

## Final Exam

24.01.2024

*The time available for the exam is 3 hours. No calculators, books or scripts are allowed, only one doublesided A4 handwritten paper with notes.*

*Use the space provided at each question and clearly mark your final answer.*

*Scrap paper is available at the end of the exam sheet.*

*SI units are implied throughout the exam.*

NAME.....

N°SCIPER.....

$$\text{cartesian} \quad \nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\text{cylindrical} \quad \nabla = \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\text{spherical} \quad \nabla = \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

**Problem 1**

Consider a long, hollow cylinder of radius  $R_1$  coaxial with a larger hollow cylinder of radius  $R_2$ . The inner cylinder is moving with a velocity  $v_0$  along the direction of its axis ( $\hat{z}$ ), whereas the outer cylinder is fixed. A viscous ( $\eta$ ) and incompressible fluid with density  $\rho$  occupies both the space between the cylinders ( $R_1 \leq r \leq R_2$ ) and inside the inner cylinder ( $r < R_1$ ). No pressure gradient is applied.

In the following the flow can be considered fully established and steady, gravitational forces can be neglected, and the no-slip condition can be assumed to apply.

- a) What is the pressure difference between two points separated by  $\Delta z$  and at the same radius  $R_1 < r < R_2$ ? (1 point)

- b) Determine the velocity field of the flow between the cylinders ( $R_1 \leq r \leq R_2$ ). (3 points)

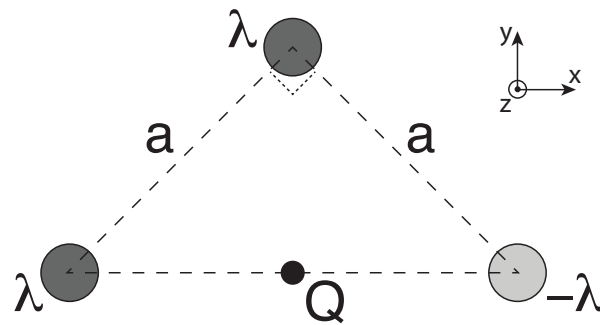
- c) Determine the velocity field for  $r < R_1$ . (2 points)

NAME.....

d) Find the vorticity  $\Omega$  of the flow for  $0 \leq r \leq R_2$ . (3 points)

e) Qualitatively plot  $v(r)$  and  $\Omega(r)$  for  $0 \leq r \leq R_2$ . (2 points)

## Problem 2

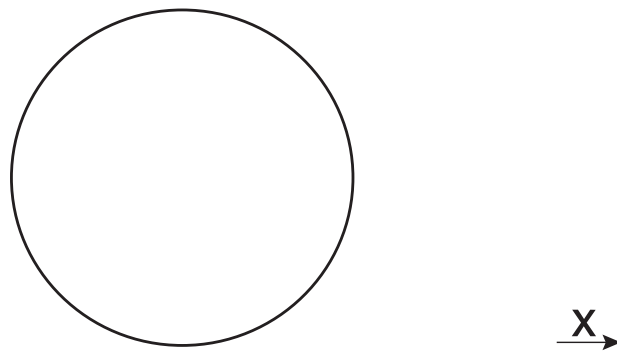


- a) Three line charges  $\lambda$  and a point charge  $Q$  are placed as indicated in the figure. Determine the force  $\vec{F}$  on the point charge (2 points).
- b) A rectangular box has two opposite faces of conducting material so that it forms a parallel plate capacitor. The box is filled for one-third with a dielectric liquid with relative permittivity  $\epsilon_r = 4$ . What is the ratio of the capacitance when the conducting faces are horizontal compared to when the box is rotated to have them vertical? (Ignore edge effects) (2 points)

**Problem 3**

A hollow conducting sphere with radius  $R$  is placed in a uniform electric field  $\vec{E}_0 = E_0 \hat{x}$

- a) What is the electric field inside the sphere? (1 point)
- b) Using the figure below, make a sketch of the situation, paying special attention to three points : 1) The E-field lines close to the surface of the sphere. 2) The induced surface charge distribution on the sphere. 3) Where to place an electric dipole  $\vec{p}$  to create the same E-field (outside the sphere) as the one created by these charges. (3 points)



- c) From the combination of  $\vec{E}_0$  and the dipole field, and taking into account the boundary conditions for this total E-field at the surface of the sphere, determine the magnitude of the electric dipole  $p$ . (3 points)

- d) Find an expression for the total E-field just outside the sphere ( $E(\theta)$ ) and use this to calculate the surface charge distribution on the sphere  $\sigma(\theta)$ . (3 points)

NAME.....

