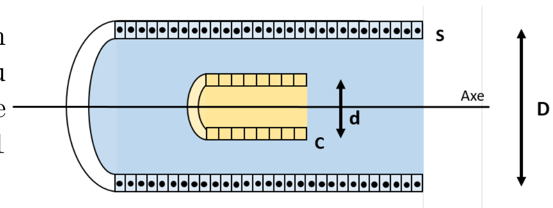
Cours de physique générale III – Dr Fabio Avino

Semestre Automne 2024[1]

Corrigé des exercices - Série 9

1. Solenoids - *niveau 1*

Un solénoïde S de diamètre $D = 3.2$ cm et composé de 220 tours/cm est parcouru par un courant sinusoïdal $I = I_0 \sin(2\pi f t)$. L'amplitude du courant est $I_0 = 1.5$ A et la fréquence est de $f = 50$ Hz. Au centre de ce solénoïde, on place une bobine C de 130 tours serrés de diamètre $d = 2.1$ cm. Quelle est la f.é.m. induite dans cette bobine C ?



Corrigé

Puisque la bobine C est placée à l'intérieur du solénoïde, elle se trouve dans le champ magnétique produit par le courant I dans le solénoïde S, il y a donc un flux magnétique Φ_B^C dans la bobine C. Quand Φ_B^C change, une f.é.m. $\mathcal{E}$ est induite dans la bobine C, par la loi de Faraday. Comme la bobine C consiste en un nombre de tours N, la loi de Faraday s'écrit :

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B^C}{dt} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{1}$$

où $N = 130$, le nombre de tours dans la bobine C, et Φ_B est le flux magnétique à travers un seul tour de la bobine C. Vu que $\vec{B}$ est uniforme et dans la direction perpendiculaire à la surface A, le flux à travers chaque tour de la bobine C est $\Phi_B = BA$.

Le champ magnétique B à l'intérieur du solénoïde dépend du courant I circulant dans le solénoïde et du nombre de tours par mètre n : on a $B = \mu_0 I n = \mu_0 I_0 n \sin(2\pi f t)$. Dans ce cas, $A = \frac{1}{4}\pi d^2$ et $n = 22000$ tours/m. On a donc :

$$\Phi_B = BA = \mu_0 n \frac{\pi d^2}{4} I_0 \sin(2\pi f t) \tag{2}$$

On peut maintenant calculer la variation dans le temps de ce flux magnétique :

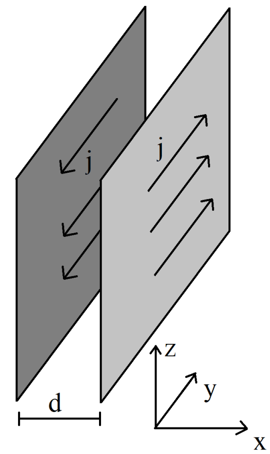
$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \mu_0 n \frac{\pi^2 d^2}{2} f I_0 \cos(2\pi f t) \tag{3}$$

Et on en déduit l'amplitude de la f.é.m. induite :

$$|\mathcal{E}| = N \mu_0 n \frac{\pi^2 d^2}{2} f I_0 = 0.59 \text{ V} \tag{4}$$

1. crédit : Dr. J. Loizu, Prof. A. Fasoli

2. Plaques parallèles - *niveau 2*



On considère une ligne électrique composée de deux grands plans (approximation plans infinis valable) à distance d et parcourus par des courants de densité j (en Ampères par mètre) dans des directions opposées le long de y.

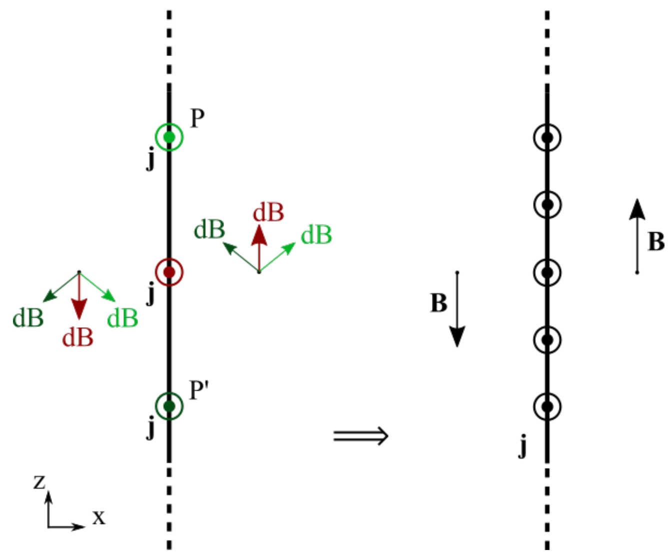
a) Trouvez le champ magnétique entre les plaques et à l'extérieur d'elles.

