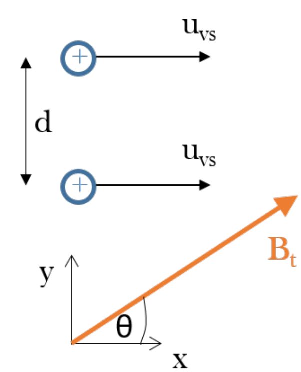
Semestre Automne 2024[1]

Corrigé des exercices - Série 7

Exercice 1 - *niveau 1*

Les aurores boréales observées vers les pôles de la Terre sont crées par des particules chargées provenant du vent solaire. Considérons deux protons qui arrivent vers la Terre avec une vitesse de $u_{vs} = 450$ km s^{-1}, séparés par une distance $d = 6$ mm, comme dans la figure.



a) Trouvez la force magnétique ressentie par le proton supérieur due au proton inférieur.

b) Les protons ressentent aussi le champ magnétique terrestre, $\vec{B}_t = B_x\hat{x}+B_y\hat{y}$, avec $|\vec{B}_t| = 48000$ nT. Le champ est orienté à $\theta = 27°$ par rapport à l'axe x. Trouvez la force magnétique ressentie par le proton supérieur due au champ magnétique de la Terre. Comparez avec la question (a).

Corrigé

a) Pour calculer la force magnétique qu'une charge en mouvement exerce sur une autre, nous pouvons utiliser la loi de Biot-Savart pour trouver le champ magnétique. Le proton inférieur crée un champ magnétique $\vec{B}_p$:

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\vec{u}_{vs}\times\hat{y}}{d^2} = \frac{\mu_0 e u_{vs}}{4\pi d^2}\hat{z} \tag{1}$$

La force magnétique sur le proton supérieur dû au proton inférieur est donc :

$$\vec{F}_p = e\vec{u}_{vs}\times\vec{B}_p = eu_{vs}\frac{\mu_0 e u_{vs}}{4\pi d^2}(\hat{x}\times\hat{z}) = -\frac{\mu_0 e^2 u_{vs}^2}{4\pi d^2}\hat{y} \tag{2}$$

Le calcul numérique nous donne une force de $|F_p| = 1.44\times 10^{-29}$ N. Cette force étant dans la direction $-\hat{y}$, cela représente une force attractive entre les deux protons.

b) La force magnétique dû au champ magnétique de la Terre est :

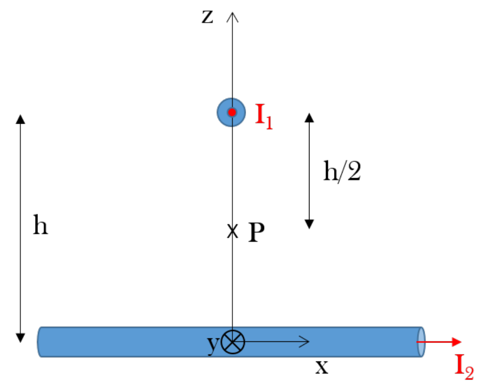
$$\vec{F}_t = eu_{vs}\hat{x}\times(B_x\hat{x}+B_y\hat{y}) = eu_{vs}B_y\hat{z} \tag{3}$$

On peut écrire la composante du champ selon y comme $B_y = |B_t|\sin\theta$, ce qui donne une valeur de la force due au champ terrestre de $|F_t| = 1.57\times 10^{-18}$ N. Ceci est beaucoup plus grand que la force dû à l'autre proton (et dans une autre direction).

1. crédit : Dr. J. Loizu, Prof. A. Fasoli

Exercice 2 - *niveau 2*

Deux câbles infinis de rayon a sont orientés perpendiculairement comme dans la figure. Le câble du haut porte un courant I_1 dans la direction $-\hat{y}$ et le câble du bas porte un courant I_2 dans la direction $\hat{x}$.



a) Trouvez le champ magnétique le long de l'axe z entre $z = a$ et $z = h$ (milieu du câble du haut).

b) Pour $I_1 = 100$ A et $I_2 = 150$ A, et en considérant une distance $h = 2.5$ cm, quel est l'amplitude du champ magnétique au point P ?

c) Décrivez la direction de l'aiguille d'une boussole placée au point P (son angle par rapport à l'axe $\hat{x}$ dans le plan $x - y$). Notez que le champ magnétique de la terre est environ de 5×10^{-5} T.