**Problem 4**

Consider a spherical shell with radius  $R$  and uniform surface charge density  $\sigma$ . The spherical shell is rotating around its  $z$ -axis with angular velocity  $\omega$ .

- a) Calculate the magnetic field  $\vec{B}$  at the centre of the rotating spherical shell. (3 points)

Hint :  $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$

- b) Determine the total magnetic moment  $\vec{m}$  of the rotating spherical shell. (3 points)

- c) We now want to replace the rotating shell by a (stationary) solid sphere made of a ferromagnetic material with uniform magnetisation  $\vec{M}$ . For what value of  $\vec{M}$  will the two spheres produce the same B-field for  $r > R$ ?

The final value should be in terms of values given in the problem ( $R$ ,  $\sigma$ , and  $\omega$ ), but if you did not manage to solve (b) you can express it in terms of  $\vec{m}$ . (2 points)

### Problem 5

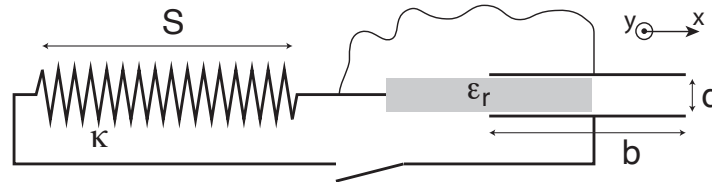
A spring with spring constant  $\kappa$  and equilibrium length  $S$  has a total of  $N$  windings with area  $A$ . The left side of the spring is fixed, whereas the right side can move freely along the  $x$ -axis. The spring is connected to flexible wires that allow to pass a current through it.

- a) Determine the (self-)inductance of the spring. (1 point)

- b) What is the total force on the right side of the spring as a function of current  $I$  passing through it? (2 points)

Hint : set  $x = 0$  at the right side for  $I = 0$ .

- c) As illustrated in the figure, a dielectric slab with  $\epsilon_r$  and thickness  $\lesssim d$  is attached to the spring. This slab is placed between the plates of a capacitor with plate dimensions  $a$  along the  $y$ -direction and  $b$  along the  $x$ -direction, and distance  $d$  between the plates. When there is no charge on the capacitor, the dielectric fills the capacitor exactly half way up to  $b/2$ . What part of the dielectric will be inside the capacitor if the latter is charged to  $\Phi_0$ ? Assume that no current is running through the spring. (2 points)



(Final questions on next page)

- d) The charged capacitor is connected in series to the spring via wires with total resistance  $R$ . At  $t = 0$  a switch is closed to connect the capacitor with the spring. Describe qualitatively what will happen when the switch is closed and sketch (no exact values) what part of the dielectric is inside the capacitor as a function of time for  $t \geq 0$ . (2 points)

- e) What is the total impedance of the circuit? (2 points)

