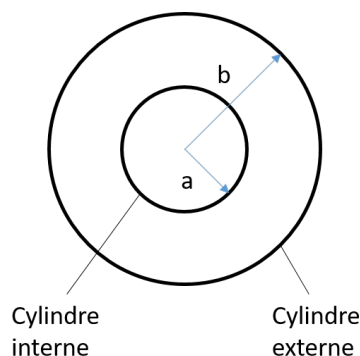


Corrigé des exercices - Série 13

Exercice 1 - niveau 2

Un long câble coaxial consiste en deux cylindres creux conducteurs et concentriques à parois fines de rayons a et b , comme dans la figure. Le cylindre interne porte un courant constant I , et le cylindre externe est traversé par le retour du même courant I . Le courant génère un champ magnétique entre les deux cylindres.

- Calculez l'énergie stockée dans le champ magnétique pour une longueur l du câble.
- Quelle est l'énergie stockée par mètre du câble si $a = 1.2$ mm, $b = 3.5$ mm et $I = 2.7$ A ?



Corrigé

- On peut calculer l'énergie totale stockée dans le champ magnétique U_B à partir de la densité d'énergie du champ $u_B = B^2/2\mu_0$.

Comme le câble a une symétrie cylindrique, on peut trouver B avec la loi d'Ampère et le courant I . On veut intégrer pour un chemin circulaire de rayon r , où $a < r < b$ (comme indiqué par la ligne pointillée dans la figure). Le seul courant enfermé dans ce chemin est le courant I sur le cylindre interne. Alors, on peut écrire la loi d'Ampère comme,

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I. \quad (1)$$

Grâce à la symétrie cylindrique, à tout moment le long du chemin circulaire, $\vec{B}$ est tangentiel au chemin et a la même magnitude B . Prenons la direction de l'intégration le long du chemin comme la direction du champ magnétique autour du chemin. On peut donc remplacer $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ avec $B dl \cos(0) = B dl$, et puis l'intégrale devient $B \int dl = B(2\pi r)$.

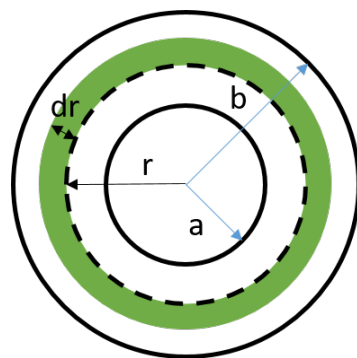
On trouve,

$$B(2\pi r) = \mu_0 I \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (2)$$

On remarque que B est nul pour $r < a$ et pour $r > b$ (car le courant enfermé dans les deux cas est nul). Cela nous donne la densité d'énergie,

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}. \quad (3)$$

Il faut noter que u_B n'est pas uniforme dans le volume entre les deux cylindres car il y a une dépendance en r . Alors, pour trouver l'énergie totale U_B , il faut intégrer sur ce volume V . On considère le volume dV d'une coque cylindrique placée entre les deux cylindres, comme dans la figure, avec rayon mineur r et rayon



1. crédit : Dr. J. Loizu, Prof. A. Fasoli

majeur $r + dr$ et longueur l . La surface de la section de la coque est $2\pi r dr$, alors le volume pour l'intégrale est $dV = 2\pi r l dr$.

On peut écrire,

$$U_B = \int_V u_B dV = \int_a^b \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r l dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right). \quad (4)$$

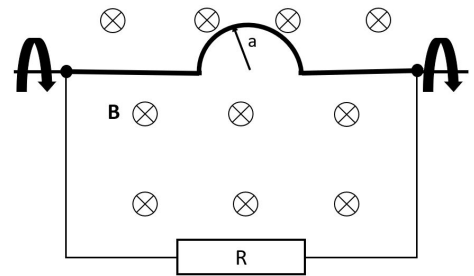
Remarque : on peut arriver au même résultat en calculant d'abord la self inductance L de ce circuit et en utilisant la relation $U_B = \frac{1}{2} L I^2$. Pour le calcul de L , voir l'exemple 30-4 du Giancoli, édition 3 (page 760).

