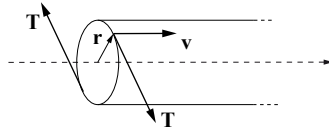


1. Fluides (4 pts)

Q1 (0.5 pt) :

Écoulement décrit en coordonnées cylindriques, vitesses selon z , vecteur tourbillon selon $\mathbf{e}_\phi$;



L'existence d'un vecteur tourbillon non-nul peut être mise en évidence en imaginant de déposer un marqueur dans l'écoulement : ce marqueur va tourner sur lui même.

On peut aussi imaginer que chaque volume infinitésimal du fluide est en rotation sur lui même.

Q2 (0.5 pt) :

A est un point d'arrêt, $v_A = 0$. Pour trouver la vitesse d'écoulement v au point X on applique l'équation de Bernoulli :

$$p_A + \rho g z_A = p_X + \rho \frac{v_X^2}{2} + \rho g z_X$$

En remarquant que la différence de hauteur des points A et X est négligeable et que donc les deux termes $\rho g z$ sont presque pareils :

$$p_A - p_X \approx \rho \frac{v_X^2}{2} \quad ; \quad v_X = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_A - p_X)}$$

Problème (3 pts) :

a) Par symétrie et équation de continuité la vitesse a la forme $(0, 0, v_z(r))$ et la pression $p(r, z)$.

En utilisant a), on trouve que $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = 0$. L'équation NS donne :

$$-\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} = 0$$

Selon $\mathbf{e}_r$: $-1/r \partial_r p = 0$

Selon $\mathbf{e}_\phi$: $0 = 0$

Selon $\mathbf{e}_z$: $-\partial_z p + \frac{\eta}{r} \partial_r (r \partial_r v_z) = 0$

La pression ne varie donc pas selon r . Chaque terme de l'équation selon $\mathbf{e}_z$ dépend d'une autre variable, on peut donc séparer :

$$\partial_z p(z) = A = \frac{\eta}{r} \partial_r (r \partial_r v_z)$$

On déduit l'expression pour la pression :

$p(z) = -\frac{\Delta p}{L}z + p_0$ (différence de signe suivant déf. Δp). Donc $A = -\frac{\Delta p}{L}$. L'autre équation donne :

$$r\partial_r v_z(r) = -\frac{\Delta p r^2}{2\eta L} + B \implies v_z(r) = B \ln(r) - \frac{\Delta p r^2}{4\eta L} + C$$

On acceptera l'expression $\ln(r)$ pour faciliter (il faudrait prendre une longueur de référence et écrire $\ln(r/r_0)$).

On utilise les condition $v(R_1) = v(R_2) = 0$:

$$B \ln R_1 - \frac{\Delta p R_1^2}{4\eta L} + C = 0 \text{ et } B \ln R_2 - \frac{\Delta p R_2^2}{4\eta L} + C = 0$$

On prend la différence des deux équations :

$$B \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{\Delta p}{4\eta L} (R_1^2 - R_2^2) = 0 \implies B = \frac{\Delta p}{4\eta L} \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

on injecte ensuite dans une des deux équations :

$$C = \frac{\Delta p}{4\eta L} \left(\frac{(R_1^2 - R_2^2) \ln R_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} - R_1^2 \right) = \frac{\Delta p}{4\eta L} \frac{R_2^2 \ln R_1 - R_1^2 \ln R_2}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

b) Avec ce profil de vitesse la contrainte tangentielle est :

$$\tau = \eta \partial_r v_z(r) = \eta \frac{B}{r} - \frac{\Delta p}{2L} R_1 \text{ et donc la force vaut } 2\pi R_1 L \left(\eta \frac{B}{R_1} + \frac{\Delta p}{2L} R_1 \right) \mathbf{e}_z$$

2. Relativité restreinte (3 pts)

Q1 (0.5 pt) :

L'intervalle conservé est : $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$

Postulats de Einstein :

Dans tout référentiel galiléen, la vitesse de la lumière est indépendante de la direction (isotropie).
La vitesse de la lumière a la même valeur dans tous les référentiels galiléens (invariance).

