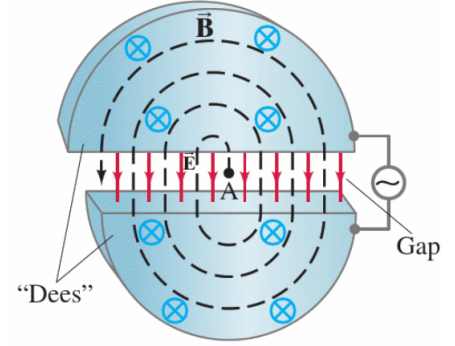


Corrigé des exercices - Série 8

1. Cyclotron - niveau 1

Un cyclotron est un appareil utilisé pour accélérer des particules élémentaires à haute vitesse. Les particules injectées avec une vitesse initiale au point A sur la figure parcourent des orbites circulaires dans le champ magnétique B . Elles sont accélérées à des vitesses de plus en plus élevées par le champ électrique E présent dans l'intervalle entre les deux demi-cylindres métalliques (appelés "Dee" à cause de leur forme en D). La direction de E change lors de chaque demi-cycle dû à une tension sinusoïdale $V(t) = V_0 \sin(2\pi ft)$ ce qui permet d'accélérer les particules lors de chaque passage à travers l'intervalle.



- Montrez que la fréquence f doit valoir $f = \frac{qB}{2\pi m}$, où q est la charge des particules et m leur masse.
- Calculez l'énergie cinétique gagnée par les particules lors de chaque cycle en fonction de V_0 (on admet que la tension est constant au maximum V_0 pendant l'accélération).
- L'Hôpital Universitaire de Genève (HUG) utilise un cyclotron pour produire des éléments radioactifs qui sont utilisés à des fins d'imagerie médicale. Pour visualiser les cellules cancéreuses, ils souhaitent produire du fluore-18 en bombardant de l'oxygène-18 avec des protons accélérés à une énergie de 11 MeV. Si le champ magnétique dans le cyclotron est $B = 0.6$ T, quel est le rayon minimal (donc la taille du cyclotron) nécessaire pour accélérer les protons à l'énergie souhaitée ?

Corrigé

- Pour que les particules soient accélérées lors de chaque passage dans l'intervalle, la fréquence d'oscillation du champ électrique doit être égale à la fréquence de rotation des particules. De cette façon $\vec{E}$ pointe toujours dans la bonne direction quand les particules traversent l'intervalle. On doit donc trouver f , la fréquence de rotation des particules.

Les particules chargées subissent la force de Lorentz $q\vec{v} \times \vec{B}$ qui agit comme force centripète et les maintient sur une orbite circulaire :

$$mr\omega^2 = qvB = qBr\omega \quad (1)$$

On peut donc exprimer la fréquence angulaire ω :

$$\omega = \frac{qB}{m} \quad (2)$$

On trouve finalement la fréquence de rotation des particules dans le champ magnétique :

$$f = \frac{qB}{2\pi m} \quad (3)$$

1. crédit : Dr. J. Loizu, Prof. A. Fasoli

Note (rappel de mécanique du point) : Le mouvement d'une particule dans un repère polaire (r, θ) est décrit par sa position $\vec{r} = r\vec{e}_r$. Sa vitesse est donnée par $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r - r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$. Si on considère un mouvement purement circulaire de rotation constante ($r = \text{cst}, \dot{\theta} = \omega = \text{cst}$), on a une vitesse $\vec{v} = -r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, et l'accélération s'écrit $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{e}_r = -r\omega^2\vec{e}_r$. L'équation du mouvement de cette particule soumise à un champ magnétique dans la direction $\vec{e}_z$ nous donne donc :

$$m\vec{a} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (4)$$

$$-mr\omega^2\vec{e}_r = -qr\omega B \vec{e}_\theta \times \vec{e}_z = -qr\omega B \vec{e}_r \quad (5)$$

$$\omega = \frac{qB}{m} \quad (6)$$

- b) L'énergie cinétique gagnée par une particule chargée traversant une différence de potentiel ΔV est donné par $\Delta E_{\text{cin}} = -q\Delta V$. Si la particule est de charge positive il faut qu'elle traverse l'intervalle lorsque $\Delta V = -V_0$ pour être accélérée. Les particules traversent l'intervalle deux fois par cycle, elles gagnent donc une énergie :