b) À partir du résultat de la partie a), on trouve, pour $l = 1$ m,

$$U_B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 2.7^2 \times 1}{4\pi} \ln\left(\frac{3.5}{1.2}\right) = 780 \text{ nJ} \quad (5)$$

Exercice 2 - niveau 1

Soit un câble rigide, plié en son centre en forme de demi-cercle de rayon a . Le câble tourne à une fréquence f dans un champ magnétique uniforme B . Le câble est relié à un circuit composé d'une résistance R , formant un circuit fermé. Trouvez l'expression de la force électromotrice (f.e.m.) induite dans la boucle.



Corrigé

Afin de résoudre cet exercice, il faut considérer le flux magnétique à travers la surface définie par le circuit fermé. Le seul changement dans le flux est dû à la rotation du demi-cercle de rayon a . Soit D le demi-disque, défini par le demi-cercle. Le flux à travers D est

$$\Phi_B(t) = \int_D \vec{B} \cdot d\vec{A} = B \frac{\pi a^2}{2} \cos(2\pi f t)$$

Ainsi, la f.e.m. induite se calcule en prenant la dérivée du flux par rapport au temps :

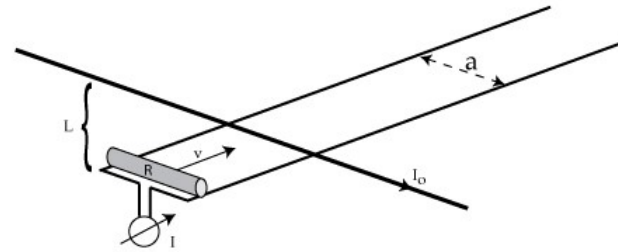
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = (2\pi f) B \frac{\pi a^2}{2} \sin(2\pi f t)$$

Nous pouvons finalement remarquer que la fréquence de la f.e.m. vaut f et que l'amplitude maximum vaut $f B \pi^2 a^2$.

Exercice 3 - niveau 2

Une barre conductrice de résistance R se déplace avec une vitesse v constante sur deux rails parallèles (la distance entre les rails vaut a) en présence d'un champ magnétique créé par le courant I_0 dans un câble linéaire infini, qui se trouve à la distance L des rails (voir figure ci-contre). Au temps $t = 0$, cette barre se trouve exactement sous le câble. La résistance des rails est négligeable. Calculez l'intensité du courant I induit dans le circuit formé par la barre et les rails en fonction du temps (voir figure).

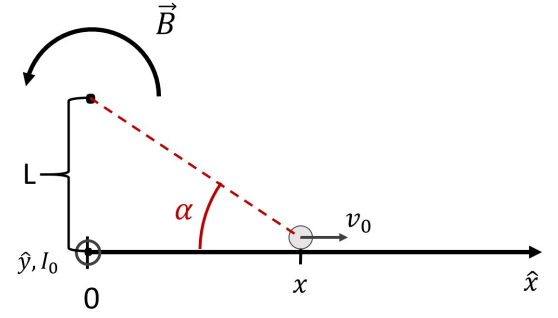
Indications : L'intégrale suivante peut être utile :



$$\int \frac{x}{a + x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(a + x^2) \quad (6)$$

Corrigé

L'amplitude du champ magnétique créé par le courant à la distance r du fil et le long de $y = 0$ vaut $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{L^2+x^2}}$. Pour trouver le flux magnétique à travers le circuit formé par la barre et les rails, il faut considérer que la direction du champ magnétique par rapport à la perpendiculaire au plan des rails est donnée par l'angle α tel que $\cos(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{L^2+x^2}}$. Par exemple, en $x = 0$, $\alpha = \pi/2$ ($\cos \alpha = 0$) et le champ est uniquement le long de $\hat{x}$, parallèle à la surface engendré par la barre et les rails. Nous pouvons donc calculer le flux :



