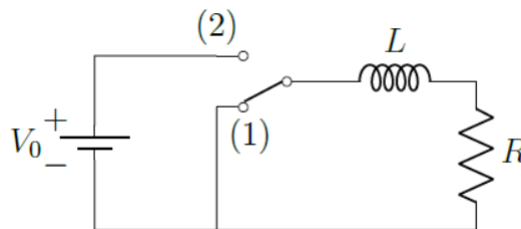


Corrigé des exercices - Série 10

Exercice 1 - niveau 1

Un circuit RL, comme celui sur la figure, commence à être chargé (interrupteur dans la position (2) du chemin) avec un courant initial nul. Après $t_1 = 2$ secondes, un courant de 1.5 A passe dans le circuit et une énergie de 2 J est stockée dans l'inductance. En sachant que le temps caractéristique du système est $\tau = 50\text{ ms}$:



a) Quelle est la tension V_0 appliquée au circuit ?

A l'instant $t_2 = 2t_1$, l'interrupteur revient à la position (1).

b) Dérivez les équations d'évolution du courant du circuit et la tension $V_L(t)$ aux extrémités de l'inductance.

c) Après combien de temps (t_3) à partir du début de la phase de décharge, la tension $V_L(t)$ est réduite de la moitié (en valeur absolue) par rapport à celle au temps t_2 ?

Corrigé

a) A partir de la valeur d'énergie stockée, et de la valeur du courant après 2 s $i(t = 2\text{ s}) = 1.5\text{ A}$, nous pouvons obtenir l'inductance du circuit :

$$U_L = \frac{1}{2}Li^2 \Rightarrow L = \frac{2U}{i^2} \simeq 1.78\text{ H} \quad (1)$$

Aussi, en sachant le temps caractéristique $\tau_L = L/R$, nous pouvons obtenir la résistance :

$$\tau_L = L/R \Rightarrow R = \frac{L}{\tau_L} \simeq 36\ \Omega \quad (2)$$

L'équation de la charge d'une inductance, avec condition initial $i(t = 0\text{ s}) = 0$, est donnée par :

$$i(t) = i_0(1 - e^{-t/\tau_L}) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-t/\tau_L}) \quad (3)$$

Nous pouvons donc extraire la valeur V_0 :

$$V_0 = \frac{i(t_1)R}{(1 - e^{-t_1/\tau_L})} \simeq 53\text{ V} \quad (4)$$

b) Pendant la décharge d'un circuit RL (qui commence au temps $t = 0\text{ s}$), le courant suit l'équation suivante :

$$i(t) = i(0)e^{-t/\tau} \quad (5)$$

1. crédit : Dr. J. Loizu, Prof. A. Fasoli

Dans ce cas, la valeur initial $i(0)$ à partir de laquelle commence la décharge est celle atteinte pendant la charge au temps t_2 :

$$i(0) = i(t_2) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-t_2/\tau_L}) \simeq 1.5 A \quad (6)$$

L'équation de la tension $V_L(t)$ est :

$$V_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = -i(0)R e^{-t/\tau_L} \quad (7)$$

- c) Pour que la valeur pendant la décharge soit la moitié en valeur absolue que celle au début de la décharge (en t_2), il faut que :

$$|V_L(t_3)| = i(0)R e^{-t_3/\tau_L} = \frac{1}{2} |V_L(t=0)| = \frac{1}{2} i(0)R \quad (8)$$

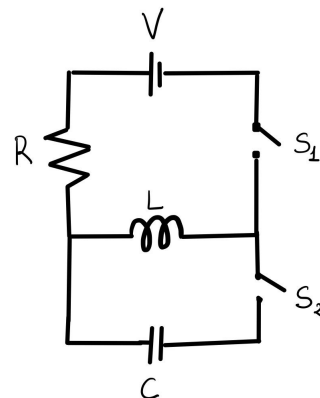
Nous pouvons résoudre cette équation par rapport à t_3 :

$$t_3 = -\tau_L \ln \frac{1}{2} \simeq 35 ms \quad (9)$$

Exercice 2 - niveau 2

Dans le circuit de la figure, l'interrupteur S_1 est fermé pendant 1 seconde. Puis S_1 est ouvert et S_2 est fermé simultanément à $t = 1$ s. On considère $C = 4\mu F$, $V = 3$ V, $L = 1$ H, $R = 1 \Omega$.

- Quel courant circule dans la bobine à $t = 1$ s ?
- Calculez l'énergie stockée initialement (à $t = 1$ s) dans la bobine et en déduire la charge maximale que le condensateur va emmagasiner.



Corrigé

- a) Le potentiel du maillage supérieur suit la loi :

$$V = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (10)$$

Donc,

$$i(t) = \frac{V}{R}(1 - e^{-t/\tau}) \quad (11)$$

avec $\tau = \frac{L}{R} = 1$ s. Au temps $t = 1$ s,

$$i(1) = i_0 = \frac{V}{R}(1 - e^{-t/\tau}) = \frac{3}{1}(1 - e^{-1/1})A = 1.896A \quad (12)$$

b) L'énergie initialement stockée dans la bobine est calculée comme :

$$u_L = \frac{1}{2}Li_0^2 = 1.797J \quad (13)$$

Pour $t > 1s$, on a un circuit LC et donc l'énergie oscille entre l'inductance et le condensateur, avec $u_{tot} = u_C + u_L = const.$ Initialement, $u_C = 0$ et donc u_{tot} est égal à l'énergie stockée dans l'inductance à $t = 1s$. L'énergie maximale que le condensateur va emmagasiner et donc $u_C^{max} = u_{tot}$ (quand $u_L = 0$) et ceci correspond au moment où la charge accumulée dans les armatures est maximale.

