Corrigé des exercices - Série 1

1. Problème de Fermi à New York

Le prix Nobel de physique de 1938, Enrico Fermi, avait l'habitude d'aborder toutes sortes de problèmes scientifiques en commençant par une estimation de l'ordre de grandeur du résultat. Vous êtes invités à faire comme lui, voici un exercice du style "problèmes de Fermi".

Combien d'accordeurs de piano y a-t-il à New York ? Guidez-vous de la logique suivante.

a) Combien d'habitants y a-t-il à New York : 10^6, 10^7, 10^8 ?
b) Est-ce que chaque habitant possède un piano ?
c) Serait-il raisonnable d'affirmer que les personnes habitant seules ne possèdent pas de piano, mais que les familles en possèdent un ?
d) Combien de familles habitent NY : 1/2, 1/5, 1/20 de la population totale ?
e) Est-ce que chaque famille possède un piano ? oui, 1/5, 1/20 des familles.
f) À partir des réponses données jusqu'ici, estimez le nombre de pianos à New York.
g) Parmi ces pianos, combien sont-ils accordés à New York chaque année ?
h) Combien d'accordages sont-ils effectués par un accordeur chaque année : 80, 800, 8000 ?
i) Finalement, combien d'accordeurs de piano y a-t-il à New York ? Comparez avec vos collègues.

Corrigé

Sachant que New York est une des villes les plus grandes du monde, la deuxième option pour le nombre d'habitants semble la plus probable. Selon les statistiques officielles, la population de la ville de New York est d'environ 8 millions de personnes en 2020 et l'agglomération de la ville compte avec environ 20 millions. On estime donc la population avec un ordre de grandeur de 10^7. Disons ensuite que cette population compte 2 millions de familles (1/5 de la population) et que 20% de ces familles possèdent un piano. On estime donc le nombre total de pianos à 400000. La fréquence d'accordage varie bien sûr : certains pianos ne sont jamais accordés et d'autres le sont chaque mois. En moyenne, un accordage par piano et par année semble raisonnable. Avec un agenda bien rempli, un accordeur pourrait servir environ quatre clients par jour, travaillant 200 jours par année. Chacun accorderait alors 800 pianos par an. En conclusion, une telle estimation permettrait de fournir du travail pour 500 accordeurs de piano.
Nous ne connaissons pas le vrai nombre d'accordeurs de piano travaillant à New York. Les estimations que vous nous avez transmises se situent dans un intervalle de 20 à 2000 accordeurs. On conclut donc que l'estimation est correcte à un ordre de grandeur près, d'où l'utilité de l'approche de Fermi. Notez

1. Crédit : Dr. J. Loizu, Prof. A. Fasoli

que les problèmes de Fermi n'ont jamais comme but de trouver la réponse exacte : il n'est pas question de donner un résultat du type "il y a 63 accordeurs de piano à New York". Notez également que nous avons trouvé une réponse raisonnable à une question à laquelle il semblait à première vue difficile de répondre.

2. Ordres de grandeur

a) *Combien de personnes sont-elles nées pendant l'heure qui a suivi votre propre naissance ?*
Pour maintenir une population de $\sim 7 \times 10^9$ de personnes ayant une espérance de vie de ~ 70 ans, il faut $\sim 7 \times 10^9/70$ naissances par an. Avec $365{\times}24$ heures par an on trouve donc ~ 11000 naissances par heure.

b) *Quelle quantité d'eau est annuellement consommée par personne en Suisse (besoin ménagers) ?*
On suppose qu'en moyenne chaque personne prend une douche par jour d'environ 5 minutes, qu'elle va aux toilettes toutes les 3 heures (donc 5 fois par jours), qu'elle utilise le robinet (lavage des mains, dents, ...) environ 10 fois par jours pendant 30 secondes, et qu'environ 10 litres sont utilisés en moyenne quotidiennement pour les tâches ménagères (lessives, vaisselle, cuisine, boisson...). On estime que la douche consomme environ 1 litre pour 5-10 secondes (disons 6 secondes), donc 10 litres par minute, qu'une chasse d'eau consomme environ 8 litres et que le débit du robinet est de 6 l/min. En moyenne, on arrive donc à un total d'environ 130 litres par jour qui correspondent à 47.5 tonnes d'eau utilisées par personne annuellement.

