Semestre Automne 2024[1]

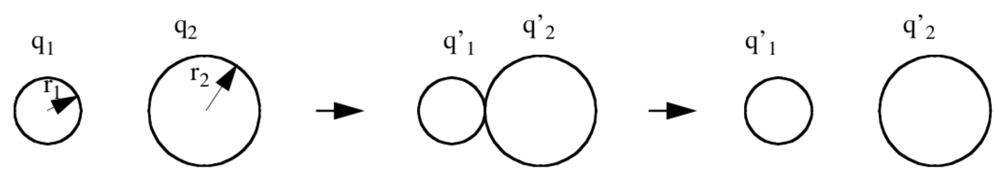
Corrigé des exercices - Série 3

Exercice 1

Deux sphères conductrices de rayon 0.1 cm et 0.15 cm portent les charges de 10^{-7} C et $2 \cdot 10^{-7}$ C respectivement. On les met en contact, puis on les sépare. Calculez la charge sur chaque sphère après la séparation.

Corrigé

A l'équilibre, deux corps conducteurs mis en contact vont voir leurs potentiels respectifs s'égaliser. Une différence de potentiel entraînerait forcément une génération de courant, qui tendrait à équilibrer les potentiels. Donc, lorsque les deux sphères sont mises en contact, les charges vont se déplacer de manière à ce que les potentiels à la surface des deux sphères soient égaux. On a donc $V_1' = V_2'$.



Comme rappel, on a vu en cours que le champ électrique et le potentiel créés par une sphère à $r > R$, sont respectivement donné par :

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{e}_r \tag{1}$$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{2}$$

Ici on a $V_1' = V_2'$, ce qui implique que :

$$\frac{q_1'}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{q_2'}{4\pi\epsilon_0 r_2} \implies \frac{q_1'}{r_1} = \frac{q_2'}{r_2} \tag{3}$$

Un principe très important en électrostatique est celui de la conservation de charges dans un système isolé. Sans l'ajout de charges, on doit donc avoir la même charge totale dans le système avant et après les contact entre les deux sphères :

$$Q_{avant} = Q_{après} \implies q_1 + q_2 = q_1' + q_2' \tag{4}$$

En combinant les équations (3) et (4), on trouve finalement :

$$q_1' = \frac{q_1 + q_2}{1 + r_2/r_1} \qquad\qquad q_2' = \frac{q_1 + q_2}{1 + r_1/r_2} \tag{5}$$

Application numérique : $q_1' = 1.2 \cdot 10^{-7}$ C et $q_2' = 1.8 \cdot 10^{-7}$ C

1. crédit : Dr. J. Loizu, Prof. A. Fasoli

Exercice 2

On considère un modèle simple de l'atome d'hydrogène : le noyau est une charge $+e$ distribuée uniformément dans une sphère de rayon $r_p = 10^{-15}$ m, et l'électron est une charge $-e$ distribuée uniformément dans le reste de l'atome, une sphère de rayon $r_a = 10^{-10}$ m.

a) Trouvez la densité de charge du noyau et du nuage électronique.

b) Trouvez le champ électrique $\vec{E}$ en tout point. Evaluez $\vec{E}$ à la surface du noyau.

c) Dans quelle direction bougerait une charge test $+Q$ placée en $r < r_p$? Et en $r_p < r < r_a$?

d) Trouvez le potentiel V en tout point. En particulier, que vaut $V(r = 0)$ et $V(r = r_p)$?

Corrigé

a) On utilise la définition de la densité de charge $\rho = Q/V$:

$$\rho_{noyau} = \frac{e}{V_{noyau}} = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi r_p^3} \simeq 3.8 \cdot 10^{25} \text{ C/m}^3 \tag{6}$$

$$\rho_{nuage} = \frac{-e}{V_{nuage}} = \frac{-e}{\frac{4}{3}\pi\left(r_a^3 - r_p^3\right)} \simeq -3.8 \cdot 10^{10} \text{ C/m}^3 \tag{7}$$

b) Pour trouver le champ électrique on utilise la loi de Gauss. On traitera séparément les régions $r \leq r_p$ (noyau), $r_p \leq r \leq r_a$ (nuage électronique) et $r \geq r_a$ (extérieur de l'atome).