$$\Delta E_{\text{cin}}^{\text{cycle}} = 2qV_0 \quad (7)$$

Note : On peut démontrer $\Delta E_{\text{cin}} = -q\Delta V$ en partant encore une fois de l'équation du mouvement de la charge. Considérons une différence de potentielle ΔV sur une distance e , le champ électrique résultant est $E = \Delta V/e$. L'équation du mouvement d'une charge q accélérée par ce champ s'écrit :

$$m \frac{dv}{dt} = qE \quad (8)$$

On multiplie par v de chaque côté :

$$m \frac{dv}{dt} v = qEv \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = -q \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (10)$$

$$d \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = -q dV \quad (11)$$

Puis on intègre pour avoir le résultat.

- c) Les particules ont une fréquence de rotation constante dans le champ magnétique, mais le rayon de leur orbite dépend de leur vitesse. En accélérant, l'orbite de la particule augmente, et donc plus l'énergie souhaitée est élevée, plus la taille (et le coût) du cyclotron nécessaire sera grand.

Pour trouver le rayon de l'orbite, on repart des calculs du point a)

$$mr\omega^2 = qvB \quad (12)$$

En réécrivant $\omega = v/r$, on a

$$\frac{mv^2}{r} = qvB \quad (13)$$

$$r = \frac{mv}{qB} \quad (14)$$

On peut exprimer le rayon en termes d'énergie cinétique au lieu de la vitesse :

$$r = \frac{\sqrt{2mE_{cin}}}{qB} \quad (15)$$

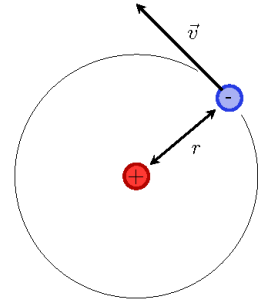
L'hôpital veut produire des protons d'énergie 11 MeV. On peut réécrire cette énergie en unités de Joules :

$$E \text{ [J]} = e \cdot E \text{ [eV]} \implies 11 \text{ MeV} \approx 1.76 \cdot 10^{-12} \text{ J} \quad (16)$$

avec e la charge de l'électron. Le rayon minimal du cyclotron pour atteindre cette énergie est donc de $r \approx 80$ cm : une machine relativement compacte est suffisante.

2. Magnétisme de la matière - niveau 1

Pour comprendre l'origine du magnétisme dans la matière, considérons un modèle simple de l'atome : un électron orbite le noyau à une vitesse v et un rayon r .



- Trouvez le courant i associé au mouvement de l'électron et le moment magnétique μ qui en résulte.
- Trouvez le moment cinétique L de l'électron.

Un des résultats de la mécanique quantique est que le moment cinétique est 'quantisé'. Sa norme doit toujours être un multiple entier d'une certaine constante physique $\hbar$ (constante de Planck réduite) : $L = n\hbar$.

- Montrez que μ est alors également quantisé, $\mu = n\mu_B$, et déterminez la constante μ_B ('magnéton de Bohr').

Corrigé

- En partant de la définition du courant $i = dq/dt$, on peut écrire $i = e/T$ avec e la charge de l'électron et T sa période de rotation. La période est donnée par

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad (17)$$

Le courant vaut donc

$$i = \frac{ev}{2\pi r} \quad (18)$$

Le moment magnétique est donné par le produit du courant et de la surface A encerclée par l'orbite de l'électron :

$$\begin{aligned} \mu &= iA \\ &= ir^2\pi \\ &= \frac{evr}{2} \end{aligned}$$

- La définition du moment cinétique est

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (19)$$

avec $\vec{p}$ la quantité de mouvement de l'objet et $\vec{r}$ sa position par rapport à son axe de rotation. Dans notre cas, $\vec{r}$ et $\vec{p}$ sont perpendiculaires et on obtient

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times m\vec{v} \\ L &= mvr \end{aligned}$$

avec m la masse de l'électron.