b) Quelle est l'énergie stockée pour une surface $A = 1\ \mathrm{cm}^2$ du câble si $d = 1.2$ mm et $j = 2.7$ A/m ?

Corrigé

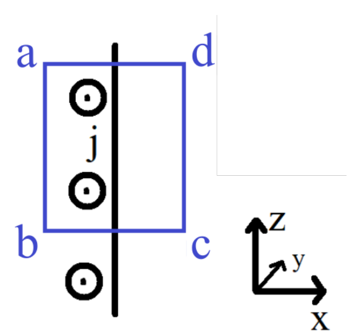
a) Remarquons premièrement qu'en raison de la symétrie de la distribution de courant, le champ magnétique n'a qu'une composante selon z.

En effet, si on considère pour l'instant un seul plan, et un point à une certaine distance de ce plan, le champ magnétique total $\vec{B}$ créé en ce point est donné par la somme des contributions $d\vec{B}$ produites par tous les éléments de courant du plan. Chaque élément de courant j selon y, va créér un champ $d\vec{B}$ selon x et z (figure de gauche ci-contre). Mais comme on le voit, la composante selon x du champ $d\vec{B}$ créé pour tout élément de courant (passant un point P) et son symétrique par rapport au point considéré (passant par un point P') se compensent. Si l'on se place suffisament proche du plan pour le considérer infini, on peut appliquer ce raisonnement à tous les éléments de courant du plan ; le champ magnétique total est donc orienté selon z (figure de droite). Avec les deux plans, par superposition on a toujours $\vec{B}$ orienté selon z.



Nous pouvons ensuite trouver le champ magnétique en utilisant la loi d'Ampère :

$$\int \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 I \tag{5}$$



Commençons par trouver le champ créé par un seul plan. On utilise la loi d'Ampère en considérant le contour abcd (voir figure). Le long de ce contour on peut écrire :

$$\int_a^b B_z dz + \int_b^c B_x dx + \int_c^d B_z dz + \int_d^a B_x dx = \mu_0 I_{abcd} \tag{6}$$

Comme $\vec{B}$ est selon z on a $B_x = 0$, et par symétrie on voit aussi que $B_z^{ab} = -B_z^{cd}$. Notons enfin que $\int_a^b dz = z_b - z_a = -l$ (notant $l = l_{ab} = l_{cd}$). En conséquence on obtient :

$$-lB_z^{ab} + 0 + lB_z^{cd} + 0 = \mu_0 I_{abcd} \tag{7}$$
$$2B_z^{cd} l = \mu_0 j l \tag{8}$$

$$B_z^{cd} = -B_z^{ab} = \mu_0 j/2 \tag{9}$$

Notez que le champ magnétique d'un plan infini (ou très grand par rapport aux distances au plan considérées) ne dépend pas de la distance au plan. Ce résultat est similaire au champ électrique d'un plan chargé, ce qui fait de ce système à deux plans un analogue magnétique d'un condensateur. La direction différente des courants sur les plans entraîne la production d'un champ magnétique B_z de signes opposés. En conséquence, le champ à l'extérieur du "condensateur magnétique" est nul, alors qu'à l'intérieur il est doublé.