- $r \leq r_p$: Prenons une surface de Gauss sphérique, de rayon r, et appliquons la loi de Gauss

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q(r)}{\epsilon_0} \tag{8}$$

Par symétrie, on sait que $\vec{E}$ doit avoir la forme $\vec{E} = E_r(r)\hat{r}$. Le champ électrique doit donc être constant sur la surface S. On peut alors écrire

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) \cdot 4\pi r^2 \tag{9}$$

avec $4\pi r^2$ la surface de S. La loi de Gauss nous dit alors que

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q(r)}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{noyau}}{\epsilon_0} V(r) = \frac{er^3}{\epsilon_0 r_p^3} \tag{10}$$

avec $V(r)$ le volume enfermé par la surface S et $Q(r)$ la charge totale contenue dans ce volume. On trouve finalement :

$$\boxed{E(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{r_p^3}} \tag{11}$$

- $r_p \leq r \leq r_a$: On utilise la même méthode, avec

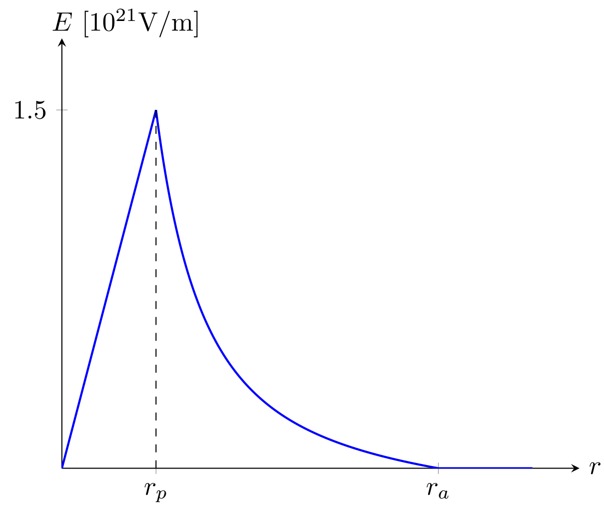
$$Q(r) = e + \rho_{nuage}\left(V(r) - V_{noyau}\right) = e\left(1 - \frac{r^3 - r_p^3}{r_a^3 - r_p^3}\right) \tag{12}$$

Le champ électrique est donc donné par

$$E(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left(1 - \frac{r^3 - r_p^3}{r_a^3 - r_p^3}\right) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0\left(r_a^3 - r_p^3\right)}\left(\frac{r_a^3}{r^2} - r\right) \tag{13}$$

On peut vérifier qu'on trouve le même champ électrique en $r = r_p$ que dans le cas précédent.

- $r \geq r_a$: $\vec{E} = 0$ puisque $Q_{tot} = 0$. Et en effet, le résultat précédent donne $E(r_a) = 0$.



Il ne reste plus qu'à évaluer le champ $\vec{E}$ en $r = r_p$:

$$E(r_p) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r_p^2} \simeq 1.5 \cdot 10^{21}\ \mathrm{V/m} \tag{14}$$

c) On peut constater que $E(r) \geq 0\ \forall\, r$. Une charge positive $+Q$ sera donc toujours expulsée de l'atome.

d) Pour calculer le potentiel électrique généré par l'atome, on utilise la formule suivante :

$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl} \tag{15}$$

En pratique on prend souvent le point A à l'infini, avec la convention $V(\infty) = 0$: le potentiel électrique est nul quand on se trouve infiniment loin de toutes les charges. On a alors

$$V(r) - V(+\infty) = -\int_{+\infty}^{r} \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_{r}^{+\infty} \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_{r}^{+\infty} E dr \tag{16}$$

Comme $V(+\infty) = 0$ et $E(r \geq r_a) = 0$, on a

$$V(r) = \int_r^{r_a} E(r)dr \quad r < r_a$$

$$V(r) = 0 \qquad\qquad r > r_a$$

- $r_p \leq r \leq r_a$:

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 \left(r_a^3 - r_p^3\right)} \int_r^{r_a} \left(\frac{r_a^3}{r^2} - r\right) dr \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 \left(r_a^3 - r_p^3\right)} \left[-\frac{r_a^3}{r} - \frac{r^2}{2}\right]_r^{r_a} \\ \implies V(r) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 \left(r_a^3 - r_p^3\right)} \left[\frac{r_a^3}{r} + \frac{r^2}{2} - \frac{3}{2} r_a^2\right] \end{aligned}$$