1. Considérons un long cylindre creux de rayon  $R_1$  coaxial avec un cylindre creux plus grand de rayon  $R_2$ . Le cylindre intérieur se déplace à une vitesse  $v_0$  le long de la direction de son axe ( $\hat{z}$ ), tandis que le cylindre extérieur est fixe. Un fluide visqueux ( $\eta$ ) et incompressible de densité  $\rho$  occupe à la fois l'espace entre les cylindres ( $R_1 \leq r \leq R_2$ ) et à l'intérieur du cylindre intérieur ( $r < R_1$ ). Aucun gradient de pression n'est appliqué. Dans ce qui suit, l'écoulement peut être considéré comme entièrement établi et stable, les forces gravitationnelles peuvent être négligées et on peut supposer que la condition de non-glissement s'applique.
  - a) Quelle est la différence de pression entre deux points séparés par  $\Delta z$  et au même rayon ?
  - b) Déterminer le champ de vitesse de l'écoulement entre les cylindres.
  - c) Déterminer le champ de vitesse de l'écoulement pour  $r < R_1$ .
  - d) Trouver la vecteur tourbillon  $\Omega$  de l'écoulement.
  - e) Tracer qualitativement  $v(r)$  et  $\Omega(r)$
2. a) Trois charges linéaires  $\lambda$  et une charge ponctuelle  $Q$  sont placées comme indiqué sur la figure. Déterminer la force  $\vec{F}$  sur la charge ponctuelle
- b) Une boîte rectangulaire possède deux faces opposées en matériau conducteur de manière à former un condensateur à plaques parallèles. La boîte est remplie au tiers d'un liquide diélectrique de permittivité relative  $\epsilon_r = 4$ . Quel est le rapport de la capacité lorsque les faces conductrices sont horizontales par rapport à celle lorsque la boîte est tournée pour les rendre verticales ? (Ne pas tenir compte des effets de bord).
3. Une sphère conductrice creuse de rayon  $R$  est placée dans un champ électrique uniforme  $\vec{E}_0 = E_0 \hat{x}$ .
  - a) Quel est le champ électrique à l'intérieur de la sphère ?
  - b) A l'aide de la figure ci-dessous, faites un croquis de la situation en portant une attention particulière à trois points : 1) Les lignes de champ  $E$  proches de la surface de la sphère. 2) La distribution de la charge de surface induite sur la sphère. 3) Où placer un dipôle électrique  $\vec{p}$  pour créer le même champ  $E$  (à l'extérieur de la sphère) que celui créé par ces charges.
  - c) A partir de la combinaison de  $\vec{E}_0$  et du champ dipolaire, et en tenant compte des conditions aux limites pour ce champ  $E$  total à la surface de la sphère, déterminez la magnitude du dipôle électrique  $p$ .
  - d) Trouvez une expression pour le champ  $E$  total juste à l'extérieur de la sphère ( $E(\theta)$ ) et utilisez-la pour calculer la distribution de la charge de surface sur la sphère  $\sigma(\theta)$ .
4. Considérons une coquille sphérique de rayon  $R$  et de densité de charge superficielle uniforme  $\sigma$ . La coquille sphérique tourne autour de son axe  $z$  avec une vitesse angulaire  $\omega$ .
  - a) Calculez le champ magnétique  $\vec{B}$  au centre de la coquille sphérique en rotation.
  - b) Déterminer le moment magnétique total  $\vec{m}$  de la coquille sphérique en rotation.
  - c) Nous voulons maintenant remplacer la coquille tournante par une sphère solide (stationnaire) faite d'un matériau ferromagnétique avec une magnétisation uniforme  $\vec{M}$ . Pour quelle valeur de  $\vec{M}$  les deux sphères produiront-elles le même champ  $B$  pour  $r > R$  ? La valeur finale doit être exprimée en termes de valeurs données dans le problème ( $R$ ,  $\sigma$ , et  $\omega$ ), mais si vous n'avez pas réussi à résoudre (b), vous pouvez l'exprimer en termes de  $\vec{m}$ .
5. Un ressort de constante  $\kappa$  et de longueur d'équilibre  $S$  possède au total  $N$  spires de surface  $A$ . Le côté gauche du ressort est fixe, tandis que le côté droit peut se déplacer librement le long de l'axe  $x$ . Le ressort est relié à des fils flexibles qui permettent de faire passer un courant à travers lui.
  - a) Déterminez l'inductance du ressort.
  - b) Quelle est la force totale sur le côté droit du ressort en fonction du courant  $I$  qui le traverse ?
  - c) Comme le montre la figure, une plaque diélectrique de  $\epsilon_r$  et d'épaisseur  $d$  est fixée au ressort. Cette plaque est placée entre les plaques d'un condensateur dont les dimensions sont  $a$  le long de la direction  $y$  et  $b$  le long de la direction  $x$ , et la distance  $d$  entre les plaques. Lorsqu'il n'y a pas de charge sur le condensateur, le diélectrique remplit le condensateur exactement à moitié jusqu'à  $b/2$ . Quelle partie du diélectrique se trouvera à l'intérieur du condensateur si ce dernier est chargé à  $\Phi_0$  ? Supposons qu'aucun courant ne circule dans le ressort.
  - d) Le condensateur chargé est connecté en série au ressort par des fils de résistance totale  $R$ . A  $t = 0$ , un interrupteur est fermé pour connecter le condensateur au ressort. Décrivez qualitativement ce qui se passera lorsque l'interrupteur sera fermé et esquissez (pas de valeurs exactes) quelle partie du diélectrique se trouve à l'intérieur du condensateur en fonction du temps pour  $t \geq 0$ .
  - e) Quelle est l'impédance totale du circuit ?

SCRAP PAPER. Will **not** be considered for grading.

SCRAP PAPER. Will **not** be considered for grading.