Q2 (0.5 pt) :

$$E_{\text{cin}} = (m - m_0)c^2$$

On développe la masse en série de puissance :

$$m = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx m_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots\right)$$

puisque $v/c \ll 1$. En remplaçant dans l'expression de E_{cin} :

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}m_0v^2 + \frac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^2} + \dots = \frac{1}{2}m_0v^2 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{v^2}{c^2} + \dots\right) \approx \frac{1}{2}m_0v^2 \text{ (0.25 pt)}$$

Problème (2 pts) :

Solution 1 :

Soit L la longueur de la barre et soit Δt l'intervalle de temps entre les deux impulsions lumineuses dans le référentiel de l'observateur. Pendant Δt la lumière de la lampe S_1 parcourt la distance $c\Delta t = x_2 - x_1$. En même temps la barre parcourt la distance $v\Delta t = x_2 - x_1 - L$. On obtient :

$$x_2 - x_1 = c\Delta t = L + v\Delta t. \quad (1)$$

D'ici on exprime l'intervalle de temps Δt :

$$\Delta t = \frac{L}{c - v} = \frac{L}{c(1 - \beta)}, \quad (2)$$

où $\beta = \frac{v}{c}$. En combinant ces deux équations, nous obtenons :

$$x_2 - x_1 = c\Delta t = \frac{L}{1 - \beta}. \quad (3)$$

La longueur de la barre dans le référentiel de l'observateur est donnée par $L = L_0\sqrt{1 - \beta^2}$. Finalement, nous avons :

$$x_2 - x_1 = \frac{L_0\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta} = L_0\sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = L_0\sqrt{\frac{c + v}{c - v}} = 2 \text{ m}. \quad (4)$$

Solution 2 :

On considère la notation selon le tableau suivant :

	réf. de l'observateur	réf. de la barre
lampe 1 s'allume	x_1, t_1	x'_1, t'_1
lampe 2 s'allume	x_2, t_2	x'_2, t'_2

Selon la transformation de Lorentz : $x = \gamma(x' + vt')$, où $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Donc

$$x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 - x'_1 + v(t'_2 - t'_1)). \quad (5)$$

En prenant que la longueur de la barre dans son propre référentiel est $x'_2 - x'_1 = L_0$, et que la lumière met le temps $t'_2 - t'_1 = \frac{L_0}{c}$ à parcourir cette distance, on trouve :

$$x_2 - x_1 = \frac{L_0 + \frac{v}{c}L_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = L_0 \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = 2 \text{ m}. \quad (6)$$

3. Electrostatique (3 pts)

Q1 (0.5 pt) :

Pour un dipôle électrique $\boldsymbol{\mu} = q \mathbf{d}$, avec charges $+q$ en P_+ et $-q$ en P_- , dans un champ $\mathbf{E}$ uniforme :

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{pot},+} + E_{\text{pot},-} = +q \varphi(P_+) - q \varphi(P_-) = q (\varphi(P_+) - \varphi(P_-))$$

$$\text{Champ électrique uniforme : } \int_{P_-}^{P_+} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{E} \cdot \int_{P_-}^{P_+} d\mathbf{l} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{d}$$

$$\text{En utilisant } \mathbf{E} = -\mathbf{grad} \varphi : \int_{P_-}^{P_+} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{P_-}^{P_+} \mathbf{grad} \varphi \cdot d\mathbf{l} = -(\varphi(P_+) - \varphi(P_-))$$

$$\text{Donc on obtient : } E_{\text{pot}} = q (\varphi(P_+) - \varphi(P_-)) = q (-\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}) = -q \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{E}$$

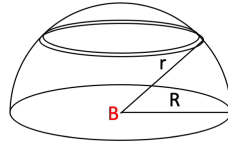
La polarisation électrique résultant de l'orientation de dipôles permanents dans un champ électrique homogène diminue avec la température, à cause de l'agitation thermique. Terme de Boltzmann, $\exp(-E_{\text{pot}}/k_B T)$, décrit la probabilité que le dipôle soit aligné au champ électrique (minimum d'énergie) en fonction de la température.