Corrigé

a) Avec la loi d'Ampère $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ on voit que chaque câble créera son propre champ magnétique. Pour $a < z < h - a$ (l'espace entre les deux câbles), le long de l'axe z, on peut écrire pour le champ magnétique de chaque câble :

$$B_1 2\pi(h - z) = \mu_0 I_1 \tag{4}$$

$$B_2 2\pi z = \mu_0 I_2 \tag{5}$$

Avec la règle de la main droite, on peut aussi dire la direction de chacun de ces champs le long de l'axe z : $\vec{B}_1 = B_1\hat{x}$ et $\vec{B}_2 = -B_2\hat{y}$. Cela nous donne le long de l'axe z un champ total de :

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I_1}{h - z}\hat{x} - \frac{I_2}{z}\hat{y}\right) \tag{6}$$

Pour $h - a < z < h$, donc à l'intérieur du câble 1, nous devons considérer que seulement une partie du courant I_1 doit être pris en compte. L'expression pour $\vec{B}_2$ ne change pas, mais pour le câble supérieur nous avons :

$$B_1 2\pi(h - z) = \mu_0 j_1 \pi (h - z)^2 \tag{7}$$

où $j_1 = I_1/\pi a^2$. Donc le long de l'axe z à l'intérieur du câble supérieur le champ total devient :

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I_1(h - z)}{a^2}\hat{x} - \frac{I_2}{z}\hat{y}\right) \tag{8}$$

b) Le point P se trouve à $z = h/2$, entre les deux câbles, alors le champ magnétique est :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{\pi h}\left(I_1\hat{x} - I_2\hat{y}\right) \tag{9}$$

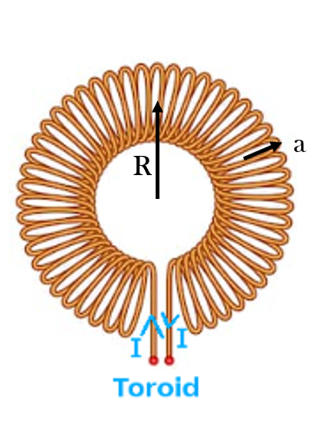
et donc l'amplitude du champ est

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0}{\pi h}\sqrt{I_1^2 + I_2^2} = 2.88 \times 10^{-3}\text{T} \tag{10}$$

c) Le champ magnétique de la Terre est environ 5×10^{-5} T, qui est environ 100 fois moins puissant que le champ dû aux câbles. L'aiguille de la boussole sera donc bien plus sensible au champ dû aux câbles plutôt qu'à celui de la Terre. Au point P, l'aiguille sera orientée avec un angle $\theta = \arctan\left(B_y/B_x\right) = -56°$ par rapport à l'axe x dans le plan $x - y$.

Exercice 3 - *niveau 2*

Considérons un solénoïde en forme de tore, comme dans la figure, avec un rayon majeur R et rayon mineur a. Le solénoïde a N tours d'un fil portant un courant I. Supposons que N est suffisamment grand pour considérer une symétrie cylindrique. Calculez le champ magnétique $\vec{B}$ pour :



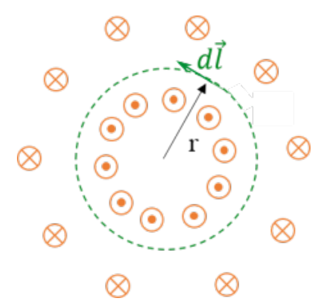
a) $r < R - a$
b) $R - a < r < R + a$
c) $r > R + a$

et dessinez les lignes de champ. Quelle est l'amplitude du champ en $r = R$ si $I = 500$ A, $N = 100$, et $R = 0.5$ m ?

Corrigé

Nous devons commencer par la forme intégrale de la loi d'Ampère,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{int}. \tag{11}$$



où I_{int} est le courant traversant la surface à l'intérieur de la boucle. Grâce à la symétrie cylindrique du tore, nous pouvons dire que $\vec{B} = B(r)\hat{\theta}$. Alors nous allons choisir comme boucle un cercle de rayon r centré sur l'axe du tore. Cela nous donne,

$$B(r) 2\pi r = \mu_0 I_{int}. \tag{12}$$

Pour mieux visualiser quel courant nous devons compter, on peut prendre une tranche horizontale du tore, comme dans la figure (le nombre de boucles a été reduite dans la figure pour simplifier).

a) Pour $r < R - a$, le courant inclu dans la boucle est nul donc $\vec{B} = 0$.