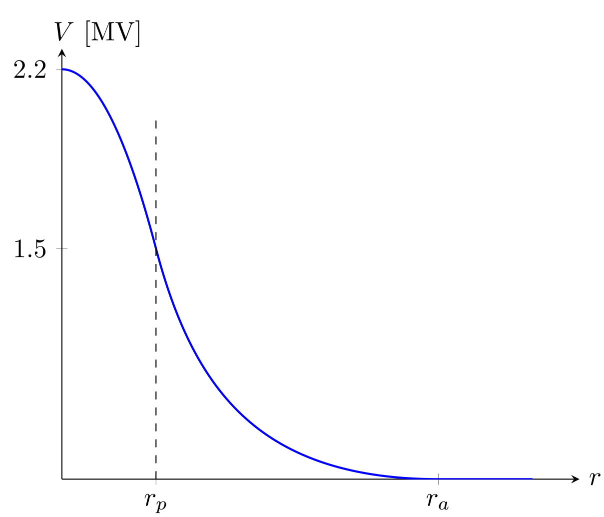
En particulier, on trouve $V(r_p) \simeq 1.5$ MV. On peut aussi vérifier que $V(r_a) = 0$ comme prévu.

- $r \leq r_p$:

$$V(r) = \int_r^{r_p} E(r)dr + \int_{r_p}^{r_a} E(r)dr = \int_r^{r_p} \frac{er}{4\pi\epsilon_0 r_p^3} dr + V(r_p) \tag{17}$$

$$\implies V(r) = V(r_p) + \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{2r_p} - \frac{r^2}{2r_p^3}\right) \tag{18}$$

et $V(0) = V(r_p) + \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2r_p} \simeq 2.2$ MV.



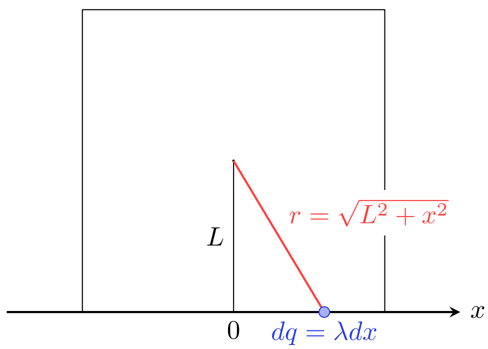
Exercice 3

On désire créer une configuration électrostatique dans laquelle une particule chargée serait piégée. Pour cela, on construit un carré de côtés $2L$ formé par des fils chargés avec une densité de charge linéaire $\lambda = 2 \cdot 10^{-10}$ C/m. Trouvez le potentiel électrique V au centre du carré. Quelles charges (positives ou négatives) peuvent être piégées avec cette configuration ?

L'intégrale suivant peut être utile :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln|\sqrt{1+x^2}+x| \tag{19}$$

Corrigé



Le potentiel V créé par chaque côté du carré peut être trouvé par intégration des potentiels élémentaires dV correspondant à la charge élémentaire $dq = \lambda dx$:

$$\begin{aligned} V = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} &= \int_{-L}^{L} \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0\sqrt{L^2+x^2}} = \int_{-1}^{1} \frac{\lambda dy}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1+y^2}} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(\sqrt{1+y^2}+y\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) \\ &= 1.763 \cdot \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \end{aligned}$$

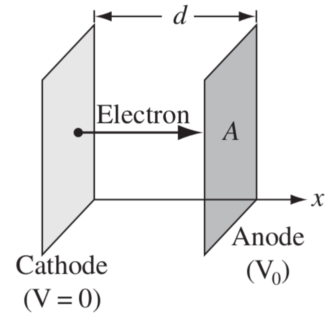
Où $\sqrt{L^2+x^2}$ est la distance entre la charge élémentaire et le centre du carré et nous avons utilisé le changement de variable $y = x/L$. Le potentiel total est la somme des potentiels créés par chaque côté du carré, et par symétrie ils sont tous indentiques, donc $V_{tot} = 4 \cdot V = 1.763\frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \approx 12.67$ V.