Q2 (0.5 pt) :

La configuration correspond à la minimisation de l'énergie (ou toute déclaration équivalente).

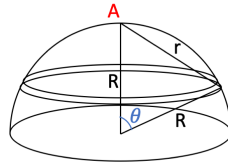
Problème (2 pts) :

En utilisant l'équation de Poisson sous forme intégrale :



Pour B :

$$\varphi_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_{2D}}{r} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_{2D}}{R} \int dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_{2D}}{R} (2\pi R^2) = \frac{\rho_{2D} R}{2\epsilon_0} \quad (7)$$



Pour A :

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_{2D}}{r} dS \quad (8)$$

$$\text{où } dS = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta \quad \text{et } r^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos \theta = 2R^2(1 - \cos \theta)$$

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_{2D} (2\pi R^2)}{R\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{1 - \cos \theta}} = \frac{\rho_{2D} R}{2\sqrt{2}\epsilon_0} (2\sqrt{1 - \cos \theta}) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\rho_{2D} R}{\sqrt{2}\epsilon_0} (1 - 0) = \frac{\rho_{2D} R}{\sqrt{2}\epsilon_0} \quad (9)$$

et la différence :

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{\rho_{2D} R}{2\varepsilon_0}(\sqrt{2} - 1) \quad (10)$$

4. Electrodynamique (4 pts)

Q1 (0.5 pt) :

Réponses acceptées :

Pile/ source de tension dans un circuit, Effet Hall, Courants de Foucault, induction magnétique.

Q2 (0.5 pt) :

1 réponse au choix :

1. Condensateur, loi d'Ampère

un condensateur plan, I variable, deux surfaces S_1 et S_2 délimitées par le même contour. La loi d'Ampère donne deux résultats différents pour ces deux surfaces. De plus, il faut que le courant puisse traverser le condensateur. Si $I \neq 0$, la densité de charges sur les plaques change et par conséquent $\mathbf{E}$ change entre les plaques. Avec $\varepsilon_0 E = D = Q/S = \rho_{2D}$, on peut introduire un terme $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ qui représente une densité de courant dans le condensateur :

$$I = \frac{d}{dt} \int \rho_{2D} dS = \int \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

2. équation de continuité

équation de continuité + extension de la loi de Gauss au cas non-stationnaire $\rightarrow \operatorname{div} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0$
 $\rightarrow$ existe $\mathbf{N}$ tel que $\operatorname{rot} \mathbf{N} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$. Compatibilité avec cas stationnaire $\rightarrow \mathbf{N} = \mathbf{H}$ et donc $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$

3. Le courant de déplacement dans un condensateur crée un champ magnétique

Similaire au premier cas ; non seulement $\mathbf{j}$ mais aussi la densité de courant de déplacement $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ génère un champ d'induction magnétique

4. Distribution radiale de courant

est-ce que un champ magnétique est généré ? Ce n'est pas possible parce que on aurait une source ponctuelle de champ magnétique. Explication :

Densité de courant $\mathbf{j}$ sur une sphère de rayon r : $j = -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial Q}{\partial t}$

On considère $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, dans ce cas le deuxième terme compense le terme $\mathbf{j}$:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial Q}{\partial t}$$

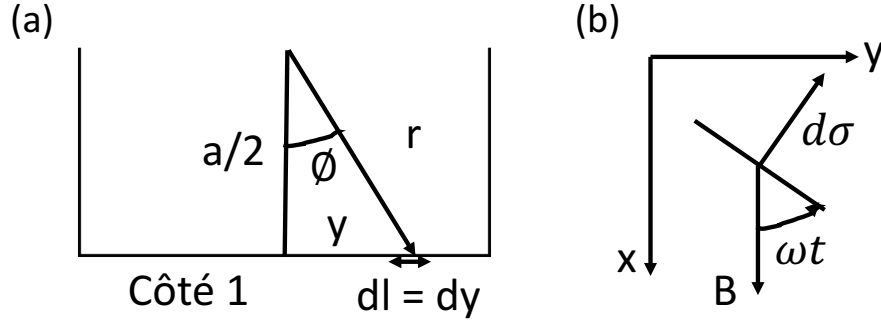
$\Rightarrow \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{0}$. Il n'y a pas de champ $\mathbf{H}$ créé dans ce condensateur sphérique.