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 j \vec{e_z}, & |x| < d/2 \\ 0, & |x| > d/2 \end{cases} \tag{10}$$

Ici $\vec{e_z}$ correspond au vecteur unitaire le long de l'axe z et $x = 0$ correspond au point au centre entre les plans.

b) Connaissant le champ magnétique, nous pouvons estimer l'énergie du champ magnétique par unité de volume :

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \tag{11}$$

Puisque que le champ est uniforme, l'intégrale sur le volume devient simplement une multiplication par le volume. Pour une aire A, le volume entre les plaques est Ad et l'énergie magnétique est donnée par :

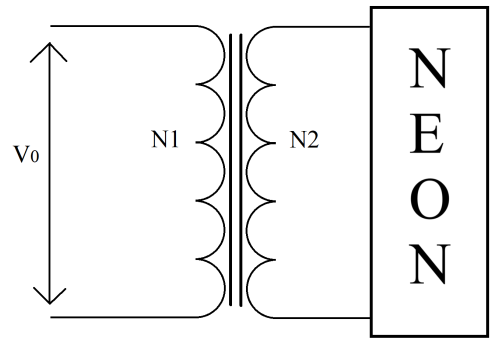
$$U_B = u_B A d = \frac{\mu_0 j^2}{2} A d \tag{12}$$

On trouve, pour $A = 1$ cm^2 :

$$U_B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 2.7^2 \times 10^{-4} \times 1.2 \times 10^{-3}}{2} = 5.5 \times 10^{-13}\ \text{J} \tag{13}$$

3. Transformateur pour néons - *niveau 1*

Certaines enseignes au néon nécessitent $V_1 = 12$ kV pour leur fonctionnement. Pour fonctionner à partir d'une ligne de tension variable d'amplitude $V_0 = 240$ V, on utilise un transformateur. Quel doit être le rapport des tours secondaires sur primaires du transformateur ? Quelle serait la tension de sortie si le transformateur était connecté à l'envers, i.e. si on inverse les bobines primaires et secondaires ?



Corrigé

Un transformateur se compose de deux bobines de fil appelées bobines primaire et secondaire. Les deux bobines peuvent être entrelacées (avec fil isolé) ; ou elles peuvent être reliées par un noyau de fer, comme le montre la figure. On suppose que tout le flux magnétique produit par le courant dans la bobine primaire passe par la bobine secondaire.
Lorsqu'une tension alternative est appliquée à la bobine primaire, le champ magnétique changeant qu'elle produit induira une tension alternative de la même fréquence dans la bobine secondaire. Cependant, la tension sera différente selon le nombre de boucles dans chaque bobine.

D'après la loi de Faraday, la force électromotrice induite dans la bobine secondaire est :

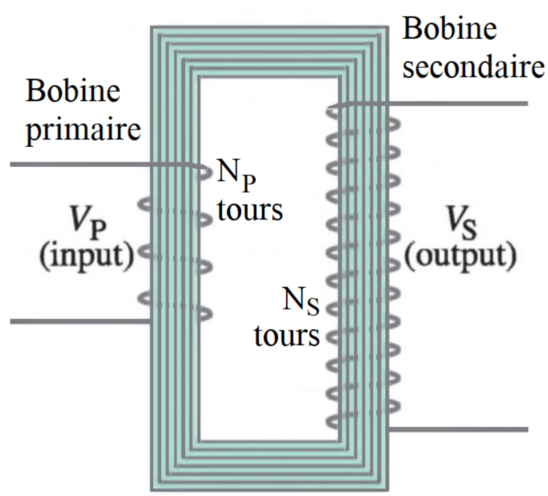
$$\varepsilon_s = -N_s \frac{d\Phi}{dt} \tag{14}$$

où N_s est le nombre de tours dans la bobine secondaire. Le flux produit par la bobine primaire est aussi donné par la loi de Faraday :

$$\varepsilon_p = -N_p \frac{d\Phi}{dt} \tag{15}$$

Les f.é.m induites s'opposent aux tensions établies aux bornes des bobines. On a alors la relation suivante entre les tension à la sortie et en entrée et d'un transformateur :

$$\frac{V_s}{V_p} = \frac{-\varepsilon_s}{-\varepsilon_p} = \frac{N_s}{N_p} \tag{16}$$