Le potentiel au centre est un minimum car le potentiel V augmente en s'approchant d'un côté du carré. Ceci représente un puit de potentiel pour une charge positive qui sera donc piégée dans le carrée. Une charge négative aura tendance à s'éloigner du centre, attirée par les côtés du carré. On note que ces conclusions sont valable dans le plan 2D. Pour qu'une charge soit piégée en trois dimensions, il faudrait une cage sous forme de cube.

Remarque : le potentiel ne dépend pas de la longueur L du carré. Ceci peut être compris de la façon suivante : si on double la longueur L alors on double la charge totale du carré, par contre chaque charge dq se trouvera à une distance r deux fois plus grande par rapport au centre. Puisque le potentiel créé est proportionnel à dq/r, les deux effets se compensent exactement.

Exercice 4

Dans une diode à vide, des électrons sont émis par une cathode chauffée à haute température et maintenue à un potentiel nul. Ces électrons sont accélérés à travers le vide vers l'anode, maintenue à un potentiel V_0 positif. À l'équilibre, le courant I traversant l'espace entre l'anode et la cathode devient constant.



On suppose que les plaques de surface A sont larges par rapport à la distance d entre elles ($A \gg d^2$) ce qui permet de négliger les effets de bord. On considère alors que le potentiel V, la densité de charge ρ et la vitesse des électrons v ne dépendent que de la position x.

a) Si on suppose que les électrons sont émis à vitesse nulle par la cathode, quelle est leur vitesse en x, où le potentiel est $V(x)$? Raisonner en utilisant la conservation de l'énergie.

b) En régime stationnaire, le courant I est indépendant de x. Quelle est alors la relation entre $\rho(x)$ et $v(x)$?

Indication : Le courant électrique I est défini comme la charge par unité de temps qui traverse une surface donnée. On peut l'écrire comme $I = \frac{dq}{dt}$.

c) Ecrire l'équation de Poisson pour la région entre les deux plaques. Utilisez les résultats précédants pour l'écrire comme une équation differentielle qui ne contient que $V(x)$.

d) En résolvant l'équation de Poisson, on trouve que $V(x) = V_0 \left(\frac{x}{d}\right)^{\frac{4}{3}}$. Montrer que le champ électrique s'annule sur la cathode.
Cette annulation du champ électrique sur la cathode est due à un nuage d'électrons (appelée charge d'espace) qui se forme à proximité de la cathode.

e) Question défi (bonus) : résoudre l'équation de Poisson et trouver le résultat indiqué au point d).

Indication : $\frac{d}{dx}\left[f^a(x)\right] = a f^{a-1} \frac{df}{dx}$

Corrigé

a) Les électrons sont accélérés par la différence de potentiel entre les plaques. La conservation de l'énergie implique que l'énergie cinétique gagnée par les électrons provient de l'énergie potentielle qu'elles perdent :

$$\frac{mv^2(x)}{2} = eV(x) \tag{20}$$

En réarrangeant cette équation, on trouve

$$v(x) = \sqrt{\frac{2eV(x)}{m}} \tag{21}$$

b) On part de la définition du courant $I = \frac{dq}{dt}$. La charge dq passant à travers une surface A en un temps dt peut s'écrire comme

$$dq = \rho A v dt \implies I = \rho A v \tag{22}$$

Une approche équivalente serait d'écrire (ici dV correspond à un volume, ne pas confondre avec le potentiel) :

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{dV} \cdot \frac{dV}{dt} = \rho \cdot \frac{Adx}{dt} = \rho A v \tag{23}$$

Comme le courant I et la surface des plaques A sont constants, on a la relation suivante entre ρ et v :

$$\rho(x) = \frac{I}{A} \cdot \frac{1}{v(x)} \tag{24}$$

c) L'équation de Poisson, vue en cours, s'écrit :

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{25}$$

Dans notre cas V ne dépend que de x, donc les dérivées selon y et z s'annulent. On a alors :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{26}$$

Pour écrire cette équation en terme de $V(x)$ seulement, on utilise les relations obtenues aux points a) et b).

$$\rho(x) = \frac{I}{A} \cdot \frac{1}{v(x)} = \frac{I}{A}\sqrt{\frac{m}{2eV(x)}} \tag{27}$$

