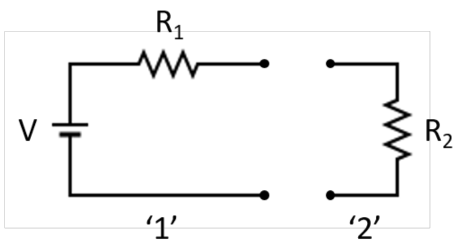
Cours de physique générale III – Dr Fabio Avino

Semestre Automne 2024[1]

Corrigé des exercices - Série 11

Exercice 1 - *niveau 2*

Dans beaucoup de systèmes électroniques, on doit connecter un circuit à un autre, par exemple pour amplifier un signal. Dans ce cas, on voudrait maximiser le transfert du signal, en minimisant les pertes.
Considérons le cas simple dans lequel on n'a que des résistances. On a un circuit '1' qui est la source de notre signal, qui a une 'impédance de sortie' de $Z_1 = R_1$. On veut le connecter à un circuit '2' pour y transférer le signal, avec impédance d'entrée $Z_2 = R_2$.



a) Trouvez la puissance dans le circuit '2' en fonction de R_1, R_2, V.

b) Peut-on maximiser cette puissance transmise au circuit 2, en choisissant bien la valeur de R_2 ? Si oui pour quelle valeur de R_2 ?

Corrigé

a) Une fois connecté au circuit '1', le circuit '2' aura une puissance $P = I^2 R_2$. Avec la loi des mailles, on trouve le courant $I = \frac{V}{R_1+R_2}$, on a alors :

$$P = \frac{V^2 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \tag{1}$$

b) Pour trouver la valeur de R_2 qui maximise P (si un maximum existe bel et bien), il faut étudier plus en détail l'évolution de P par rapport à la variable R_2. Calculons la dérivée dP/dR_2 :

$$\frac{dP}{dR_2} = V^2 \frac{(R_1 + R_2) - 2R_2}{(R_1 + R_2)^3} = \frac{V^2}{(R_1 + R_2)^3}(R_1 - R_2) \tag{2}$$

On voit donc que :
— pour $R_2 < R_1$, $\frac{dP}{dR_2} > 0$ donc P est croissante,
— pour $R_2 > R_1$, $\frac{dP}{dR_2} < 0$ donc P est décroissante.
P a donc bien un maximum, pour $\frac{dP}{dR_2} = 0$, i.e. $R_2 = R_1$.

Le maximum de la puissance est transmis quand l'impédance de sortie d'un système qui transmet est égale à l'impédance d'entrée du système qui reçoit la puissance. Cela s'appelle l'adaptation d'impedance (ou 'impedance matching'), et est valable pour n'importe quelles impédances d'entrée et de sortie, pas seulement lorsque l'on a uniquement des résistances.

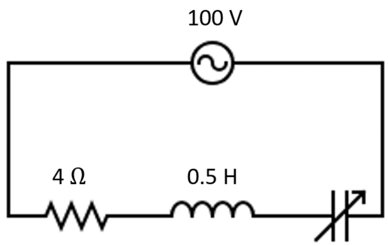
1. crédit : Dr. J. Loizu, Prof. A. Fasoli

Exercice 2 - *niveau 3*

Un circuit RLC contient un condensateur à capacité variable, une inductance et une résistance, comme dans la figure, avec une source AC de fréquence 50 Hz.

a) Trouvez la capacité requise pour que le circuit soit en résonance.

b) Calculez les amplitudes et les phases de tensions à travers l'inductance et le condensateur en résonance.



c) Un facteur Q ('Quality factor') peut être défini pour un circuit oscillatoire, qui caractérise l'amortissement en résonance. Pour ce circuit RLC,

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R}. \tag{3}$$

où ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur. Calculez le facteur Q de ce circuit.
Optionnel : Pour quelle limite de Q le circuit se comporte comme un oscillateur harmonique idéal ?

Corrigé

a) La fréquence de résonance est donnée par,

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{4}$$

Alors pour que la fréquence de la source AC mette en résonance le circuit, on a besoin d'une capacité,

$$C = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 L} = 2.03 \times 10^{-5} \text{ F} = 20.3\mu\text{F}. \tag{5}$$

b) Pendant le cours, on a vu que, pour un circuit RLC série, le courant est de la forme,

$$I(t) = I_0 e^{i\omega t} e^{-i\phi}. \tag{6}$$

En résonance, où $\omega = \omega_0$, on trouve que $I_0 = V_0/R$ et $\phi = 0$, alors,