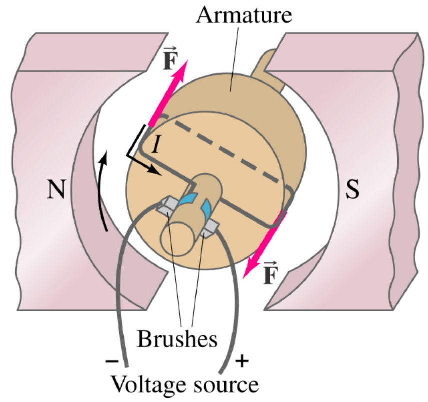
Pour obtenir la tension requise V_1, nous avons donc besoin du rapport entre le nombre de tours des bobines :

$$\frac{N_s}{N_p} = \frac{V_s}{V_p} = \frac{V_1}{V_0} = 50 \tag{17}$$

Si le transformateur est connecté à l'envers, le rapport du nombre de tours entre les bobines primaire et secondaire est inversé :

$$\frac{N_s}{N_p} = \frac{V_s}{V_p} = \frac{V_1}{V_0} = 1/50 \rightarrow V_1 = V_0/50 = 4.8 \text{ V} \tag{18}$$

4. Voiture électrique - *niveau 2*



Une petite voiture électrique ressent une force de frottement de 250 N lorsqu'elle se déplace à une vitesse constante de 35 km/h. Elle contient une bobine rectangulaire de 270 tours et de taille 12 × 15 cm, qui tourne dans un champ magnétique $B = 0.6$ T.
Le moteur est connecté directement (sans boîte de vitesses) aux roues de diamètre 58 cm, donc la bobine et les roues tournent à la même fréquence. On considère l'instant où la bobine est dans le même plan que le champ $\vec{B}$, tel que le couple généré est maximal.

a) Quel est le courant tiré par le moteur ?

b) Quelle est la force électromotrice induite dans les bobines ?

c) Pour permettre à la voiture de rouler à cette vitesse, le moteur électrique a besoin d'être alimenté par dix batteries de 12 V chacune, connectées en série. En déduire la puissance dissipée dans la partie résistive de la bobine.

d) Quel pourcentage de la puissance produite par le moteur arrive jusqu'aux roues ?

On vous rappelle que la définition du couple est

$$\vec{C} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{19}$$

Corrigé

a) Le courant I tiré par le moteur passe dans la bobine et génère un couple C_m. Comme la voiture est supposée rouler à vitesse constante, ce couple doit compenser exactement le couple généré par la force de frottement sur les roues.

La définition du couple est

$$\vec{C} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{20}$$

La force de frottement F_{fr} engendre un couple sur les roues de diamètre d

$$\vec{C}_{fr} = \vec{r} \times \vec{F}_{fr}$$
$$C_{fr} = \frac{d}{2} F_{fr}$$

Le couple généré par le moteur est donné par

$$\vec{C}_m = \vec{\mu} \times \vec{B} \tag{21}$$

Avec $\mu = NIA$ le moment magnétique de la bobine, N le nombre de tours et A la surface encerclé par la bobine. Au moment où le couple est maximal, $\vec{\mu}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires. En égalisant les deux couples, on obtient

$$C_m = C_{fr} \tag{22}$$

$$NIAB = \frac{d}{2} F_{fr} \tag{23}$$

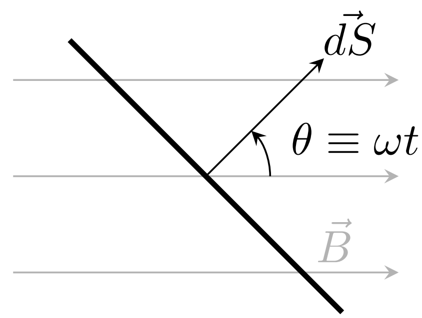
$$I = \frac{F_{fr} d}{2NAB} \approx 24.9 \text{ A} \tag{24}$$

b) On peut calculer la tension $\mathcal{E}$ induite dans les bobines de deux manières différentes.

b1) La première méthode consiste à calculer directement la force électromotrice induite dans la bobine dû à la variation du flux magnétique. On utilise la loi de Faraday :