$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_0^x \frac{\mu_0 I a}{2\pi\sqrt{x^2+L^2}} \cos(\alpha) dx = \int_0^x \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{x}{(x^2+L^2)} dx = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \ln(x^2 + L^2) \Big|_0^x = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \ln(1 + \frac{x^2}{L^2}).$$

Afin de calculer le courant, nous devons calculer la f.e.m. induite $\mathcal{E}_{ind}$, puis utiliser loi d'Ohm $I = \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R}$. Ici nous utiliserons l'astuce suivante :

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dx} \frac{dx}{dt} = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{x}{x^2+L^2} v = -\frac{\mu_0 I a v^2 t}{2\pi(L^2+v^2 t^2)}.$$

Finalement, le courant induit vaut :

$$I = \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R} = -\frac{\mu_0 I a v}{2\pi R} \frac{x}{x^2+L^2} = -\frac{\mu_0 I a v^2 t}{2\pi R(L^2+v^2 t^2)}.$$

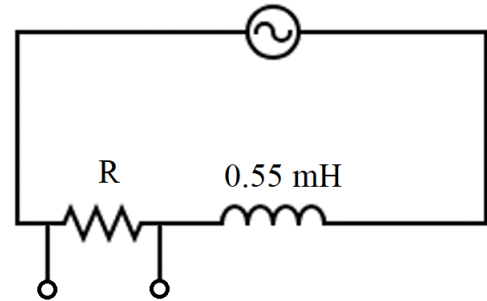
Exercice 4 - niveau 2

Un circuit LR peut être utilisé comme « déphaseur ». Les "déphaseurs" sont appliqués par exemple dans les casques antibruit - en répétant le bruit du signal avec un déphasage de 180° , ils l'annulent efficacement. Supposez qu'une tension de source "d'entrée" $V = V_0 \sin(2\pi f t + \phi_0)$ est connectée à travers une combinaison en série d'une inductance $L = 55$ mH et résistance R . La "sortie" de ce circuit est prise à travers la résistance. L'amplitude de la tension d'entrée est $V_0 = 24$ V et sa fréquence est $f = 175$ Hz.



$$V=24\text{V}, f=175\text{Hz}$$

- Déterminez l'impédance Z du système et utilisez-la pour trouver la tension complexe sur la résistance R .
- Déterminez la valeur de R pour que la tension de sortie V_R soit en retard de 25° sur la tension d'entrée V .
- Comparez (sous forme de rapport) la tension de sortie de crête avec V_0 .



Corrigé

- Tout d'abord, pour utiliser l'impédance, nous allons représenter en tension d'entrée une valeur complexe $V = V_0 e^{2i\pi f t + i\phi_0}$. Dans ce cas, en utilisant la loi de Faraday, l'impédance d'une bobine est donnée par :

$$Z_L = 2i\pi f L. \quad (7)$$

alors que l'impédance d'une résistance est simplement $Z_R = R$. Ainsi, l'impédance totale du système est

$$Z = R + 2i\pi fL = \sqrt{R^2 + (2\pi fL)^2} e^{i \operatorname{atan}(\frac{2\pi fL}{R})} \quad (8)$$

En utilisant cette formule, nous pouvons trouver la tension aux bornes de la résistance R :

$$U_R = Z_R I = \frac{Z_R}{Z} V = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (2\pi fL)^2}} V_0 e^{2i\pi ft + i\phi_0 - i \operatorname{atan}(\frac{2\pi fL}{R})} \quad (9)$$