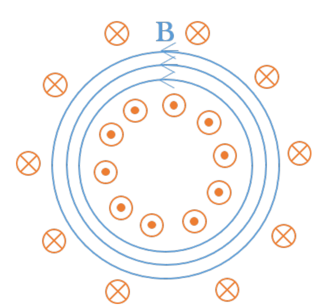
b) Pour $R - a < r < R + a$, la boucle enferme N tours du solénoide, et grâce à la figure, on voit clairement qu'elle entour un courant $I_{int} = NI$,

$$B(r) 2\pi r = \mu_0 IN, \tag{13}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IN}{2\pi r}\hat{\theta} \tag{14}$$

c) Pour $r > R + a$, le courant inclu est encore une fois zéro. Grâce à la figure, on voit clairement que le nombre de fils avec un courant sortant de la feuille est égal au nombre de fils ayant un courant rentrant dans la feuille. On a donc $\vec{B} = 0$.

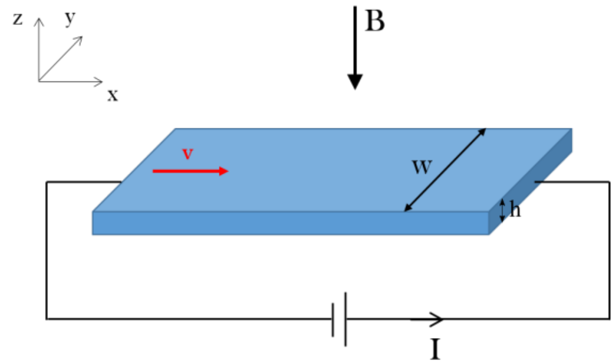
Nous pouvons donc dessiner les lignes de champ comme sur la figure ci-contre. Remarquons que comme le champ décroît avec r, les lignes de champs sont en principe plus denses vers l'intérieur du tore (champ plus intense) et moins dense vers l'extérieur (champ moins intense).



Pour $I = 500$ A, $N = 100$, et $R = 0.5m$, l'amplitude du champ en $r = R$ est $B \approx 0.02$ T.

Exercice 4 : Mesure de champ magnétique par effet Hall - *niveau 2*

Une plaque conductrice de largeur w et d'épaisseur h est traversée par un courant dans le sens $-\hat{x}$. La plaque est placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = -B\hat{z}$ comme indiqué sur la figure. On suppose que le courant est porté par des électrons se déplaçant à une vitesse $\vec{v} = v\hat{x}$.



a) Dans quelle direction les électrons seront-ils déviés ?

La déviation d'électrons polarise la plaque, créant donc une différence de potentiel entre les deux côtés de la plaque, et donc un champ électrique. L'état d'équilibre correspond à la situation où la force sur chaque électron due au champ électrique est égale et opposée à la force sur chaque électron due au champ magnétique. Le champ électrique d'équilibre s'appelle le champ de Hall et est noté E_H.

b) Pour $B = 0.1$ T et $v = 1.3 \times 10^6$ ms^{-1}, calculez la valeur de E_H et trouvez sa direction.

c) Est-ce qu'en mesurant la différence de potentiel entre les deux côtés de la plaque, nous pourrions confirmer que les porteurs de charge dans le conducteur sont bien les électrons et non pas les ions ?

d) On souhaite utiliser ce dispositif pour mesurer un champ magnétique inconnu ; pour cela nous devons mesurer v et E_H. Quel composant pouvons nous ajouter au circuit qui permettrait la mesure de E_H ?

Le coefficient de Hall d'un matériau caractérise sa capacité à produire un champ de Hall ; il dépend de la mobilité des charges et de la conductivité du matériau. Si les charges mobiles du matériau sont uniquement les électrons (ce que l'on considère ici), de densité n, le coefficient de Hall est défini par $R_H = 1/(en)$.

e) Supposons que l'on connaisse R_H pour notre matériau, quel composant pouvons nous ajouter au circuit qui permettrait la mesure de v ?

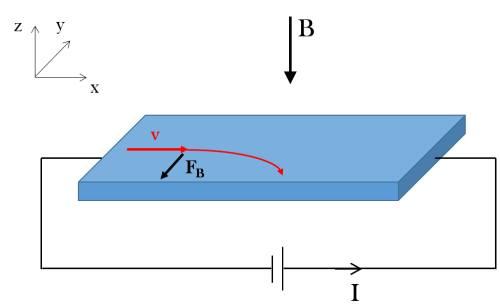
f) Décrivez alors comment nous pourrions déterminer le champ magnétique B en ajoutant des composants au circuit. Quelles sont les limitations de ce système de mesure ?