c) *Combien de fois le coeur d'un homme bat-il durant sa vie ?*
En moyenne, nous avons ~ 1 battement de coeur par seconde. Espérance de vie d'un homme ~ 75 ans, soit $75\,\text{ans} \times 365\,\text{jours/année} \times 24\,\text{h/jour} \times 60\,\text{minutes/heure} \times 60\,\text{secondes/minute} = 7.5 \times 3.65 \times 2.4 \times 6.0 \times 6.0 \times 10^6 \sim 2 \times 10^9$ battements durant la vie d'un homme.

d) *Combien de temps prend une goutte d'eau qui sort du lac Léman pour arriver à la Méditerranée ?*
Disons que le Rhône a une vitesse un peu plus élevée que la vitesse d'un piéton, environ 10 km/h et que la distance est environ 500 km. On estime donc ce temps à 50 heures, environ 2 jours.

e) *Combien de fois faudrait-il plier une feuille de papier pour atteindre le sommet du Cervin ?*
On peut estimer l'épaisseur d d'une feuille de papier en disant qu'un bloc de 100 feuilles a une épaisseur d'environ 1 cm et donc $d \sim 0.1$ mm. Chaque fois que l'on plie une feuille, l'épaisseur double, donc la hauteur totale h pour n plis est de $h = d \times 2^n$. Pour atteindre la hauteur h du Cervin qui est d'environ 4'500 m, il faudrait donc $n = \log_2(h/d) = \log_2(4.5{\times}10^7) \approx 25$ plis seulement !

f) *Quelle est la puissance moyenne consommée par le corps humain (comparer à une lampe) ?*
Le corps humain a besoin d'environ 2500 kilocalories par jour et 1 calorie ≈ 4 Joules. Le corps consomme donc environ 10 MJ par jour, soit une puissance moyenne $P = 10^7/86400 \approx 115$ Joules par seconde, soit environ 100 Watts. Comme une vieille ampoule !

g) *Combien d'atomes y a-t-il dans le corps humain (masse d'un proton $\sim 10^{-27}$ kg) ?*
Supposons que le corps humain est composé principalement d'atomes de carbone, avec chacun une masse d'environ 12 protons, soit 1.2×10^{-26} kg. Un corps d'environ 70 kg contient donc environ $70/1.2 \times 10^{-26} \approx 7 \times 10^{27}$ atomes.

h) *Estimer le rapport des forces électrique et gravitationnelle entre un proton et un electron.*
Le rapport ne dépend pas de la distance, $F_e/F_g = ke^2/(Gm_em_p) \approx (9 \times 10^9 \times 10^{-38})/(6.7 \times$

$10^{-11} \times 10^{-30} \times 10^{-27}$), soit environ $F_e/F_g \approx 10^{40}$. La force gravitationnelle est négligeable !

i) *Estimer la charge sur deux chats telle que la répulsion éléctrique à 1 mètre dépasse leur poids.* Un chat pèse environ 4 kg et donc la force du poids est de $F_g = mg \approx 40$ N. La force électrique entre deux chats identiques séparés de 1 m est de $F_e = kQ^2$, donc pour avoir $F_e > F_g$ il faut une charge sur chaque chat de $Q > \sqrt{40/9 \times 10^9} \approx 6 \times 10^{-5}$ C, soit environ 60 μC.

3. Equilibres stables et instables

La force électrique entre deux charges Q_A et Q_B séparées d'une distance r a une amplitude

$$F = k\frac{|Q_A Q_B|}{r^2}$$

où $k \approx 8.98 \times 10^9$ N m$^2/C^2$ est la constante électrostatique. On place deux charges positives $Q_A = Q_0$ et $Q_B = 2Q_0$ à une distance de 8 cm et on les fixe dans l'espace à l'aide d'un support.

a) Calculer la force qu'il faut appliquer sur les charges pour les maintenir fixes si $Q_0 = 5$ μC.

b) On veut placer une charge libre $q > 0$ entre les deux charges Q_A et Q_B. Calculer sa position pour qu'elle soit à l'équilibre.

c) On applique maintenant une petite perturbation à la position d'équilibre de la charge q, dans la direction de l'une des deux charges fixes Q_A ou Q_B. Que se passe-t-il ? En conclure s'il s'agit d'un équilibre stable ou instable (raisonner qualitativement).

d) Reprendre les question (b) et (c) dans le cas où $q < 0$.