- b) D'après l'équation précédente, nous observons que le décalage de phase sur la résistance est $\phi = \operatorname{atan}(\frac{2\pi fL}{R})$. Du fait que l'on veut obtenir un déphasage de $\phi = 25^\circ$, on peut évaluer R :

$$R = \frac{2\pi fL}{\tan(\phi)} = 130\Omega \quad (10)$$

- c) En prenant le module de l'équation (40), on obtient l'amplitude de la tension V_R :

$$V_R = \frac{Z_R}{|Z|} V_0 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (2\pi fL)^2}} V_0 = 0.91 V_0 \quad (11)$$

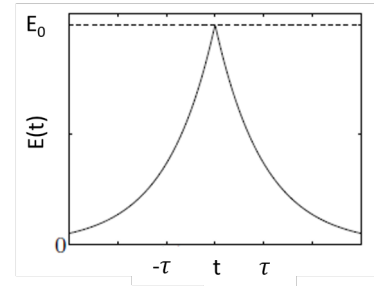
Exercice 5 - niveau 2

On suppose un pulse de champ électrique de la forme :

$$E(t) = E_0 \exp(-|t|/\tau),$$

où $\tau > 0$.

- Calculez le spectre de fréquences de ce champ.
- Pour quelle fréquence se trouve l'amplitude spectrale maximale ?
- Trouvez la constante de temps τ pour que l'amplitude spectrale de E à la fréquence $f = 40$ kHz soit égale à la moitié de la valeur maximale du spectre.



Corrigé

- a) On part de la définition de la transformée de Fourier. Le spectre en fréquences de ce signal est :

$$\tilde{E}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt \quad (12)$$

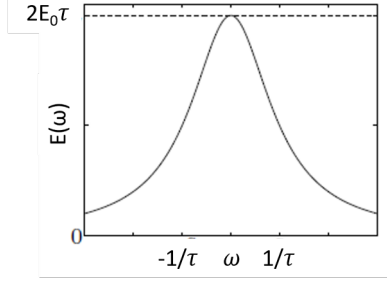
On doit donc intégrer sur deux domaines, et on utilise l'intégration par parties dans chaque cas :

$$\int_{-\infty}^0 E_0 e^{t/\tau} e^{-i\omega t} dt = E_0 \left. \frac{e^{(1/\tau - i\omega)t}}{1/\tau - i\omega} \right|_{-\infty}^0 = \frac{E_0}{1/\tau - i\omega} \quad (13)$$

$$\int_0^{\infty} E_0 e^{-t/\tau} e^{-i\omega t} dt = -E_0 \left. \frac{e^{-(1/\tau + i\omega)t}}{1/\tau + i\omega} \right|_0^{\infty} = \frac{E_0}{1/\tau + i\omega} \quad (14)$$

En combinant les deux contributions, on a :

$$\tilde{E}(\omega) = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1/\tau - i\omega} + \frac{1}{1/\tau + i\omega} \right) = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad (15)$$



b) Nous trouvons le maximum ω de $\tilde{E}(\omega)$, ω_0 , comme la solution de,

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial \omega} = 0. \quad (16)$$

Alors on trouve,

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial \omega} = -\frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{4\omega_0\tau^3}{(1 + \omega_0^2\tau^2)^2} = 0 \quad (17)$$

Comme $\tau \neq 0$ et $E_0 \neq 0$, nous avons que $\omega_0 = 0$ et donc $f_0 = 0$.

c) La valeur maximale de $\tilde{E}$ vaut $\tilde{E}(\omega_0) = 2\tau \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}}$, alors nous voulons trouver τ pour que $\tilde{E} = \tau \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}}$. Nous avons donc,

$$\tilde{E}(\omega) = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\tau}{1 + \omega^2\tau^2} = \tau \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}}. \quad (18)$$

Donc nous trouvons,

$$2 = 1 + \omega^2\tau^2 \rightarrow \tau = \frac{1}{\omega} \quad (19)$$

La fréquence $f = 4 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$ correspond à une fréquence angulaire de $2.5 \times 10^5 \text{ rad/s}$, et donc nous avons un temps caractéristique de pulsation $\tau = 4.0 \text{ } \mu\text{s}$.