- On peut exprimer μ en fonction de L pour montrer que si l'un d'entre eux est quantisé, alors l'autre doit l'être aussi :

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{evr}{2} \\
&= \frac{eL}{2m} \\
&= n \frac{e\hbar}{2m}
\end{aligned}$$

On obtient donc une expression pour le quantum du moment magnétique μ_B

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} \approx 9.3 \cdot 10^{-24} \text{ J/T} \quad (20)$$

3. Expérience risquée ? - niveau 2

Pendant la démonstration de la loi de Faraday à sa classe, une professeure bouge une bague en or sur son doigt d'un endroit avec un champ magnétique $B = 0.8 \text{ T}$ vers un endroit à champ nul, en un temps $\Delta t = 45 \text{ ms}$. La bague a un diamètre de 1.5 cm , une résistance $R = 55 \mu\Omega$ et une masse $m = 15 \text{ g}$. La chaleur spécifique de l'or est $c_{Au} = 129 \text{ J/kg}\cdot^\circ\text{C}$. On suppose que l'orientation de la bague est perpendiculaire au champ, tel que le flux à travers elle est maximal.



- Estimez l'énergie thermique produite par le courant induit dans la bague.
- Calculez la hausse de température ΔT de la bague. Pensez-vous que la professeure regrette de l'avoir portée ?

Indication : Utilisez la formule $\Delta U = c \cdot m \cdot \Delta T$, où U est l'énergie interne de l'objet.

Corrigé

- Lorsque la bague est retirée de la zone avec le champ magnétique, la variation du flux entraîne un courant qui va chauffer la bague. On commence donc par calculer la force électromotrice induite dans la bague à l'aide de la loi de Faraday :

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (21)$$

On peut supposer que $\vec{B}$ est uniforme à travers la surface S enfermée par la bague, et que la bague est orientée tel que $\vec{B}$ et $d\vec{S}$ sont parallèles. Ceci permet d'évaluer l'intégrale :

$$\mathcal{E} = -S \frac{\partial B}{\partial t} = -\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \frac{\partial B}{\partial t} \quad (22)$$

Finalement, on peut faire l'approximation que $\frac{\partial B}{\partial t}$ est égal au changement total du champ, divisé par le temps nécessaire pour bouger la bague :

$$\frac{\partial B}{\partial t} \approx \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{B}{\Delta t} \quad (23)$$

La tension induite dans la bague est donc :

$$\mathcal{E} = \frac{\pi d^2 B}{4 \Delta t} \approx 3 \text{ mV} \quad (24)$$

Cette tension va générer un courant à travers la bague, et donc une puissance dissipée. De manière générale, la puissance dissipée à travers une résistance s'écrit :

$$P = VI = \mathcal{E}^2 / R \quad (25)$$

L'énergie thermique générée durant le temps Δt est donnée par :

$$E_{th} \approx P \Delta t = \frac{\pi^2 d^4 B^2}{16 R \Delta t} \approx 8 \text{ mJ} \quad (26)$$

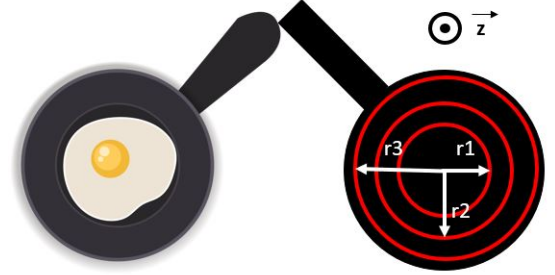
- L'énergie dissipée par effet Joule dans la bague se traduit par une hausse de la température de la bague ΔT , on a donc :

$$\Delta T = \frac{E_{th}}{c_{Au} m} \approx 4.2 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C} \quad (27)$$

Cette hausse de température n'est pas très grande, la professeure ne brûlera pas son doigt.

