1. Fluides

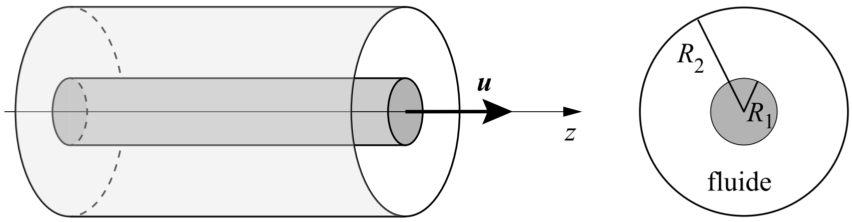
Q1 (0.5 pt) : Pour l'écoulement permanent d'un fluide parfait et incompressible, l'équation de Navier-Stokes devient :

$$\rho \mathbf{g} - \mathbf{grad}\left(p + \frac{\rho v^2}{2}\right) = -2\,\rho\,\mathbf{v} \times \mathbf{T}$$

Déduire la loi de Bernoulli et expliquer en une phrase pourquoi elle est uniquement valable le long d'une ligne de courant.

Q2 (0.5 pt) : La portance d'un avion a deux origines, i) la différence de vitesse de l'air qui passe par dessus et par dessous l'aile, ii) le tourbillon sustantateur. Expliquer l'effet du tourbillon sustantateur à l'aide d'un dessin et d'une phrase.

Problème (4.0 pts) :
Un cylindre horizontal de rayon R_1 se déplace parallèlement à son axe avec une vitesse u à l'intérieur d'un tube de rayon R_2 coaxial au cylindre. Un fluide visqueux et incompressible occupe l'espace entre le cylindre et le tube ($R_1 \leq r \leq R_2$).
Hypothèses : le cylindre et le tube sont infiniment longs ; le régime stationnaire est établi ; négliger la gravitation.



(a) Déterminer l'expression de la vitesse du fluide pour $R_1 \leq r \leq R_2$.
(b) Déterminer le vecteur tourbillon.
(c) Déterminer la force de frottement par unité de longueur exercée par le fluide sur la paroi du tube.

On donne les opérateurs suivants en coordonnées cylindriques dans la base $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z)$ pour un champ scalaire U et un champ vectoriel $\mathbf{A}$:

$$\nabla U(r,\phi,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \phi} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \qquad \nabla^2 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \nabla^2 A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \\ \nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} \\ \nabla^2 A_z \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_r\dfrac{\partial A_r}{\partial r} + \dfrac{A_\phi}{r}\dfrac{\partial A_r}{\partial \phi} - \dfrac{A_\phi^2}{r} + A_z\dfrac{\partial A_r}{\partial z} \\ A_r\dfrac{\partial A_\phi}{\partial r} + \dfrac{A_\phi}{r}\dfrac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \dfrac{A_\phi A_r}{r} + A_z\dfrac{\partial A_\phi}{\partial z} \\ A_r\dfrac{\partial A_z}{\partial r} + \dfrac{A_\phi}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial \phi} + A_z\dfrac{\partial A_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial \phi} - \dfrac{\partial A_\phi}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_r}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (rA_\phi)}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_r}{\partial \phi} \end{bmatrix}$$

2. Relativité restreinte

Q1 (0.5 pt) : Toutes les expériences conçues pour démontrer l'existence de l'éther ont échoué. L'une d'elle est l'expérience de Michelson & Morley. Lorentz & Fitzgerald ont expliqué les observations de cette expérience en postulant une contraction réelle de toute longueur parallèle à la direction de propagation dans l'éther. Donner l'expression de cette contraction. Comment Einstein a expliqué le résultat de l'expérience de Michelson & Morley ? Quelle est la différence entre la contraction de longueur résultant de la relativité restreinte et celle postulée par Fitzgerald ? Répondre par une phrase à chaque question.

Q2 (0.5 pt) : Déduire l'expression pour la dilatation de la durée en considérant deux événements qui ont lieu au même endroit x'_0 dans le référentiel d'inertie R'_i, en mouvement avec une vitesse v par rapport au référentiel R_i du laboratoire.

Problème (2.0 pts) :
Un vaisseau spatial de masse au repos M_0 se déplace à vitesse constante dans l'espace lorsqu'il devient soudainement nécessaire d'accélérer. Pour ce faire, le vaisseau éjecte instantanément une masse de carburant m_0 (masse au repos) à une vitesse de $c/2$ par rapport au vaisseau.

Calculer la vitesse du vaisseau dans le référentiel d'inertie dans lequel il était initialement au repos, en considérant que $M_0 \gg m_0$.

3. Electrostatique

Q1 (0.5 pt) : La polarisation électrique de la matière a deux origines microscopiques, i) la création de dipôles électriques et ii) l'orientation de dipôles permanents. Laquelle des deux dépend de la température et de quelle façon ?

Problème (2.5 pts) :
Considérer une distribution de charges de symétrie cylindrique et de longueur infinie telle que :

$$\rho(r,\phi,z) = \begin{cases} \rho_0 \left(a - \dfrac{r}{b}\right) & \text{pour} \quad r \leq R \\ 0 & \text{pour} \quad r > R \end{cases}$$

où ρ_0, a, et b sont des constantes positives telles que ρ est toujours positive, et r est la distance par rapport à l'axe du cylindre.

Déterminer l'expression du champ électrique en tout point.

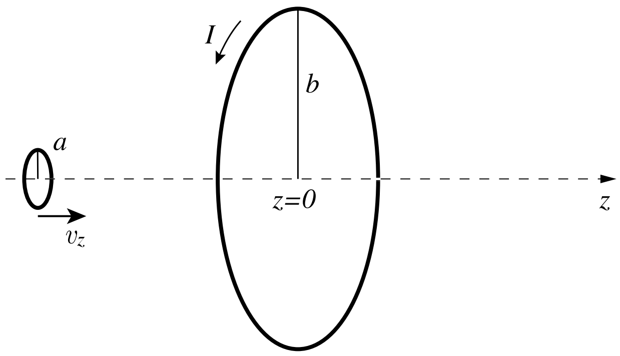
4. Electrodynamique

Q1 (0.5 pt) : Au cours nous avons vu quatre motivations pour introduire le courant de déplacement de Maxwell. Donner une d'entre elles et trouver l'expression pour ce courant.

Q2 (0.5 pt) : Quelle est l'expression de la jauge de Coulomb et quel est son avantage ?

Q3 (0.5 pt) : A l'aide de dessins, expliquer l'effet Hall dans le cas de porteurs de charge négatifs et dans les cas de porteurs de charge positifs. Le champ de Hall change-t-il de signe ?

Problème (3.0 pts) :
Considérer deux spires circulaires coaxiales contenues dans deux plans parallèles, perpendiculaires à z (voir figure). La plus grande spire, de rayon b, est placée en $z = 0$ et est parcourue en sens horaire (en regardant vers les z positifs) par un courant stationnaire I. La plus petite spire, de rayon a, se déplace dans la direction des z positifs à vitesse constante v_z.



(a) Déterminer le champ d'induction magnétique $\mathbf{B}(z)$ généré sur l'axe z par la grande spire.

(b) Déterminer le flux d'induction magnétique à travers la petite spire. *Indication* : puisque $b \gg a$, on peut supposer que pour un z donné le champ généré par la grande spire est constant sur la surface de la petite spire.

(c) Déterminer la force électromotrice $\varepsilon(z)$ générée dans la petite spire. Dans quel sens circule le courant induit dans la petite spire ? Justifier la réponse.