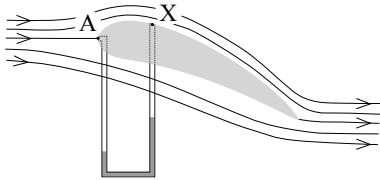


1. Fluides (4.0 pts)

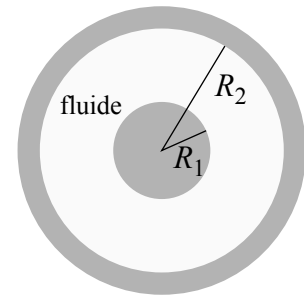
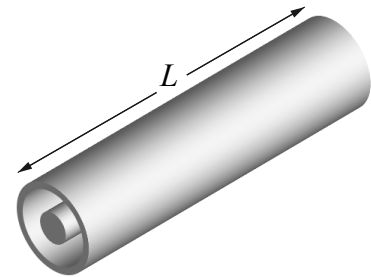
Q1 (0.5 pt) : Dessiner le vecteur tourbillon pour un écoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique. Dans cet écoulement, les vitesses sont parallèles à l'axe. Malgré cela, le vecteur tourbillon est non-nul. Justifier l'emploi du mot "tourbillon", qui connote une rotation.



Q2 (0.5 pt) : La figure à gauche montre un tube de Pitot, qui permet de mesurer la vitesse de l'avion par rapport à l'air. Expliquer son fonctionnement et donner l'expression de cette vitesse en fonction de p_A et p_X .

Problème (3.0 pts) :

On s'intéresse à l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible dans la direction de l'axe de deux cylindres coaxiaux (voir figure) de longueur L . Le cylindre intérieur de rayon R_1 est plein et le cylindre extérieur de rayon R_2 est creux. Les deux cylindres sont immobiles. Une différence de pression $\Delta p = p_0 - p_1$ est appliquée entre les deux extrémités du système. Le fluide de masse volumique ρ et de viscosité η remplit l'espace entre les deux cylindres. On néglige tout effet de la gravité.



- Déterminer l'expression du champ des vitesses et de la pression dans cet écoulement.
- Quelle force extérieure faut-il exercer sur le cylindre central pour le maintenir immobile ?

On donne les opérateurs suivants en coordonnées cylindriques dans la base $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z)$:

$$\nabla U(r, \phi, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad \nabla^2 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \nabla^2 A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \\ \nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \\ \nabla^2 A_z \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_r \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{A_\phi}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{A_\phi^2}{r} + A_z \frac{\partial A_r}{\partial z} \\ A_r \frac{\partial A_\phi}{\partial r} + \frac{A_\phi}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{A_\phi A_r}{r} + A_z \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \\ A_r \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{A_\phi}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} + A_z \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \end{bmatrix}$$

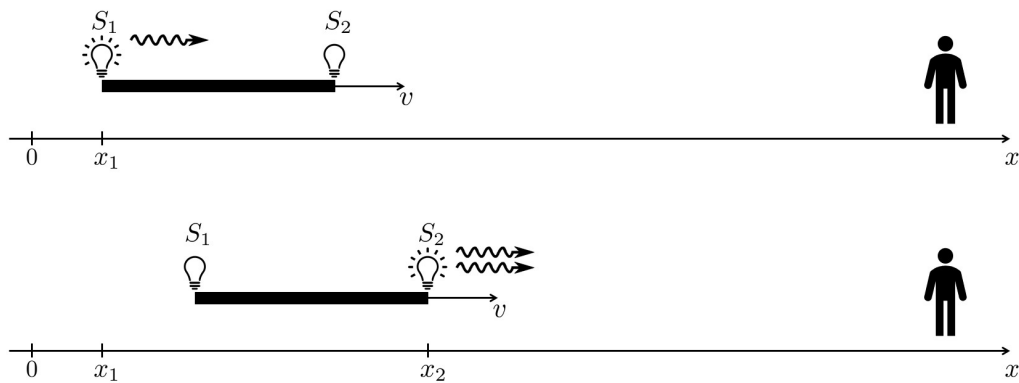
2. Relativité restreinte (3.0 pts)

Q1 (0.5 pt) : Quel est l'intervalle dans l'espace-temps x, y, z, ct conservé dans tout référentiel d'inertie ? Quel postulat mène à ce résultat ?