$$I(t) = \frac{V_0}{R} e^{i\omega_0 t}. \tag{7}$$

L'amplitude du courant est donc $|I| = I_0 = V_0/R = 100/4 = 25$ A, avec une phase de $\phi = 0$ en résonance. Alors on peut dire que le courant et la tension sont en phase.
On sait que la tension à travers l'inductance est $V_L = L\frac{dI}{dt}$. Dérivant notre expression pour le courant, on trouve,

$$V_L = L(i\omega_0 I) = i\omega_0 L I_0 e^{i\omega_0 t}. \tag{8}$$

L'amplitude de la tension de l'inductance est donc,

$$|V_L| = L\omega_0 |I| = 3927.5 \text{ V}. \tag{9}$$

Utilisant l'identité $\exp(i\pi/2) = i$, on peut écrire,

$$V_L = (e^{i\pi/2})\omega_0 L I_0 e^{i\omega_0 t} = \omega_0 L I_0 e^{i\omega_0 t + i\pi/2}, \tag{10}$$

alors la phase du tension de l'inductance est $\phi_L = \pi/2$.
Pour trouver la tension à travers le condensateur, on exprime la tension de la source AC comme la somme des tensions des composants,

$$V(t) = V_L + V_R + V_C. \tag{11}$$

La source AC est oscillatoire et donc on peut l'exprimer comme $V(t) = V_0 e^{i\omega t}$ où $V_0 = 100$ V. On sait aussi que $V_R = IR = \frac{V_0}{R} e^{i\omega_0 t} R = V_0 e^{i\omega_0 t}$ On a donc,

$$V_0 e^{i\omega_0 t} = V_L + V_0 e^{i\omega_0 t} + V_C \tag{12}$$

$$\rightarrow V_C = -V_L \tag{13}$$

Puis, on trouve que $|V_C| = |V_L| = 3927.5$ V. Pour la phase, le signe moins nous dit que V_C a une difference de phase de π par rapport à V_L. On le voit clairement en écrivant V_C comme avant pour l'inductance, avec l'identité $\exp(-i\pi/2) = -i$,

$$V_C = (-i)\omega_0 L I_0 e^{i\omega_0 t} = (e^{-i\pi/2})\omega_0 L I_0 e^{i\omega_0 t} = \omega_0 L I_0 e^{i\omega_0 t - i\pi/2}, \tag{14}$$

alors la phase du condensateur est $\phi_C = -\pi/2$.
Remarque : On peut aussi calculer V_C en intégrant le courant,

$$V_C = \frac{1}{C}\int I(t)dt = \frac{V_0}{RC}\frac{1}{i\omega_0} e^{i\omega_0 t} \tag{15}$$

$$V_C = -i\omega_0 L I_0 e^{i\omega_0 t} = -V_L, \tag{16}$$

ou bien en utilisant l'expression de l'impédance pour un condensateur ($V_C = Z_C I = \frac{I}{i\omega C}$).

c) A partir de l'équation donnée dans l'énoncé, on a,

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = 39.3. \tag{17}$$

Le circuit se comporte comme un oscillateur harmonique idéal quand il n'y a pas d'amortissement, alors pour $R = 0$. Cela est le cas pour $Q \rightarrow \infty$. *Partie optionnel :* On voit ça plus clairement en regardant l'équation differentielle du deuxième ordre qui gouverne le système (partant de $V(t) = V_R + V_L + V_C$),

$$\frac{V_0}{L}\sin(\omega_0 t) = \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q. \tag{18}$$

Un oscillateur harmonique suit un équation differentielle de la forme,

$$0 = \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x, \tag{19}$$

oú x est la variable oscillatoire et ω est la fréquence d'oscillation. Quand on force les oscillations, on a,

$$F(t) = \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x, \tag{20}$$

où $F(t)$ est la source de la force. Alors, on peut comparer avec l'équation differentielle du deuxième ordre de notre système, où $x = q$ et $F(t) = \frac{V_0}{L}\sin(\omega_0)$. On voit qu'on a un terme supplémentaire, $\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}$, qui représente l'amortissement du système. On peut éliminer ce terme, et le circuit se comportera comme un oscillateur harmonique idéal forcé, dans la limite $R \rightarrow 0$ et donc $Q \rightarrow \infty$.