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \tag{25}$$

Pour trouver le flux, on doit projeter le vecteur normal à la bobine sur le champ magnétique. On a alors



$$\vec{B} \cdot d\vec{S} = BdS \cos \omega t \tag{26}$$

La tension induite est donc donnée par

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = -BA\frac{\partial \cos \omega t}{\partial t} = BA\omega \sin(\omega t) \tag{27}$$

L'énoncé nous dit que la bobine est dans le même plan que $\vec{B}$, donc $\omega t = \pi/2$. La tension induite dans chaque tour de la bobine est donc

$$\mathcal{E}_1 = BA\omega \tag{28}$$

Comme la bobine est composée de N tours, la tension induite totale sera

$$\mathcal{E} = BA\omega N \tag{29}$$

Il nous reste à trouver la fréquence de rotation de la bobine, supposé égale à celle des roues. On peut se rappeler de la formule $\omega = v/r$ avec r le rayon de la roue. Sinon, on peut la retrouver par exemple de la manière suivante : la période de rotation T est donné par la circonférence des roues divisée par la vitesse de la voiture :

$$T = \frac{2\pi \frac{d}{2}}{v} \tag{30}$$

On peut relier la période à la fréquence de la manière suivante :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2v}{d} \tag{31}$$

$$\mathcal{E} = \frac{2vNAB}{d} \approx 97.8 \text{ V} \tag{32}$$

b2) Une deuxième méthode consiste à utiliser de nouveau le fait que la voiture roule à vitesse constante. La puissance électrique consommée par la bobine doit donc être égale à la puissance nécessaire pour compenser le frottement des roues.

La puissance consommée par la bobine est donné par le produit de la tension et du courant

$$P_{el} = \mathcal{E} I \tag{33}$$

La puissance dû à la force de frottement vaut

$$P_{fr} = F_{fr} v \tag{34}$$

avec v la vitesse de la voiture. En égalisant les deux puissances, on obtient

$$\mathcal{E} = \frac{F_{fr} v}{I} = \frac{2vNAB}{d} \tag{35}$$

On obtient finalement le même résultat qu'au point b1).

c) La puissance générée par les batteries est plus grande que celle consommée par la bobine et la différence nous donne la puissance dissipée.

Les dix batteries en série produisent une tension $V_0 = 120$ V et le courant I calculé au point a). La puissance produite est donc

$$P_{batterie} = V_0 I \tag{36}$$

La puissance consommé par la bobine est donné par

$$P_{bobine} = \mathcal{E} I \tag{37}$$

La puissance dissipée est donc

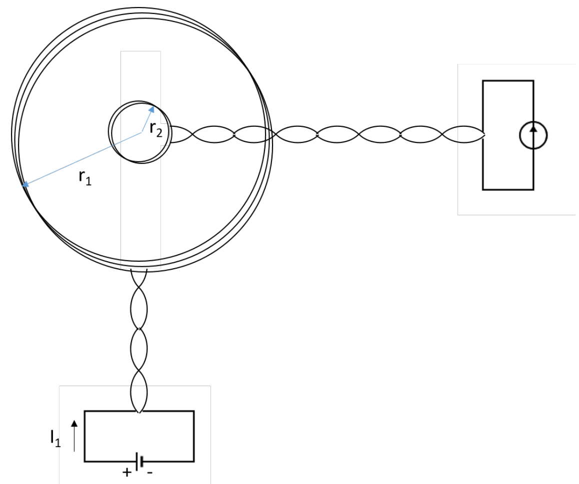
$$P_{dissipe} = I(V_0 - \mathcal{E}) \approx 553 \text{ W} \tag{38}$$

d) L'efficacité du moteur est donnée par le ratio de la puissance utilisée pour faire tourner les roues et la puissance générée par les batteries :

$$\eta = \frac{P_{bobine}}{P_{batterie}} \approx 81\% \tag{39}$$

5. Chargement brosse à dent électrique - *niveau 2*

Considérons deux exemples de calcul d'inductance mutuelle.



a) On considère deux bobines circulaires coaxiales (figure), avec rayons r_1 et r_2 et nombres de tours N_1 et N_2 pour la grande et la petite bobine respectivement. Derivez une expression pour l'inductance mutuelle M pour cet arrangement des deux bobines, en supposant que $r_1 \gg r_2$.

