Semestre Automne 2024[1]

Corrigé des exercices - Série 4

Exercice 1

Un morceau d'une feuille d'aluminium est posé sur la plaque inférieure de deux plaques horizontales et parallèles d'un condensateur plan. Si vous appliquez une différence de potentiel entre ces deux plaques (par exemple pôle négatif sur la plaque supérieure, pôle positif sur la inférieure), un champ électrique est généré entre les deux plaques. Ce champ génère une force de Coulomb sur l'aluminium, orientée vers le haut, donc qui s'oppose à la force de gravité. Si le potentiel appliqué est tel que la force électrostatique égalise la force de gravité, le morceau d'aluminium commence à léviter. Montrez que le potentiel V qui vérifie cette condition est donné par :

$$V^2 = \frac{2\rho g d^2 h}{\epsilon_0} \tag{1}$$

avec ϵ_0 la permittivité électrique du vide, ρ la densité de l'aluminium, h l'épaisseur de la feuille d'aluminium, g l'accélération de gravité, et d la distance entre les deux plaques.

Corrigé

Comme indiqué dans l'énoncé, la condition de lévitation de l'aluminium correspond à l'équilibre entre la force électrostatique ($\vec{F}_{C\to alu}$, vers le haut) et la force de gravité ($\vec{F}_{g\to alu}$, vers le bas) qui s'excercent sur la feuille d'aluminium : $\vec{F}_{C\to alu} + \vec{F}_{g\to alu} = 0$. On peut aussi diviser cette équation par la surface de la feuille d'aluminium, et écrire l'équilibre entre des forces par unité de surface : $\vec{f}_{C\to alu} + \vec{f}_{g\to alu} = 0$.

La force de Coulomb totale sur la plaque inférieure est donnée par :

$$\vec{F}_{C-inf} = Q_{inf}\vec{E}_{sup} \tag{2}$$

où $\vec{E}_{sup}$ est le champ électrique du aux charges sur la plaque supérieure, et avec $Q_{inf} = Q$ et $Q_{sup} = -Q$ en notant Q le nombre de charges déplacées d'une plaque à l'autre par la mise sous tension. Nous pouvons calculer $\vec{E}_{sup}$ en utilisant la loi de Gauss pour estimer le champ électrique generé par une surface A avec une charge par unité de surface uniforme $\sigma = \frac{Q_{sup}}{A} = -\frac{Q}{A}$. Cette approximation est justifiée par le fait que la distance entre les deux plaques est très petite par rapport au diamètre de chaque plaque. Le champ électrique generé par la plaque supérieure, dans l'espace entre les deux plaques, a une intensité constante donnée par la loi de Gauss (notez qu'en appliquant la loi de Gauss pour trouver ce champ, la normale à la surface entre les plaques est orienté vers le bas, selon $-\vec{e}_z$) :

$$\vec{E}_{sup} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(-\vec{e}_z) = \frac{Q}{2\epsilon_0 A}\vec{e}_z \tag{3}$$

1. crédit : Dr. J. Loizu, Prof. A. Fasoli

Veuillez noter que le champ électrique total entre les deux plaques est le double de cette valeur, mais le morceau d'aluminium fait partie de la plaque chargée inférieure, est donc elle ne peux pas exercer une force sur elle même. La force totale sur la plaque inférieure est :

$$\vec{F}_{C-inf} = Q_{inf}\vec{E}_{sup} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A}\vec{e}_z \tag{4}$$

Pour un condensateur, la charge sur ses plaques est donnée par la différence de potentiel V entre les plaques et par sa capacité C, qui est determinée par sa géométrie $Q = CV$. Nous pouvons donc écrire la norme de la force électrostatique comme :

$$|\vec{F}_{C-inf}| = \frac{(CV)^2}{2\epsilon_0 A} \tag{5}$$

En utilisant l'approximation d'un condensateur plan infini avec plaques parallèles à une distance d, nous pouvons écrire la capacité :

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad \Rightarrow \quad |\vec{F}_{C-inf}| = \frac{(\epsilon_0 A/d)^2 V^2}{2\epsilon_0 A} = \frac{\epsilon_0 A V^2}{2d^2} \tag{6}$$