Corrigé

a) L'intensité de la force est la même sur chacune des deux charges et vaut

$$F = k\frac{2Q_0^2}{r^2} = 8.98 \times 10^9 \times \frac{2 \times (5 \times 10^{-6})^2}{0.08^2} \approx 70.2 \text{ N} \tag{1}$$

soit une force équivalente à un poids d'environ 7 kg.

b) Soit d_A la distance entre la charge q et la charge Q_A, et d_B la distance entre la charge q et la charge Q_B. La condition d'équilibre entre la force $\vec{F}_A$ de Q_A sur q, et la force $\vec{F}_B$ de Q_B sur q s'écrit :

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0} \tag{2}$$

$$k\frac{Q_0 q}{d_A^2} - k\frac{2Q_0 q}{d_B^2} = 0 \tag{3}$$

$$d_B^2 = 2d_A^2 \tag{4}$$

Comme $d_B > 0$ et $d_A > 0$ puisque ce sont des distances, on a $d_B = \sqrt{2}d_A$. Par ailleurs la somme des deux distances est connue, $r = d_A + d_B$, donc on en déduit

$$d_A = \frac{1}{1+\sqrt{2}}r \quad d_B = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}r \tag{5}$$

Ce qui donne $d_A \approx 0.4r$ et $d_B \approx 0.6r$.

Note : Si l'on n'utilise pas directement le fait que $d_A, d_B > 0$, on peut aussi aboutir à partir de l'équation (2) à une équation du second ordre pour d_a :

$$\frac{1}{d_A^2} = \frac{2}{(r - d_A)^2} \tag{6}$$

$$d_A^2 + 2rd_A - r^2 = 0 \tag{7}$$

dont la résolution donne (en gardant uniquement la solution positive) $d_A = (\sqrt{2} - 1)r$ puis $d_B = (2 - \sqrt{2})r$. (Noter que le résultat est bien le même, puisque $\sqrt{2} - 1 = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$).

c) Considérons une petite perturbation de la position de la charge q autour de sa position d'équilibre, dans la direction de l'une des deux charges fixes, par exemple vers la charge Q_A. La force provenant de cette charge Q_A devient plus intense. C'est une force de répulsion car $qQ_0 > 0$, et donc une force nette qui pousse la charge q de nouveau vers la position d'équilibre. Le même raisonnement est valable si la charge q est légèrement déplacée en direction de Q_B : elle est renvoyée vers sa position initiale. Il s'agit donc d'un équilibre stable.

d) Pour une charge $q < 0$, la position d'équilibre est la même que dans (b). Par contre, la charge $q < 0$ étant négative et donc de signe opposé à Q_A et Q_B, les forces subies par q sont attractives. Une petite perturbation de la position de q autour de sa position d'équilibre, par exemple s'approchant de la charge Q_A, va rendre la force provenant de Q_A plus intense et celle provenant de Q_B moins intense : la charge q est entraînée vers Q_A, donc de plus en plus loin de la position d'équilibre. De même avec une perturbation vers Q_B. Il s'agit donc d'un équilibre instable.

4. Force genérée par fil chargée

Une tige de longueur L chargée de façon homogène avec une charge Q s'étire entre $(x, y) = (0, -L/2)$ et $(x, y) = (0, +L/2)$ le long de l'axe y. Calculez la force exercée par la tige sur une charge q_0 située à $(x, y) = (x_0, 0)$.

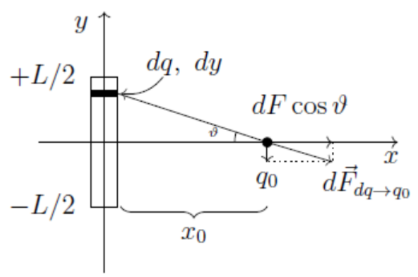


Schéma représentant la force appliquée par une tige chargée de Q sur sa longueur sur q_0, placée à une distance x_0 (q_0, Q choisies > 0).

a) Dans quelle direction la force est-elle exercée ?