   Puis, calculez la valeur de M pour $N_1 = N_2 = 1200$ tours, $r_1 = 15$ cm et $r_2 = 1.1$ cm.

b) Une brosse à dents électrique a une base conçue pour tenir la poignée de la brosse à dents lorsqu'elle n'est pas utilisée. La poignée a un trou cylindrique qui se pose sur un cylindre similaire sur la base, comme dans la figure. Quand la poignée est mise sur la base, un courant variant dans un solénoïde à l'intérieur du cylindre de la base induit un courant dans une bobine dans la poignée. Ce courant induit charge la batterie dans la poignée.
   On peut modéliser la base comme un solénoïde de longueur l avec N_B tours, portant un courant I et avec section A. La bobine de la poignée contient N_P tours.

   Trouvez l'inductance mutuelle de ce système pour $N_B = 1500$ tours, $A = 1.0 \times 10^{-4}$ m^2, $l = 0.02$ m et $N_H = 800$ tours.

Corrigé

a) L'inductance mutuelle pour ces bobines est le rapport entre le flux total ($N\Phi$) à travers une bobine et le courant I de l'autre bobine, qui produit ce flux.

   Notons que ici les bobines ne sont pas des solénoïdes mais des simples enroulements circulaires plats, donc équivalents à une boucle circulaire de courant mais avec plusieurs tours. En particulier, cela veut dire qu'on ne peut pas utiliser la loi d'Ampère pour calculer le champ magnétique car il n'y a pas de symétrie simple à exploiter. Par contre, le champ magnétique peut se calculer avec la loi de Biot-Savart. Ceci à déjà été fait en cours pour une boucle de courant circulaire, pour laquelle le champ a été calculé au centre de la bobine.

   Le champ magnétique à travers la grande bobine dû à la petite bobine est non-uniforme, alors le flux à travers la grande bobine est non-uniforme et est difficile à calculer. Cependant, la petite bobine est assez petite pour supposer que le champ magnétique qui lui passe à travers dû à la grande bobine est à peu près uniforme. Alors, pour trouver M, on prend le rapport entre le courant I_1 dans la grande bobine et le flux total dans la petite bobine,

$$M = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} = \frac{N_2 B_1 A_2}{I_1}, \tag{40}$$

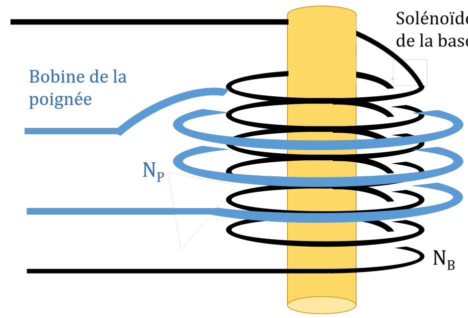
   où B_1 est la magnitude du champ magnétique à l'intérieur de la petite bobine dû à la grande bobine, et $A_2 = \pi r_2^2$ est la section enfermée par chaque tour. Le champ magnétique généré par la grande bobine est, partout dans la petite bobine (voir cours),

$$B_1 = N_1 \frac{\mu_0 I_1}{2r_1}. \tag{41}$$

Cela nous donne,

$$M = \frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 r_2^2}{2r_1} \tag{42}$$

Pour la valeur de l'inductance mutuelle, on trouve $M = 2.29 \times 10^{-3}$ H $= 2.29$ mH.



b) On peut voir le système comme un solénoïde de N_B tours entouré par une bobine de N_H tours, voir la figure. Comme le solénoïde de la base porte un courant I, et le système a une symétrie cylindrique, le champ magnétique à l'intérieur est,

$$B = \frac{\mu_0 N_B I}{l}. \tag{43}$$

Le flux magnétique Φ_B^P à travers chaque tour de la bobine de la poignée, créé par le champ magnétique de la bobine de la base, est BA. Alors, l'inductance mutuelle est,

$$M = \frac{N_P \Phi_B^P}{I} = \frac{N_P BA}{I} = \frac{\mu_0 N_P N_B A}{l}. \tag{44}$$

La valeur de l'inductance mutuelle pour ce système est $M = 7.5$ mH.