $\text{div} \mathbf{A} = 0$, ce qui implique : $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$.

Pour chaque composante de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{j}$, ceci est identique à l'équation de Poisson en électrostatique :

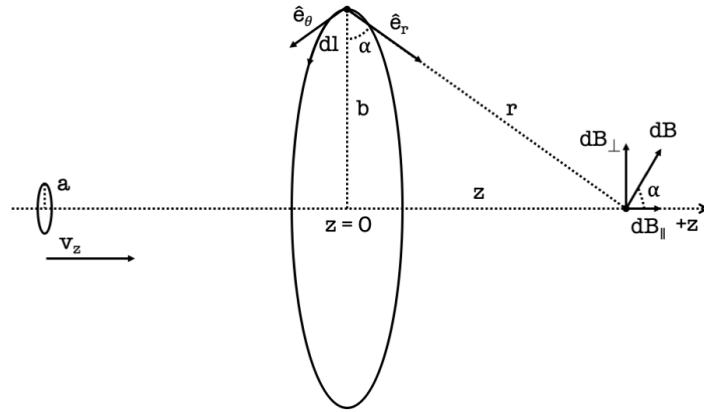
$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Q3 (0.5 pt) : Le courant technique est dirigé selon z positif et le champ d'induction magnétique $\mathbf{B}$ selon x positif. Dans le dessin à gauche, les électrons sont les porteurs de charge mobiles. Ils se déplacent en direction opposée à z et la force de Lorentz les dévie selon y positif jusqu'à ce que un champ Hall E_H se crée, dirigé selon y . Le dessin à droite montre des porteurs de charge mobiles positifs. Leur vitesse est dirigée selon z et la force de Lorentz selon y . Cette fois la force s'exerce sur les porteurs de charge positifs, donc E_H est opposé à y .

Le sens de E_H indique si les porteurs de charge sont positifs ou négatifs.



Problème (3 pts) :



(a) Pour calculer le champ $\mathbf{B}$ généré par la grande spire, on utilise la loi de Biot-Savart. La contribution $d\mathbf{B}$ de chaque élément de longueur dl est

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\hat{\mathbf{e}}_\theta \times \hat{\mathbf{e}}_r}{r^2} dl \quad (21)$$

En intégrant sur la spire, les composante $B_\perp$ se compensent et il reste seulement la composante $B_\parallel$. Le champ B sur l'axe est donnée par :

$$B(r) = \oint dB \cos \alpha = \frac{\mu_0 I b}{4\pi r^3} \oint dl = \frac{\mu_0 I b^2}{2r^3} \implies B(z) = \frac{\mu_0 I b^2}{2(b^2 + z^2)^{3/2}} \quad (22)$$

(b) Puisque $b \gg a$, le flux de B est donnée par :

$$\Phi(z) \approx B(z) S_a = \frac{\mu_0 I b^2}{2(b^2 + z^2)^{3/2}} \pi a^2 \quad (23)$$

(c) Pour trouver la force électromotrice en fonction de z :

$$\varepsilon(z) = -\frac{d\Phi(z)}{dt} = -\frac{d\Phi(z)}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{3\mu_0 I b^2 \pi a^2 z}{2(b^2 + z^2)^{5/2}} v_z \quad (24)$$

Donc, $\varepsilon(z)$ est négative pour $z < 0$ et positive pour $z > 0$. Le sens du courant induit, en regardant dans la direction des z positifs, est anti-horaire pour $z < 0$ et horaire pour $z > 0$. Ceci correspond au fait que le flux de B augmente (diminue) lorsque la petite spire s'approche (s'éloigne), donc le courant induit génère un champ B qui s'oppose à cette augmentation (diminution) (loi de Lenz).