La force par unité de surface $\vec{f}_{C-inf}$ qui agit sur la plaque inférieure est :

$$\vec{f}_{C-inf} = \frac{\vec{F}_{C-inf}}{A} = \frac{\epsilon_0 V^2}{2d^2}\vec{e}_z \tag{7}$$

qui correspond aussi à la force par unité de surface $\vec{f}_{C\to alu}$ qui agit sur le morceau d'aluminium, celui-ci étant une partie de la plaque inférieure du point de vu électrostatique. Donc :

$$\boxed{\vec{f}_{C\to alu} = \frac{\epsilon_0 V^2}{2d^2}\vec{e}_z} \tag{8}$$

La force de gravité qui s'excerce sur le morceau d'aluminium de surface A_{alu}, densité ρ et épaisseur h est :

$$\vec{F}_{g\to alu} = m\vec{g} = -\rho h A_{alu} g\vec{e}_z \tag{9}$$

Donc la force de gravité sur la feuille d'aluminium, par unité de surface, s'écrit :

$$\boxed{\vec{f}_{g\to alu} = -\rho h g\vec{e}_z} \tag{10}$$

Le morceau d'aluminium commence léviter quand la force électrostatique par unité de surface équilibre la force de gravité par unité de surface :

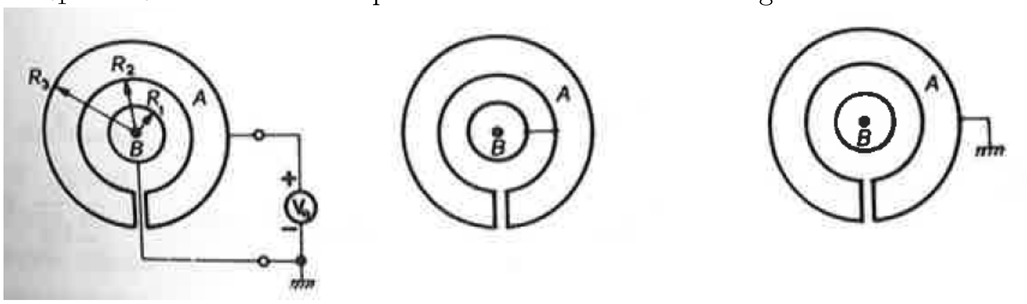
$$\vec{f}_{C\to alu} = -\vec{f}_{g\to alu} \quad \Rightarrow \quad \frac{\epsilon_0 V^2}{2d^2} = \rho h g \tag{11}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\boxed{V^2 = \frac{2\rho g d^2 h}{\epsilon_0}} \tag{12}$$

Exercice 2

Une sphère conductrice de rayon $R_2 = 40$ cm et $R_3 = 60$ cm, contient une sphère conductrice B concentrique, de rayon $R_1 = 20$ cm. Les deux sphères sont connectées à un générateur de tension $V_0 = 900$ V.



a) Déterminez la valeur et le signe des charges q_1, q_2, et q_3 qui se trouvent sur les trois surfaces.

A un certain moment, le générateur est débranché.

b) Calculez la variation d'énergie electrostatique dans le cas ou les deux sphères vont être connectées entre eux.

c) Calculez la variation d'énergie electrostatique dans le cas ou la sphère A est connectée à la Terre.

Indications : La capacité condensateur sphèrique est donnée par :

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \tag{13}$$

Corrigé

a) Avec la première connection, la sphère B a un potentiel fixé à zero, et la sphère A a un potentiel V_0. Sur la surface de rayon R_3, il y aura :

$$V_0 = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_3} \quad \Rightarrow \quad q_3 = 4\pi\varepsilon_0 R_3 V_0 \simeq 6 \times 10^{-8}\,\mathrm{C} > 0 \tag{14}$$

Les deux sphères composent un condensateur sphérique, avec une charge donneé par :

$$q = CV_0 = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} V_0 \simeq 4 \times 10^{-8}\,\mathrm{C} \tag{15}$$