4. Poêles - niveau 2

On suppose qu'une poêle est chauffée par induction grâce au dispositif suivant. La poêle est immergée dans un champ magnétique B uniforme, perpendiculaire à la poêle, et d'amplitude variable dans le temps, avec $B_z(t) = B_0 \cos(\omega t)$, $B_0 = 0.01$ T et $\omega = 20$ kHz. La surface de la poêle contient 3 fils circulaires en cuivre (resistivité $\rho = 1.68 \times 10^{-8}$ Ohm.m) de rayon de section $a = 0.1$ mm et de rayons de cercles $r = 3$ cm, 6 cm, 9 cm respectivement (voir figure).



- Calculer la f.e.m. induite dans chaque fil.
- Calculer le courant induit dans chaque fil.
- Calculer la puissance moyenne dissipée par chaque fil.

Corrigé

Dans cet exercice, nous devons calculer une f.e.m., un courant et une puissance. La seule différence entre nos 3 fils réside dans leur rayon r . Commençons par calculer le flux magnétique à travers la surface définie par le fil, sachant que $\vec{B}(t) = B_0 \cos(\omega t) \hat{e}_z$:

$$\Phi_B(r, t) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = B_0 \cos(\omega t) \pi r^2$$

- En utilisant cette formule, nous pouvons trouver la f.e.m. de chaque fil :

$$\mathcal{E}(r, t) = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \omega B_0 \pi r^2 \sin(\omega t)$$

Donc l'amplitude de la f.e.m. pour chaque fil vaut : $\mathcal{E}_1 = 0.57$ V, $\mathcal{E}_2 = 2.26$ V et $\mathcal{E}_3 = 5.09$ V.

- Il nous faut maintenant calculer le courant, or nous savons que $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$, avec $R = \rho \frac{L}{S} = \frac{2\pi r \rho}{\pi a^2}$. Donc nous trouvons :

$$I(r, t) = \frac{\pi a^2}{2\pi r \rho} \omega B_0 \pi r^2 \sin(\omega t) = \frac{\pi a^2 \omega B_0}{2\rho} r \sin(\omega t)$$

Donc l'amplitude du courant pour chaque fil vaut : $I_1 = 5.6$ A, $I_2 = 11.2$ A et $I_3 = 16.8$ A.

- La puissance dissipée par le fil dans la plaque à induction se calcule comme $P(r, t) = \frac{\mathcal{E}^2}{R}$. Ainsi nous obtenons :

$$P(r, t) = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{\omega^2 B_0^2 \pi^2 r^4 \sin^2(\omega t)}{2\pi r \rho} \pi a^2 = \frac{\omega^2 B_0^2 \pi^2 a^2}{2\rho} r^3 \sin^2(\omega t).$$

La puissance moyenne est définie par :

$$\langle P \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt$$

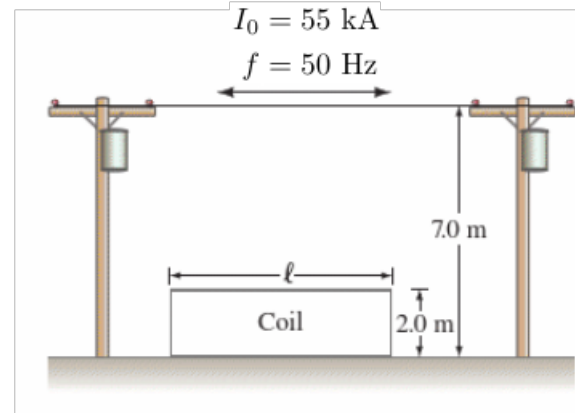
avec $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$. La puissance moyenne vaut donc :

$$\langle P \rangle_t = \frac{\omega^2 B_0^2 \pi^2 a^2 r^3}{4\rho}$$

où l'on a utilisé le fait que $\sin^2(\omega t) = \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2}$. La puissance moyenne dissipée par chaque fil vaut : $\langle P_1 \rangle = 1.59$ W, $\langle P_2 \rangle = 12.69$ W et $\langle P_3 \rangle = 42.8$ W.

5. Il fallait y penser... - niveau 3

Une ligne de transmission électrique est parcourue par un courant sinusoïdal de fréquence $f = 50$ Hz et d'amplitude $I_0 = 55$ kA. La ligne passe à travers les terres d'un paysan, à une hauteur $h = 7$ m du sol. Le paysan a l'idée de placer une bobine rectangulaire sous la ligne et d'utiliser le courant induit pour faire fonctionner une machine qui nécessite une tension sinusoïdale $V_0 = 170$ V à une fréquence de 50 Hz. La bobine aurait une hauteur de 2 m et serait composée de 10 tours.