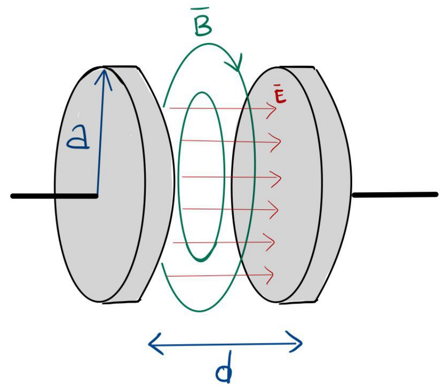
Exercice 3 - *niveau 2*

Considérez un condensateur formé par deux plaques parallèles de rayon $a = 10$ cm, situées à une distance $d = 5$ mm $\ll a$. Le condensateur est soumis à une tension sinusoïdale avec pulsation ω et amplitude V_0.

a) Calculer le champ magnétique généré par le courant de déplacement à l'intérieur du volume compris entre les deux plaques.

b) Calculer le rapport entre l'énergie magnétique associée avec ce champ magnétique et l'énergie associée avec le champ électrique, dans le volume entre les deux plaques.

c) Est-ce qu'on peut tirer une conclusion sur l'importance relative des deux types d'énergie dans un condensateur ?



Corrigé

a) Pour $r < a$, le champ magnétique généré par le courant de déplacement à l'intérieur du volume compris entre les deux plaques est :

$$\oint_C \vec{B}\vec{dl} = \mu_0 i_D = \frac{1}{c^2}\frac{d\Phi_E}{dt} \tag{21}$$

$$2\pi r B(r) = \frac{\pi r^2}{c^2}\frac{dE}{dt} \tag{22}$$

$$B(r) = \frac{r}{2c^2 d}\frac{dV}{dt} \tag{23}$$

Le condensateur est soumis à une tension sinusoïdale d'amplitude V_0 et de pulsation ω : $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$. Donc :

$$\frac{dV}{dt} = \omega V_0 \cos(\omega t) \tag{24}$$

Cela signifie que :

$$B(r) = \frac{r}{2c^2 d}\omega V_0 \cos(\omega t) \tag{25}$$

b) Calculons l'énergie magnétique totale contenue entre les plaques du condensateur :

$$
\begin{aligned}
U_B &= \int_V \frac{1}{2\mu_0} B^2 \, dV = \int_0^a \frac{1}{2\mu_0} B^2(r) \, d2\pi r dr && (26)\\
&= \frac{\pi d}{\mu_0} \int_0^a \frac{r^2}{4c^4 d^2} [\omega V_0 cos(\omega t)]^2 \, r dr && (27)\\
&= \frac{\pi}{\mu_0 4c^4 d} \int_0^a [\omega V_0 cos(\omega t)]^2 \, r^3 dr && (28)\\
&= \frac{\pi}{\mu_0 4c^4 d} [\omega V_0 cos(\omega t)]^2 \frac{a^4}{4} && (29)\\
&= \frac{\pi a^4}{\mu_0 16 c^4 d} \omega^2 V_0^2 cos^2(\omega t) && (30)
\end{aligned}
$$

L'énergie associée au champ électrique est :

$$
\begin{aligned}
U_E &= \int \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \, dV = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{V_0^2}{d^2} sin^2(\omega t) \pi a^2 d && (31)\\
&= \frac{1}{2} \pi a^2 \varepsilon_0 \frac{V_0^2}{d} sin^2(\omega t) && (32)
\end{aligned}
$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
\frac{U_B}{U_E} &= \frac{\pi a^4}{16 \mu_0 c^4 d} \cdot \omega^2 V_0^2 \cdot \frac{2d}{\pi a^2 \varepsilon_0 V_0^2} && (33)\\
&= \frac{a^2 \omega^2}{8 \mu_0 \varepsilon_0 c^4} && (34)\\
&= \frac{1}{8} \left(\frac{a\omega}{c} \right)^2 && (35)
\end{aligned}
$$

c) On voit que le rapport de la densité d'énergie des champs magnétique et électrique dépend du rapport de leur fréquence d'oscillation à la vitesse de la lumière.

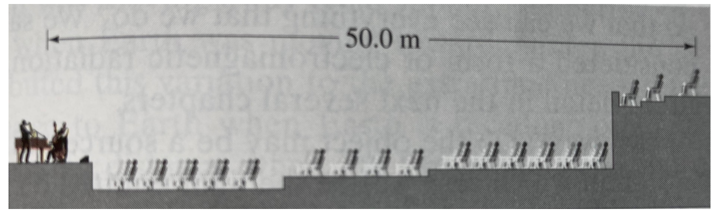
$$
U_B \gg U_E \quad \Leftrightarrow \quad \omega^2 \gg \frac{8c^2}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad f \gg \frac{\sqrt{2}c}{\pi a} \sim 1.35 \cdot 10^9 \text{ Hz} \qquad (36)
$$

Dans notre cas, avec $a = 10$ cm, l'énergie stockée dans le condensateur est principalement de l'énergie magnétique pour des fréquences f plus grandes que quelques GHz, et principalement de l'énergie électrique pour des fréquences plus basses.