Nous avons donc :

$$q_2 = +q \simeq 4 \times 10^{-8}\,\mathrm{C} \qquad q_1 = -q \simeq -4 \times 10^{-8}\,\mathrm{C} \tag{16}$$

L'énergie electrostatique totale du système est donné par la somme de l'énergie électrostatique du condensateur W_{int} (donc aux charges q_1 et q_2), et celle du à la charge q_3 (W_{ext}), liée à la capacité de la sphère de rayon R_3, $C' = \frac{q_3}{V_0}$.

$$W_{tot} = W_{int} + W_{ext} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}\frac{q_3^2}{C'} \simeq 4.5 \times 10^{-5}\,\mathrm{J} \tag{17}$$

b) Quand les deux sphères sont connectées entre eux (après avoir déchargé le générateur), les charges q_1 et q_2 se neutralisent. Donc W_{int} est perdue :

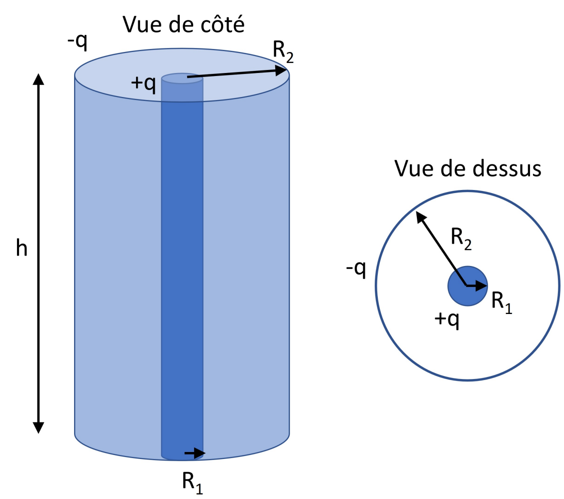
$$\Delta W = -W_{int} = -1.8 \times 10^{-5}\,\mathrm{J} \tag{18}$$

c) Si plutot la sphére A est connecté à la Terre, la charge q_3 est perdue, donc l'energie W_{ext} est perdue :

$$\Delta W = -W_{ext} = -2.7 \times 10^{-5}\,\mathrm{J} \tag{19}$$

Exercice 3

Le transfert de données informatiques à haut débit peut etre effectué à l'aide de câbles coaxiaux. Un câble coaxial de longueur h est composé d'un cylindre conducteur de rayon R_1 entouré par un autre cylindre creux de rayon R_2, séparés par un diélectrique, comme dans la figure. Nous considérons ici des câbles coaxiaux avec de l'air comme diélectrique. L'un des avantages de ce type de câble est de réduire le bruit électrique provenant de l'environnement du câble et pouvant affecter la mesure : le cylindre externe agit comme un bouclier Faraday qui protège le conducteur interne transmettant l'information. En revanche cette forme de câble agit comme un condensateur cylindrique. Une haute capacité peut alors causer une perte d'une partie du signal (les hautes fréquences) au cours de sa transmission le long du câble, endommageant l'intégrité du signal global transmis. Il est donc important que la capacité soit basse.



a) Trouvez une expression pour la capacité par unité de longueur d'un tel câble coaxial ($h \gg R_2$).

b) Un fabricant de câbles coaxiaux vous propose deux câbles pour votre connection à haut débit. Le premier câble a les dimensions $R_1 = 0.25$ mm et $R_2 = 0.76$ mm. Le deuxième câble a les dimensions $R_1 = 0.08$ mm et $R_2 = 1.20$ mm. Lequel choisiriez-vous ?