b) Calculer la force dF sur q_0 dans cette direction, exercée par un petit segment de longueur dy et d'une charge $dq = \frac{Q}{L}dy$, à une hauteur y.

c) Calculer la force F_{tot} totale en intégrant cette force dF sur toute la longueur L du fil.
Indication : l'intégrale suivant est utile :

$$\int_{-\xi_0}^{+\xi_0} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^{3/2}} = \left[\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}\right]_{-\xi_0}^{+\xi_0} = \frac{2\xi_0}{\sqrt{1+\xi_0^2}} \tag{8}$$

Corrigé

La force due au petit segment $dl = dy$ est donnée par :

$$d\vec{F}_{dq\to q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq q_0}{x_0^2+y^2}\hat{r}; \qquad dq = \lambda dy = \frac{Q}{L}dy \tag{9}$$

Par symétrie, q_0 ne subira pas de force verticale
Force horizontale :

$$dF_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q/L dy q_0}{(x_0^2+y^2)}\cos\vartheta \tag{10}$$

Mais $\cos\vartheta = \frac{x_0}{(x_0^2+y^2)^{1/2}}$

$$\Rightarrow dF_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 L}\frac{Qq_0}{(x_0^2+y^2)}\frac{x_0}{(x_0^2+y^2)^{1/2}}dy \tag{11}$$

Principe de superposition : somme $\to$ intégrale pour la distribution continue

$$F_{tot_x} = \int_{\substack{\text{distribution}\\ \text{des charges}}} dF_x = \int_{-L/2}^{+L/2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x_0}{L}\frac{Qq_0 dy}{(x_0^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x_0}{L}Qq_0\underbrace{\int_{-L/2}^{+L/2}\frac{dy}{(x_0^2+y^2)^{3/2}}}_{I} \tag{12}$$

$$I = \int_{-L/2}^{+L/2}\frac{dy}{(x_0^2+y^2)^{3/2}} = \int_{-L/2}^{+L/2}\frac{d(\overbrace{y/x_0}^{=\xi})}{x_0^2[1+(\underbrace{y/x_0}_{=\xi})^2]^{3/2}} = \frac{1}{x_0^2}\left[\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}\right]_{\frac{-L}{2x_0}}^{\frac{L}{2x_0}} =$$

$$= \frac{1}{x_0^2}\left[\frac{\frac{L}{2x_0}}{\sqrt{1+\frac{L^2}{4x_0^2}}}+\frac{\frac{L}{2x_0}}{\sqrt{1+\frac{L^2}{4x_0^2}}}\right] = \frac{1}{x_0^2}\frac{L}{\sqrt{x_0^2+\frac{L^2}{4}}} \tag{13}$$

$$\Rightarrow \underbrace{F_{tot_x}}_{=F_{tot}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x_0}{L}Qq_0\frac{1}{x_0^2}\frac{L}{\sqrt{x_0^2+\frac{L^2}{4}}} = \frac{Qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x_0\sqrt{x_0^2+\frac{L^2}{4}}} \tag{14}$$

Limite des grandes distances (auxquelles la tige “devient” comme un point) :

$\lim_{x_0\to\infty} F_{tot} = \frac{Qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x_0^2}$ OK, comme la loi de Coulomb pour deux charges ponctuelles.

Limite petites distances (auxquelles la tige est comme “infinie”) :

$\lim_{x_0\to 0} F_{tot} = \frac{Qq_0}{2\cancel{4}\pi\varepsilon_0}\frac{\cancel{2}}{Lx_0}$ mais $\frac{Q}{L} = \lambda$ (densité linéaire de charge), $\Rightarrow F_{tot} = \frac{\lambda q_0}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x_0}$

5. Force entre deux fils

Calculer la force d’interaction entre deux fils droits infinis chargés uniformément avec des densités de charge linéaires λ_1 et λ_2. Les fils sont perpendiculaires et séparés par une distance L.

a) Calculer la force du fil 1 sur une petite section de longueur dx_2 et de charge dq_2, située à une position (x, L) par rapport au point le plus proche du fil 1. (Intégration selon le fil 1)

b) Calculer la force exercée par le fil 1 sur toute la longueur du fil 2. (Intégration selon le fil 2)

Application : $\lambda_1 = 4\ \mu\text{C/m}$, $\lambda_2 = 9\ \mu\text{C/m}$, $L = 25$ cm.
Indication : les intégrales suivantes sont utiles :