L'équation de Poisson s'écrit donc :

$$\boxed{\frac{d^2V}{dx^2} = \beta V^{-\frac{1}{2}}} \tag{28}$$

où on a regroupé les constantes dans $\beta = -\frac{I}{\epsilon_0 A}\sqrt{\frac{m}{2e}}$.

d) Le champ électrique $\vec{E}$ est selon $\hat{e}_x$ par symétrie du problème (on se place aux alentours du centre des plaques, loin des bords qui peuvent être considérés comme étant à l'infini). On a donc :

$$E = E_x = -\vec{\nabla} V . \hat{e}_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{4V_0}{3d}\left(\frac{x}{d}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{29}$$

En évaluant cette expression en $x = 0$ on trouve bien que $E(x = 0) = 0$: le champ électrique est nul à la surface de la cathode.

e) La résolution de cette équation différentielle nécessite une astuce relativement simple (mais pas forcément évident à deviner) et un peu d'algèbre. On part de l'équation de Poisson

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \beta V^{-\frac{1}{2}} \tag{30}$$

Pour utiliser l'astuce donné dans l'énoncé, multiplions par $\frac{dV}{dx}$ des deux côtés de l'équation :

$$V'V'' = \beta V^{-\frac{1}{2}} V' \tag{31}$$

On peut remarquer que chaque terme de l'équation est une fonction à une certaine puissance, multiplié par la dérivée de la fonction. Par exemple, le terme à gauche ressemble à $\frac{d}{dx}(f^2) = 2ff'$ et celle de droite à $\frac{d}{dx}(f^{1/2}) = \frac{1}{2}f^{-1/2}f'$. On peut donc écrire chaque terme comme une dérivée par rapport à x :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}V'^2\right) = \frac{d}{dx}\left(2\beta\sqrt{V}\right)$$

En intégrant des deux côtés, on obtient

$$V'^2 = 4\beta\sqrt{V} + \cancel{const} \tag{32}$$

La constante d'intégration vaut zéro, on la trouve en évaluant en $x = 0$: comme on a supposé dans l'énoncé que $V(0) = 0$ et $V'(0) = 0$, la constante doit être nulle.

On réarrange l'équation pour appliquer l'astuce une dernière fois :

$$\begin{aligned}
V^{-\frac{1}{4}}V' &= 2\sqrt{\beta} \\
\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}V^{\frac{3}{4}}\right) &= 2\sqrt{\beta} \\
\frac{4}{3}V^{\frac{3}{4}} &= 2x\sqrt{\beta} + \cancel{const} \\
\implies V(x) &= \left(\frac{3\sqrt{\beta}}{2}x\right)^{\frac{4}{3}}
\end{aligned}$$

La deuxième constante d'intégration est nulle pour la même raison qu'avant. On a résolu l'équation de Poisson, mais on peut encore relier β à V_0 et d pour arriver à l'expression donnée dans l'énoncé. On sait que $V(x = d) = V_0$, donc :

$$V_0 = V(d) = \left(\frac{3\sqrt{\beta}}{2}d\right)^{\frac{4}{3}} \implies \left(\frac{3\sqrt{\beta}}{2}\right)^{\frac{4}{3}} = \frac{V_0}{d^{\frac{4}{3}}} \tag{33}$$

et on obtient finalement le potentiel électrique entre les deux plaques de la diode :

$$\boxed{V(x) = V_0\left(\frac{x}{d}\right)^{\frac{4}{3}}} \tag{34}$$

Exercice 5

Une ligne de transmission électrique dans une ville consiste en deux câbles parallèles de longueur L et rayon $R = 1$ mm, séparés d'une distance $d = 10$ cm. On suppose que $L \gg d \gg R$. Calculez la capacité par unité de longueur de cette ligne de transmission. La capacité ayant un effet négatif pour la transmission de signaux, que peut-on faire pour la réduire ?

Corrigé

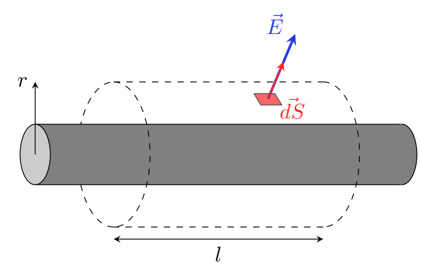
La définition de la capacité vue en cours est $C = Q/\Delta V$. Pour trouver C pour cet arrangement de deux câbles, on doit trouver la différence de potentiel entre les deux câbles lorsqu'elles portent une charge -Q et +Q respectivement.