Corrigé

a) Pour un condensateur avec une charge q et une différence de potentiel ΔV, la capacité est :

$$C = \frac{q}{\Delta V} \tag{20}$$

Nous devons donc trouver une expression pour la différence de potentiel entre les deux cylindres. Nous partons de la loi de Gauss :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \tag{21}$$

On considère une surface Gaussienne cylindrique entre les deux plaques, donc $Q_{int} = q$ et $dS = 2\pi r dy$ (entre $y = 0$ et $y = h$). Par symmétrie du problème, $\vec{E}$ ne dépend que de r donc $\vec{E} = \vec{E}(r)$, et est orienté selon $\vec{e}_r$: on peut donc écrire $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$. La loi de Gauss donne finalement :

$$E(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r h} \tag{22}$$

La différence de potentiel (entre la surface chargée négativement et la surface chargée positivement) est ensuite donnée par :

$$\Delta V_-^+ = V_1 - V_2 = -\int_{R_2}^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{2\pi\epsilon_0 h} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \tag{23}$$

On trouve donc la capacité par unité de longueur :

$$\frac{C}{h} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)} \tag{24}$$

b) Utilisant l'expression trouvé en a), la capacité par unité de longueur du premier câble est 5.00×10^{-11} F, et celle du deuxième câble est 2.05×10^{-11} F. Le deuxième câble est donc plus adapté pour un système d'imagerie diagnostique.

Exercice 4

Lors d'un orage, la différence de potentiel entre la Terre et les nuages peut atteindre 3.5×10^7 V. On considère des nuages à une hauteur de 1.5 km et couvrant une surface de 110 km^2. Dans ces circonstances, on peut modeler le système Terre-nuages comme un condensateur plan.

a) Calculez la capacité de ce système ($K_{air} = 1$).

b) Calculez la charge stockée dans chaque 'plaque' de ce système.

c) Calculez l'énergie stockée dans ce 'condensateur'.

d) Un éclair durant 0.2 s est intercepté par un paratonnerre. Supposant que la totalité de l'énergie stockée dans ce système est liberée par l'éclair, calculez la puissance moyenne reçue par le paratonnerre.

Corrigé

a) Pour un condensateur plan, la capacité est donné par

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \tag{25}$$

car nous prenons $K = 1$. Utilisant les données de la question on trouve :

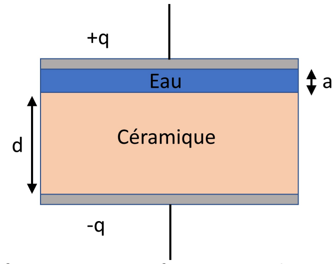
$$C = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 110 \times 10^6}{1.5 \times 10^3} = 6.49 \times 10^{-7} \text{ F} \tag{26}$$

b) La charge d'un condensateur est $Q = C\Delta V$, on a donc $Q = 22.7$ C.

c) L'énergie stockée dans un condensateur est $E_{cond} = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2 = 3.98 \times 10^8$ J.

d) En supposant que la totalité de l'énergie stockée dans le condensateur est libérée durant l'éclair, la puissance moyenne est $P = E_{cond}/\Delta t = 1.99 \times 10^9$ W ≈ 2 GW. Cela correspond à l'ordre de grandeur de la puissance génerée par une centrale électrique.

Exercice 5



Un fabricant de condensateurs a détecté un défaut de fabrication à un endroit où le diélectrique n'est pas suffisamment compact. De ce fait, de l'humidité s'est introduite entre le diélectrique et l'une des plaques du condensateur, comme sur la figure. On désire évaluer l'effet de ce défaut.

a) En utilisant la loi de Gauss, exprimez la capacité de ce condensateur défectueux en fonction des constantes diélectriques des deux matériaux K_{eau} et $K_{ceramique}$, de leurs épaisseurs respectives a et d et de la surface du condensateur S.

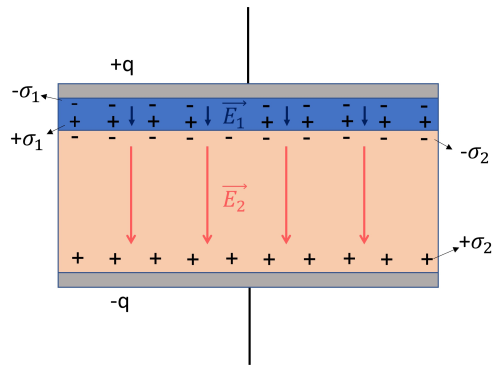
b) Montrez que l'on trouve la même expression en considérant un circuit équivalent à ce condensateur composite.

c) Calculez la capacité d'un condensateur de surface $S = 0.25$ cm^2 avec une couche d'eau d'épaisseur $a = 0.05$ μm et un diélectrique en céramique d'épaisseur $d = 1$ μm. La constante diélectrique de l'eau est $K_{eau} = 78.4$ et celle de la céramique est $K_{ceramique} = 21$. Ce défaut va-t-il augmenter ou diminuer la capacité du condensateur ?