Problème (3 pts) :

a) Afin de calculer le champ au centre de la spire, on calculera le champ créé par un côté de longueur a et on multipliera le résultat par 4 par symétrie et superposition des champs. La loi de Biot-Savart nous donne :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (11)$$

ou les vecteurs $d\mathbf{l}$ et $\mathbf{r}$ sont montrés dans la figure. On définit l'angle ϕ entre la normale au côté a passant par le centre de la spire et le point repéré par le vecteur $\mathbf{r}$ sur le côté. On commence par



définir le vecteur $\mathbf{r}$ avec ses projections :

$$\mathbf{r} = \sin \phi \cdot |\mathbf{r}| \cdot \mathbf{e}_y + \cos \phi \cdot |\mathbf{r}| \cdot \mathbf{e}_z \quad (12)$$

Lorsqu'on effectue le produit vectoriel avec $d\mathbf{l} = dy \cdot \mathbf{e}_y$, seul le second terme reste :

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{r} = \cos \phi \cdot |\mathbf{r}| \cdot dy \cdot \mathbf{e}_x \quad (13)$$

Afin d'exprimer dx , on écrit dans le triangle rectangle :

$$\tan \phi = \frac{y}{a/2} \quad \leftrightarrow \quad dy = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \phi} d\phi \quad (14)$$

Le champ magnétique créé par un morceau infinitésimal repéré par le vecteur $\mathbf{r}$ s'écrit donc :

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\cos \phi}{a/2} d\phi \cdot \mathbf{e}_x \quad (15)$$

L'intégration de ligne se fait maintenant sur l'angle ϕ et varie entre $-\pi/4$ et $+\pi/4$:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\pi/4}^{+\pi/4} \frac{\cos \phi}{a/2} d\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{a/2} \sin \phi \Big|_{-\pi/4}^{+\pi/4} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{a/2} 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2\sqrt{2}}{a} \quad (16)$$

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2\sqrt{2}}{a} \mathbf{e}_x \quad (17)$$

Le champ magnétique total au centre est donc $\mathbf{B} = 4 \mathbf{B}_1$:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{2\sqrt{2}}{a} \mathbf{e}_x \quad (18)$$

Le sens du champ magnétique pour le courant donné dans la figure est selon x positif.

b) On considère maintenant que le champ magnétique qui traverse la bobine en tout temps t a la valeur du champ magnétique au centre de la spire carrée $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{2\sqrt{2}}{a} \mathbf{e}_x$.

La rotation de la spire dans le champ magnétique génère une force électromotrice donnée par :

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (19)$$

le produit scalaire $\mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ donne :

$$\mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = ||\mathbf{B}|| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \omega t\right) d\sigma \quad (20)$$

Pour une spire on aurait donc :

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} B \sin(\omega t) d\sigma = B\pi R^2 \omega \cos(\omega t) \quad (21)$$

Pour N spires le résultat est multiplié par N tel que :

$$\varepsilon_{\text{tot}} = NB\pi R^2 \omega \cos(\omega t) \quad (22)$$

La loi de Kirchoff nous permet de déterminer $I_b(t)$:

$$L \cdot \frac{dI}{dt} = \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dI}{dt} = \frac{NB\pi R^2 \omega \cos(\omega t)}{L} \quad (23)$$

L'intensité du courant $I_b(t)$ est donc :

$$I_b(t) = \int \frac{NB\pi R^2 \omega \cos(\omega t)}{L} dt = \frac{NB\pi R^2 \sin(\omega t)}{L} \quad (24)$$