Pour des fréquences autour de 1.35 GHz, l'énergie magnétique et l'énergie électrique (qui alternent dans le condensateur) sont du même ordre de grandeur.

Exercice 4 - *niveau 1*

Regardez l'image sur le côté.



a) Qui entendra en premier la chanson : une personne sur le balcon à 50 mètres de la scène, ou une personne à 3000 km de chez elle dont l'oreille est à côté de la radio ?

b) À peu près combien de temps plus tôt ?

On suppose que le micro est très proche du chanteur. La vitesse du son dans l'air à 20° C est de 343 m/s .

Corrigé

a) Tout d'abord, nous calculons le temps mis par l'onde sonore pour parcourir 50 m et atteindre le spectateur dans la salle. Il correspond à la distance $d = 50$ m divisée par la vitesse du son dans l'air à 20° C.

$$t_{salle} = \frac{d}{v_{sound}} = \frac{50m}{343m/s} = 0.146s \tag{37}$$

L'onde électromagnétique transmise à la radio se déplace à la vitesse de la lumière c, elle parcourt donc 3000 km en un temps égal à :

$$t_{radio} = \frac{3000km}{299792.458km/s} \approx 10^{-2}s \tag{38}$$

b) La personne qui écoute la radio entendra environ 0.136 s plus tôt.

$$\Delta t = t_{radio} - t_{salle} \approx 0.01 - 0.146 = -0.136s \tag{39}$$

Exercice 5 - *niveau 2*

Le champ électrique d'une onde électromagnétique plane dans le vide est décrit par :

$$E_x = E_0 cos(kz + \omega t) \quad E_y = E_z = 0 \tag{40}$$

Déterminer :

a) Le champ magnétique associé à cette onde.

b) La direction de propagation de l'onde.

Corrigé

a) Puisque nous parlons d'ondes planes, le champ magnétique B dépendra également d'une seule variable dans l'espace (z) et dans le temps. Cela signifie que toutes les dérivées partielles par rapport à x et y sont nulles. En appliquant la loi de Faraday sous forme locale $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, nous obtenons :

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \tag{41}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z} \tag{42}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \tag{43}$$

$$\tag{44}$$

De plus, en appliquant la loi Ampère-Maxwell $\nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, nous obtenons :

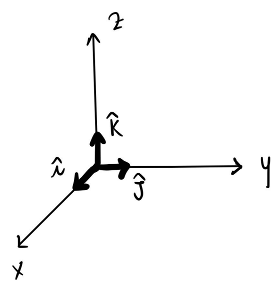
$$-\frac{\partial B_y}{\partial z} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \tag{45}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = 0 \tag{46}$$

$$0 = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \tag{47}$$

$$\tag{48}$$

Les dérivées des composants B_x et B_z par rapport à l'espace et au temps sont nulles. Cela signifie que, à l'exclusion des courants stationnaires, le champ électromagnétique n'a que la composante B_y.
Le champ électrique fourni oscille dans la direction $\hat{\imath}$ (car il n'a que le composant E_x) pendant que le champ magnétique oscille dans la direction $\hat{\jmath}$ (voir le dessin).



Pour calculer l'amplitude de B, nous considérons l'équation (22) : $\frac{\partial B_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z}$.
On connaît l'expression du champ électrique et donc :

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = E_0 k sin(kz + \omega t) \tag{49}$$

En s'intégrant dans le temps, on obtient :

$$B_y = \int E_0 k sin(kz + \omega t)\, dt \tag{50}$$

et donc :

$$B_y = -E_0 \frac{k}{\omega} cos(kz + \omega t) \tag{51}$$

Sachant que $\frac{\omega}{k}$ correspond à v, la vitesse de propagation des ondes :

$$B_y = -\frac{E_0}{v} cos(kz + \omega t) \tag{52}$$

Cela signifie que $B_0 = -\frac{E_0}{v} = -\frac{E_0}{c}$ dans le vide.

b) Pour déterminer la direction de propagation des ondes, nous examinons l'argument de la fonction cosinus qui décrit le champ électromagnétique : $kz + \omega t$.
Cela peut être écrit comme $(kz+\omega t) = k(z+vt)$ et on peut en déduire que l'onde se propage dans la direction $-\hat{z}$. En fait, une fonction générique f qui se propage dans la direction z s'écrit : $f(z - v_z t)$. Dans notre cas $v_z = -\frac{\omega}{k}$, est négatif indiquent une direction de propagation selon $-z$.