- Quelle doit être la longueur l de la bobine ?
- Est-il moralement acceptable d'installer un tel dispositif sous une ligne de transmission publique ?

Corrigé

- Le courant alternatif dans les lignes de transmission va générer un champ magnétique variable dans le temps. En plaçant une bobine au-dessous de la ligne, un courant sera induit et pourra être utilisé pour alimenter la machine.

Le champ magnétique créé par la ligne est donné par la loi d'Ampère :

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (28)$$

avec I le courant passant à travers la boucle C .

On s'attend à un champ $\vec{B}$ qui tourne autour de la ligne, on choisit donc la boucle C comme un cercle de rayon r centré sur la ligne. On aura alors $\vec{B}$ parallèle à $d\vec{l}$ sur toute la boucle C . De plus, on voit par symétrie que la norme de $\vec{B}$ doit être constant sur C . Ceci nous permet d'évaluer l'intégrale :

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_C B dl = B(r) \int_C dl = 2\pi r B(r) \quad (29)$$

La loi d'Ampère nous dit que cette intégrale est relié au courant qui passe à travers la boucle C :

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I(t) \quad (30)$$

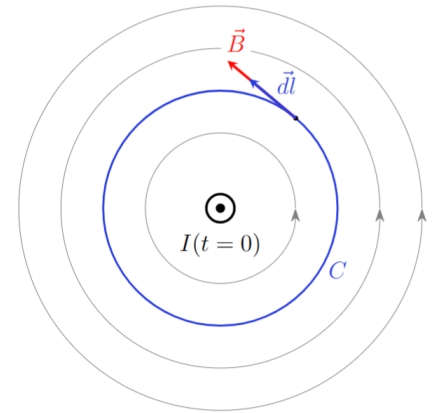
En réécrivant $r = h - z$, on obtient :

$$B(z) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi(h - z)} \quad (31)$$

Puisqu'on connaît la fréquence et l'amplitude du courant sinusoïdal, on peut écrire :

$$I(t) = I_0 \sin(2\pi ft) \quad (32)$$

$$B(z, t) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi(h - z)} \sin(2\pi ft) \quad (33)$$



Ce champ magnétique variable dans le temps induit une tension dans la boucle. On la calcule avec la loi de Faraday :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial B}{\partial t} dS \\
&= -\int_0^l dx \int_0^a \frac{\partial B}{\partial t} dz \\
&= -\mu_0 N I_0 f \cos(2\pi f t) \int_0^l dx \int_0^a \frac{dz}{h-z} \\
&= -\mu_0 N l I_0 f \cos(2\pi f t) \ln\left(\frac{h}{h-a}\right)
\end{aligned}$$

On trouve donc une tension sinusoïdale de fréquence f et d'amplitude V_0 :

$$V_0 = \mu_0 N l I_0 f \ln\left(\frac{h}{h-a}\right) \quad (34)$$

La longueur l de la boucle nécessaire pour faire fonctionner la machine est donc donné par

$$l = \frac{V_0}{\mu_0 N I_0 f \ln\left(\frac{h}{h-a}\right)} \approx 14.6 \text{ m} \quad (35)$$

- b) La question est de savoir si l'énergie récupérée par le paysan provient d'une énergie qui aurait été perdue par la ligne même sans l'installation de la boucle, ou bien si cette boucle est en fait un moyen de 'détourner' le courant qui passe dans la ligne de transmission.

Le courant induit dans la boucle va générer à son tour un champ magnétique variable dans le temps, ce qui induit une force électromotrice dans les lignes de transmission et va baisser la tension dans les lignes. L'énergie récupérée n'est donc pas gratuite, elle provient directement de la puissance transmise dans les lignes. L'installation d'une telle boucle est en fait du vol d'électricité : elle est équivalente au branchement sauvage d'un fil sur le réseau électrique.