L'idée est de commencer par calculer le champ électrique généré par cette distribution de charges, puis utiliser ce résultat pour obtenir la différence de potentiel ΔV.

Champ créé par un câble

En appliquant la loi de Gauss à un cylindre uniformément chargé, on a

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{35}$$



Par symétrie, on sait que le champ $\vec{E}$ est radial, soit $\vec{E}(r) = E(r)\hat{e}_r$. Prenons comme surface de Gauss S un cylindre de rayon r et de longueur l, concentrique avec le câble, et q la charge contenue dans S. Seule la surface latérale du cylindre S_{lat} contribue à l'intégrale, puisque $\vec{E}$ et $d\vec{S}$ sont perpendiculaires sur les deux autres surfaces S_1 et S_2 correspondant aux côtés du cylindre. On a donc :

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{lat}} E(r)\hat{e}_r.dS\hat{e}_r + \overbrace{\int_{S_1} E(r)\hat{e}_r.dS(-\hat{e}_z)}^{=0 \text{ puisque } \hat{e}_r.\hat{e}_z=0} + \overbrace{\int_{S_2} E(r)\hat{e}_r.dS\hat{e}_z}^{=0} \tag{36}$$

$$= E(r)\int_{S_{lat}} dS = E(r)2\pi rl = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{37}$$

On peut maintenant exprimer le champ électrique généré par le câble chargé positivement pour $r > R$:

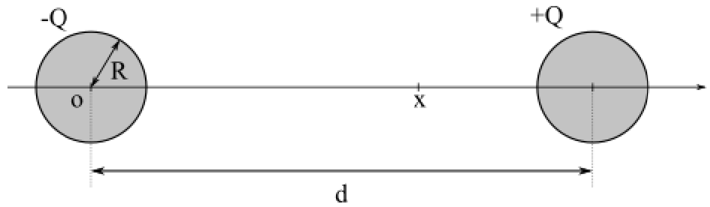
$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{e}_r \tag{38}$$

où on a introduit la densité de charges du câble par unité de longueur $\lambda = q/l = Q/L$.

Champ total entre les deux câble

En plaçant l'origine de notre repère au centre du premier câble de charge totale $-Q$. le champ électrique créé par ce câble sur l'axe x entre les deux câbles et pour $R \leq x \leq d - R$:

$$\vec{E}_1(x) = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0 x}\hat{e}_x \tag{39}$$



Le champ électrique créé par l'autre câble (de charge totale Q) en un point x de ce même axe est donné par (notez qu'en reprenant l'équation (38) la distance du centre du câble au point x devient $r = |d - x|$, et le vecteur $\hat{e}_r$ devient $-\hat{e}_x$) :

$$\vec{E}_2(x) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 |d-x|}(-\hat{e}_x) = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0(d-x)}\hat{e}_x \tag{40}$$

On obtient le champ électrique total $\vec{E}(x)$ pour $R \leq x \leq d - R$:

$$\vec{E}(x) = -\left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(d-x)}\right)\hat{e}_x \tag{41}$$

Différence de potentiel

On utilise ce résultat pour calculer la différence de potentiel entre les deux câbles, en partant de la surface de l'un jusqu'à la surface de l'autre :

$$\begin{aligned}
\Delta V = -\int_{x=R}^{x=d-R} \vec{E} \cdot \vec{dl} &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_R^{d-R} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right] dx \\
&= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln(x) - \ln(d-x)\right]\Big|_R^{d-R} \\
&= \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \left[\ln(d-R) - \ln(R)\right] \\
&\approx \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \left[\ln(d) - \ln(R)\right] \\
\implies \Delta V &\approx \frac{Q}{\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{d}{R}\right)
\end{aligned}$$

On trouve finalement la capacité par unité de longueur

$$\frac{C}{L} = \frac{Q}{L\Delta V} \approx \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(d/R)} \approx 6.04 \text{ pF/m} \tag{42}$$

Pour réduire la capacité par unité de longueur, on peut augmenter d ou bien diminuer R.