Corrigé

a) Il y a un champ électrique entre les deux plaques du condensateur qui polarise les diélectriques, comme dans la figure.

On peut décrire ces polarisations par leurs densités de charge de surface, σ_1 et σ_2,



$$\sigma_1 = \chi_{eau}\epsilon_0 E_1 = (K_{eau} - 1)\epsilon_0 E_1; \tag{27}$$

$$\sigma_2 = \chi_{ceramique}\epsilon_0 E_2 = (K_{ceramique} - 1)\epsilon_0 E_2. \tag{28}$$

Maintenant qu'on a des expressions pour les charges de chaque côté des plaques (car les plaques sont chargées $\pm q$), on peut trouver le champ électrique dans chaque diélectrique, E_1 et E_2. Souvenez-vous que le champ électrique dans un conducteur est nul.

On applique la loi de Gauss à une surface autour de la plaque supérieure,

$$E_1 S = \frac{q - \sigma_1 S}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0} - (K_{eau} - 1)E_1 S. \tag{29}$$

Cela nous donne,

$$E_1 = \frac{q}{SK_{eau}\epsilon_0}. \tag{30}$$

De la même manière pour la surface autour de la plaque inférieure,

$$E_2 = \frac{q}{SK_{ceramique}\epsilon_0}. \tag{31}$$

La différence de potentiel entre les deux plaques est donc,

$$\Delta V = E_1 a + E_2 d = \frac{q}{S\epsilon_0}(\frac{a}{K_{eau}} + \frac{d}{K_{ceramique}}). \tag{32}$$

Puis, la capacité est,

$$C = \frac{q}{\Delta V} = S\epsilon_0 \left(\frac{a}{K_{eau}} + \frac{d}{K_{ceramique}}\right)^{-1} \tag{33}$$

b) On peut considérer le condensateur défectueux comme deux condensateurs connectés en série, un avec un diélectrique d'eau et l'autre avec un diélectrique de céramique. Alors, nous pouvons écrire la capacité du condensateur défectueux, C, comme,

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_{eau}} + \frac{1}{C_{ceramique}}. \tag{34}$$

Pour un condensateur plan, la capacité est $C = K\epsilon_0 S/d$,

$$\frac{1}{C} = \frac{a}{K_{eau}\epsilon_0 S} + \frac{d}{K_{ceramique}\epsilon_0 S}. \tag{35}$$

On trouve donc,

$$C = S\epsilon_0 \left(\frac{a}{K_{eau}} + \frac{d}{K_{ceramique}}\right)^{-1}, \tag{36}$$

ce qui est bien la même réponse que pour la partie a).

c) Pour le condensateur défectueux, utilisant les données de la question, on trouve $C = 4.58 \times 10^{-9}$ F. Le condensateur fabriqué correctement aurait une épaisseur de céramique de $d + a$, et donc l'eau ne pourrait pas entrer dans l'écart. La capacité serait donc,

$$C = S\epsilon_0 \frac{K_{ceramique}}{d + a} = 4.43 \times 10^{-9} \text{ F}. \tag{37}$$

Le défaut a en effet augmenté la capacité du condensateur. Ceci vient du fait que l'eau a une constante diélectrique plus haute que celle du céramique. Par contre, en réalité, l'eau n'est pas un diélectrique efficace pour les condensateurs. L'eau est un solvant universel, alors eventuellement l'eau dissoudra le métal des plaques du condensateur, créant une solutions d'ions métallique. Cela créera un chemin conducteur et donc ce ne sera plus un diélectrique, et l'ensemble n'agirait plus comme un condensateur.