Corrigé

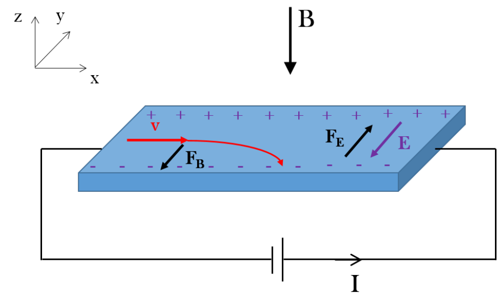
a) Nous pouvons trouver la direction de la déviation avec la loi de Lorentz :

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{15}$$

Un électron ($q = -e$) sera donc soumis à une force dans la direction $-\hat{y}$, ce qui donne une acceleration et donc une déviation de sa trajectoire dans la direction $-\hat{y}$.



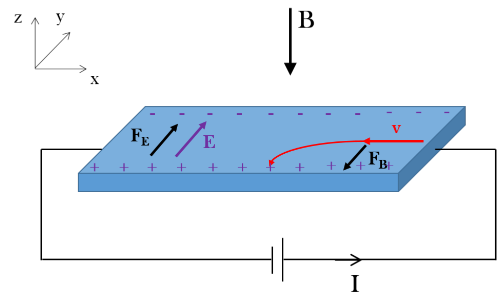
b) À l'équilibre, nous avons $\vec{F}_B + \vec{F}_E = 0$, donc :



$$q\vec{v} \times \vec{B} = -q\vec{E}_H \tag{16}$$

$$\vec{E}_H = vB(\hat{x} \times \hat{z}) = -vB\hat{y} \tag{17}$$

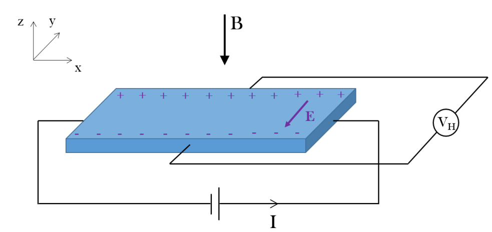
On trouve alors $E_H = 1.3 \times 10^5$ Vm^{-1} dans la direction $-\hat{y}$.



c) La force magnétique dépend de la vitesse du porteur de charge ainsi que de la charge. Si les ions portaient le courant à la place des électrons, comme dans certains semi-conducteurs, la vitesse v serait dans la direction opposée. Et comme la charge des ions a aussi un signe opposé à celle des électrons, la force magnétique résultante serait toujours dans la même direction.

Nous aurions donc une accumulation de charge positive sur le côté où nous avions dans les cas des électrons une accumulation de charges négatives. Le champ électrique sera donc inversé par rapport à la situation d'avant. Donc, en mesurant la différence de potentiel entre les deux plaques, nous trouverions une valeur de signe opposé par rapport au cas où le courant est porté par des électrons, par inversion du champ électrique de Hall.

d) Nous pouvons ajouter un voltmètre autour des côtés de la plaques où nous avons une séparation de charge, comme dans la figure. Nous pouvons alors mesurer V_H, pour en déduire $E_H = V_H/w$.

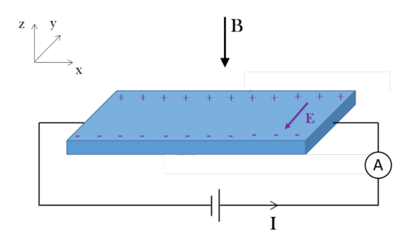


e) Nous pouvons ajouter un ampèremètre au circuit pour mesurer le courant, dont on pourra déduire la vitesse v. En effet le courant total I est donné par la densité de courant j_x fois la surface S de la plaque que le courant traverse :

$$I = j_x S = (-env)hw \tag{18}$$

Si l'on connaît $R_H = 1/ne$ on en déduit la vitesse des électrons :

$$v = -\frac{IR_H}{hw} \tag{19}$$



f) Avec coefficient de Hall R_H de notre matériau, la mesure de la différence de potentiel V_H et du courant I, nous pourrions calculer l'amplitude du champ dans la direction $\hat{z}$ avec :