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \text{et} \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$$

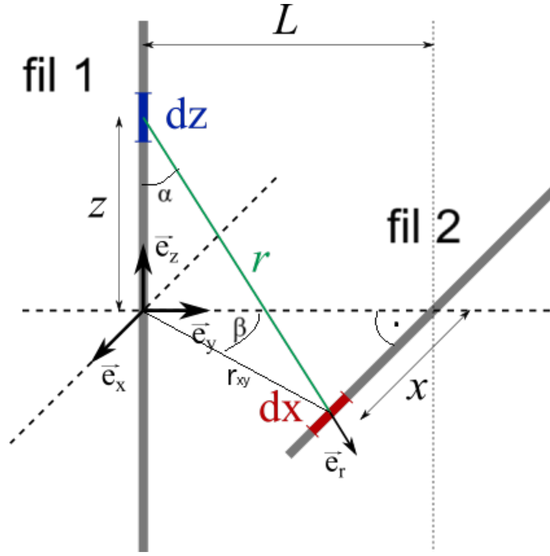
Corrigé

La force totale exercée par le fil vertical (fil 1) sur le fil horizontal (fil 2) est de signe opposé et de même amplitude que celle exercée par le fil 2 sur le fil 1. Calculons donc uniquement la force $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ du fil 1 sur le fil 2.
Avant cela on peut simplifier le problème en utilisant des arguments de symétrie. Considérons un repère (O, x, y, z) tel que le fil 1 est le long de $\hat{e}_z$ et passe par l'origine, et tel que le fil 2 est aligné avec $\hat{e}_x$. Le plan Oyz est un plan de symétrie de la répartition des charges, donc la force électrique est contenue dans ce plan. De même avec le plan Oxy. La force appartient donc à l'intersection de ces deux plans : elle est selon l'axe y. On peut donc écrire $\overrightarrow{\mathrm{F}} = F\hat{\mathrm{e}}_y$. La seule composante qui nous intéresse dans la suite est la composante selon $\hat{\mathrm{e}}_y$.

La force totale du fil 1 sur le fil 2, est la somme de toutes les élements de force $dF_{dz\to dx}$, force d'un élément dz du fil 1 sur un élement dx du fil 2.
Cette force s'écrit :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{dF}}_{dz\to dx} &= k\frac{dq_1 dq_2}{r^2}\hat{\mathrm{e}}_r && (15)\\ &= k\frac{dq_1 dq_2}{r^2}\frac{\overrightarrow{\mathrm{r}}}{r} && (16) \end{aligned}$$

Avec $\overrightarrow{\mathrm{r}}$ le vecteur allant d'un élément dz de coordonnées $(0, 0, z)$, à un élément dx de coordonnées $(x, L, 0)$.
Ce vecteur s'écrit $\hat{\mathrm{e}}_r = x\hat{\mathrm{e}}_x + L\hat{\mathrm{e}}_y - z\hat{\mathrm{e}}_z$, et sa norme est $r = \sqrt{x^2 + L^2 + z^2}$.



Intégration selon le fil 1

La force $dF_{1\to dx}$ de tout le fil 1 sur un élément dx du fil 2, projetée selon $\hat{\mathrm{e}}_y$, s'écrit :

$$\begin{aligned} dF_{1\to dx} &= \int_{\text{fil 1}} \overrightarrow{\mathrm{dF}}_{dz\to dx}\cdot\hat{\mathrm{e}}_y && (17)\\ &= \int_{\text{fil 1}} k\frac{dq_1 dq_2}{r^3}\overrightarrow{\mathrm{r}}\cdot\hat{\mathrm{e}}_y && (18)\\ &= k\lambda_1\lambda_2 dx\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{(x^2+L^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}L && (19) \end{aligned}$$