Q2 (0.5 pt) : Donner l'expression de l'énergie cinétique relativiste et démontrer qu'elle s'approche du résultat classique pour $v/c \ll 1$.

Problème (2.0 pts) :

Une barre d'une longueur au repos de $L_0 = 1\text{ m}$ se déplace à vitesse $v = 0.6c$ vers un observateur immobile. Deux lampes S_1 et S_2 sont fixées aux extrémités de la barre. La lampe S_1 s'allume plus tôt que la lampe S_2 de sorte que les deux impulsions lumineuses arrivent à l'observateur en même temps. Au moment de l'émission de la lumière, les lampes S_1 et S_2 se trouvaient respectivement aux points x_1 et x_2 (voir figure). Quelle est la distance $x_2 - x_1$ entre les lampes mesurée par l'observateur ? (Il s'agit de la longueur de la barre, telle qu'elle est perçue par l'œil humain ou capturée par une caméra.)



3. Electrostatique (3.0 pts)

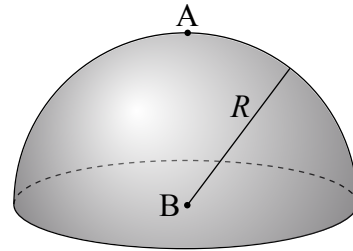
Q1 (0.5 pt) : Un dipôle électrique $\boldsymbol{\mu}$ se trouve dans un champ électrique homogène $\mathbf{E}$. Montrer que son énergie potentielle est $E_{\text{pot}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{E}$. La polarisation électrique résultant de l'orientation de dipôles permanents dans un champ électrique homogène augmente ou diminue-t-elle avec la température ? Expliquer brièvement pourquoi.

Q2 (0.5 pt) : Une sphère pleine conductrice est chargée. Pourquoi les charges se trouvent-elles uniquement à la surface de celle-ci ?

Problème (2.0 pts) :

Une sphère isolante et creuse de rayon R et de densité de charge surfacique homogène ρ_{2D} est coupée en deux. La moitié inférieure est retirée. Il ne reste plus que l'hémisphère du haut (voir figure).

Déterminer la différence de potentiel entre le haut de l'hémisphère (point A) et le centre de la base de l'hémisphère (point B).



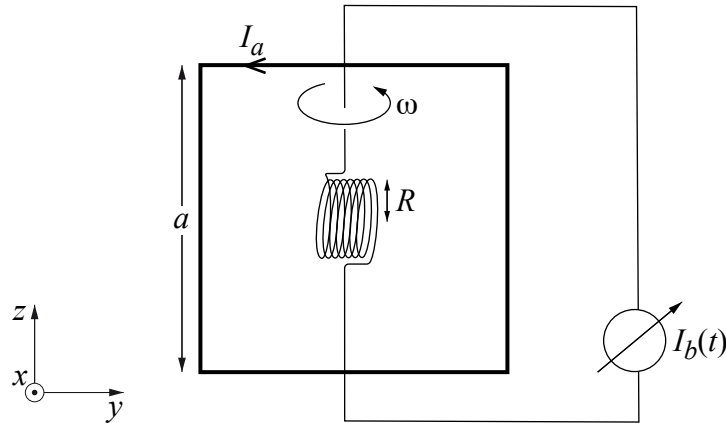
4. Electrodynamique (4.0 pts)

Q1 (0.5 pt) : Donner deux exemples des forces électromotrices.

Q2 (0.5 pt) : Motiver à l'aide d'un exemple l'introduction du courant de déplacement dans les équations de Maxwell.

Problème (3.0 pts) :

On considère une spire carrée de côté a parcourue par un courant I_a . Au centre de cette spire se trouve une bobine de rayon R composée de N spires. Cette bobine tourne à une vitesse angulaire ω autour de l'axe z .



a) Dans un premier temps, calculer le champ magnétique $\mathbf{B}$ créé au centre de la spire carrée de côté a par le passage d'un courant I_a constant. Déterminer l'intensité et la direction du champ $\mathbf{B}$. On supposera pour cela que les côtés de la spire carrée sont très fins.

b) On considère que la spire de côté a est beaucoup plus grande que la bobine au centre de sorte que le champ magnétique $\mathbf{B}$ soit uniforme dans la région où tourne la bobine. L'inductance de la bobine de N spires est L et sa résistance est nulle.

Déterminer l'intensité du courant $I_b(t)$ induit dans la bobine en négligeant la résistance du circuit.