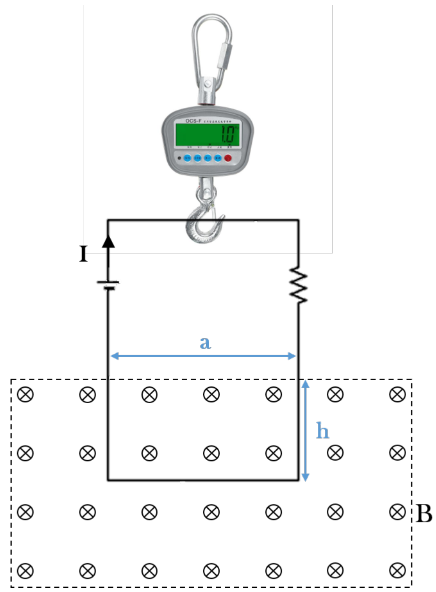
$$B_z = \frac{-E_H}{v} = \frac{-V_H}{wv} = \frac{hV_H}{IR_H} \tag{20}$$

Attention, ceci mesurera seulement la composante du champ dans la direction $\hat{z}$, car l'équation nous donne la composante du champ perpendiculaire à la vitesse des électrons *et* perpendiculaire au champ électrique. Donc, si le champ magnétique est incliné par rapport à l'axe $\hat{z}$, cette mesure ne nous donne accès qu'à une partie du champ, et pas au champ total.

Exercice 5 - *niveau 2*

Un circuit pend verticalement sur le crochet d'une balance comme dans la figure. La balance est calibrée pour mesurer zéro avec le circuit pendu en absence de champ magnétique (on soustrait le poids du circuit). Le circuit, composé d'une pile de 1 V et d'une résistance de 0.5 Ω, est partiellement suspendu dans un champ magnétique perpendiculaire à la feuille, avec la partie du haut hors du champ. Le circuit a une largeur de $a = 0.1$ m, et une longueur de $h = 0.07$ m est suspendu dans le champ.

Si la balance mesure un "poids" de 3.5 g, quelle est l'amplitude du champ magnétique ?



Corrigé

Pour la force magnétique nous avons :

$$\vec{F}_B = I \oint \vec{dl} \times \vec{B}, \tag{21}$$

où $\vec{dl}$ est le chemin parcouru par I. Nous devons alors considérer trois parties séparées :

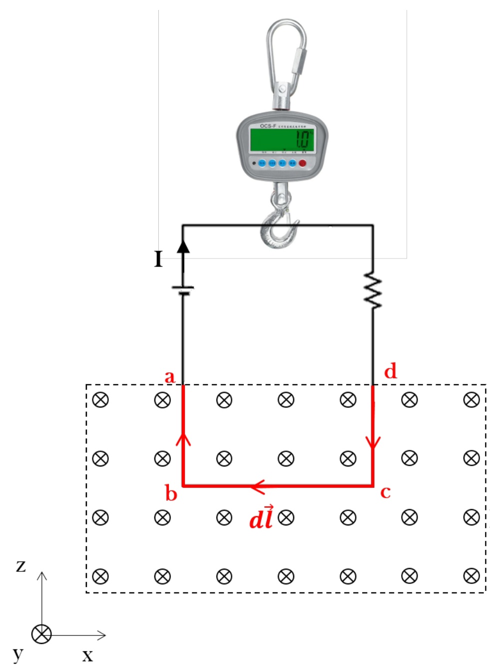
$$\vec{F}_B = I \left(\int_{ab} (\vec{dl} \times \vec{B}) + \int_{bc} (\vec{dl} \times \vec{B}) + \int_{cd} (\vec{dl} \times \vec{B}) \right) \tag{22}$$

Puis, selon la figure :

$$\vec{F}_B = IB \left(h(\hat{z} \times \hat{y}) - a(\hat{x} \times \hat{y}) - h(\hat{z} \times \hat{y}) \right) \tag{23}$$

On voit donc que les parties selon z s'annulent et on a seulement :

$$\vec{F}_B = -IBa\hat{z} = -mg\hat{z} \tag{24}$$



À l'équilibre, la force magnétique est égale à la tension s'exerçant sur la balance, qui mesure une force d'amplitude mg. On a donc $|\vec{F}_B| = mg$. De plus, nous pouvons déduire le courant simplement grâce à la loi d'Ohm, $I = V/R = 2$ A. On trouve donc le résultat :

$$B = \frac{mgR}{aV} = 0.17 \text{ T} \tag{25}$$