Ici, le produit vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{dF}}_{dz\to dx}\cdot\hat{\mathrm{e}}_y$ peut aussi être calculé en utilisant $k\frac{dq_1 dq_2}{r^2}\sin\alpha\cdot\cos\beta = k\frac{dq_1 dq_2}{r^2}\frac{r_{\not{x}y}}{r}\frac{L}{r_{\not{x}y}}$.
La variable selon laquelle nous voulons intégrer ici est z, notons donc que le terme $x^2 + L^2$ est une constante au cours de cette première intégration. Par factorisation on transforme l'intégrale en une

fonction que l'on sait intégrer :

$$dF_{1\to dx} \quad = \quad \frac{k\lambda_1\lambda_2 L dx}{(x^2+L^2)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{\left(1+(\frac{z}{\sqrt{x^2+L^2}})^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{20}$$

Puis pour calculer cette intégrale on opère le changement de variable :

$$\begin{cases} u & = \frac{z}{\sqrt{x^2+L^2}} \\ du & = \frac{dz}{\sqrt{x^2+L^2}} \end{cases}$$

ce qui donne :

$$dF_{1\to dx} = \frac{k\lambda_1\lambda_2 L dx}{x^2+L^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2k\lambda_1\lambda_2 L dx}{x^2+L^2} \tag{21}$$

Intégration selon le fil 2

La force totale F est ensuite la somme (intégrale) des forces $dF_{1\to dx}$ du fil 1 sur chaque élément dx du fil 2 :

$$F = \int_{\text{fil 2}} dF_{1\to dx} = 2k\lambda_1\lambda_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{L dx}{x^2+L^2} \tag{22}$$

À nouveau on transforme légèrement la forme de l'intégrale en une fonction $1/(1+u^2)$ que l'on sait intégrer, et en utilisant le changement de variable ($u = \frac{x}{L}$, $du = \frac{dx}{L}$) on a :

$$\begin{aligned}
F =& 2k\lambda_1\lambda_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx/L}{1+(x/L)^2} && (23)\\
=& 2k\lambda_1\lambda_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} && (24)\\
=& 2k\lambda_1\lambda_2 (\arctan(u))\Big|_{-\infty}^{+\infty} && (25)\\
=& 2k\lambda_1\lambda_2 \left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) && (26)\\
=& 2\pi k\lambda_1\lambda_2 && (27)\\
=& \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\epsilon_0} && (28)
\end{aligned}$$

Ceci est peut-être contre-intuitif, mais la force ne dépend pas de L ! Cela est du au fait que les fils sont infinis : que l'on éloigne ou que l'on approche les fils, le problème reste exactement le même. L'application numérique donne $F = 2.034$ N. Bien sûr, la force est répulsive car les distributions de charge sont de même signe.

Note : On peut aussi faire le calcul sans utiliser d'argument de symmétrie, et donc sans projeter selon

$\hat{\mathrm{e}}_y$. *Sans utiliser de projection, et en faisant les deux intégrales en une fois, on a :*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{F}} &= \int_{\mathit{fil\ 1}}\int_{\mathit{fil\ 2}} \overrightarrow{\mathrm{dF}}_{dx\to dz} \\
&= \int_{\mathit{fil\ 1}}\int_{\mathit{fil\ 2}} k\frac{dq_1 dq_2}{r^3}\overrightarrow{\mathrm{r}} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} k\lambda_1\lambda_2 \frac{dx\,dz}{(x^2+L^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x\hat{\mathrm{e}}_x + L\hat{\mathrm{e}}_y - z\hat{\mathrm{e}}_z) \\
&= k\lambda_1\lambda_2\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dz \cancel{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,dx}{(x^2+L^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}}\hat{\mathrm{e}}_x\right) \\
&\qquad + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{L\,dx\,dz}{(x^2+L^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{\mathrm{e}}_y \\
&\qquad - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx \cancel{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z\,dz}{(x^2+L^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}}\hat{\mathrm{e}}_z\right)
\end{aligned}$$

Si on intègre selon x la première intégrale, on intègre une fonction impaire ($x \to x/(x^2+L^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$) sur un intervalle symmétrique $[-\infty;+\infty]$: le résultat est nul. Le premier terme selon $\hat{\mathrm{e}}_x$ vaut donc zéro. De même pour le troisième terme selon $\hat{\mathrm{e}}_z$: en intégrant d'abord selon z, on intègre une fonction impaire sur $[-\infty;+\infty]$, dont le résultat est nul.
On retrouve bien de manière mathématique ce qui nous avions déduit par des arguments de symmétrie : $\overrightarrow{\mathrm{F}} = F\hat{\mathrm{e}}_y$.