$$u_C^{max} = \frac{1}{2} \frac{Q_{max}^2}{C} = u_{tot} = \frac{1}{2}Li_0^2 \quad (14)$$

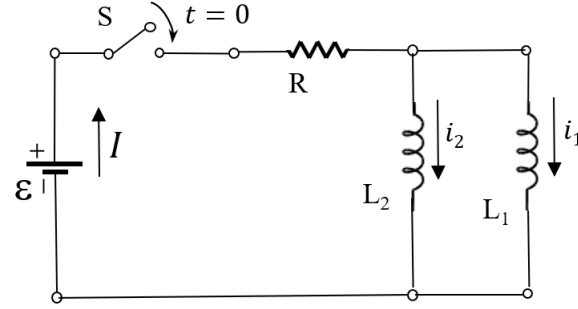
et donc

$$Q_{max} = \sqrt{LC}i_0 = 3.792mC \quad (15)$$

Exercice 3 - niveau 3

Dans le circuit de la figure, l'interrupteur S est fermé à $t = 0$.

- Écrire l'équation différentielle vérifiée par le courant I , et en déduire le circuit RL équivalent.
- Calculez l'expression des courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$ circulant dans les deux inductances.



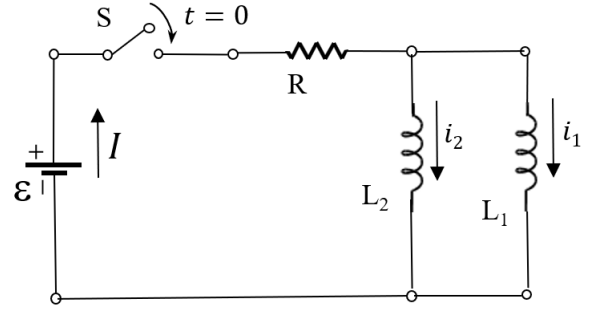
Corrigé

- La loi des mailles dans la boucle externe du circuit, sur la boucle de droite, et la loi des noeuds donnent respectivement :

$$\mathcal{E} - RI - L_1 \frac{di_1}{dt} = 0 \quad (16)$$

$$L_1 \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} = 0 \quad (17)$$

$$I = i_1 + i_2 \quad (18)$$



Avec les équations (17) et (18) on trouve une relation entre di_1/dt et dI/dt :

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} = L_2 \frac{dI}{dt} - L_2 \frac{di_1}{dt} \quad (19)$$

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{dI}{dt} \quad (20)$$

que l'on injecte dans l'équation (16) pour en déduire l'équation différentielle vérifiée par I :

$$\mathcal{E} - RI - \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \frac{dI}{dt} = 0 \quad (21)$$

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R(L_1 + L_2)}{L_1 L_2} I = \frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2} \mathcal{E} \quad (22)$$

Cette équation correspond à l'évolution d'un circuit RL_{eq} , avec L_{eq} l'inductance donnée (comme on pouvait s'y attendre) par la combinaison en parallèle de L_1 et L_2 :

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \quad (23)$$

- L'évolution de I est typique du courant dans un circuit RL :

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (24)$$

où la constante de temps est définie comme :

$$\tau = \frac{L_{eq}}{R} = \frac{L_1 L_2}{R(L_1 + L_2)} \quad (25)$$

Pour le courant i_1 , à partir de l'équation (20), nous avons :

$$\frac{di_1(t)}{dt} = \frac{L_2}{(L_1 + L_2)} \frac{dI}{dt} \quad (26)$$

$$= \frac{\mathcal{E}}{L_1} e^{-t/\tau} \quad (27)$$

$$i_1(t) = \int_0^t \frac{di_1(t)}{dt} dt = -\frac{L_2}{R(L_1 + L_2)} \mathcal{E} e^{-t/\tau} + const \quad (28)$$

À $t = 0$, nous avons que $i_1(0) = 0$, condition à partir de laquelle nous pouvons déterminer la constante d'intégration :

$$const = \frac{L_2}{R(L_1 + L_2)} \mathcal{E} \quad (29)$$

Et maintenant nous pouvons enfin écrire l'expression pour l'évolution temporelle de i_1 et i_2 :

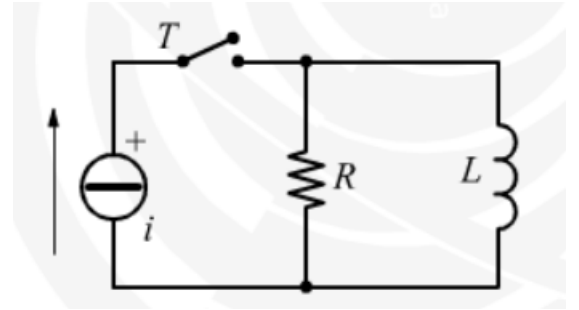
$$i_1(t) = \frac{L_2}{R(L_1 + L_2)} \mathcal{E} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (30)$$

$$i_2(t) = \frac{L_1}{R(L_1 + L_2)} \mathcal{E} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (31)$$

Exercice 4 - niveau 2

Dans le circuit sur la figure, un générateur de courant (un appareil qui peut fournir un courant constant $i = const$) est connecté à travers un interrupteur T à une résistance $R = 100 \Omega$ et à une inductance $L = 200 H$ en parallèle. L'interrupteur T est fermé à $t = 0$ s.

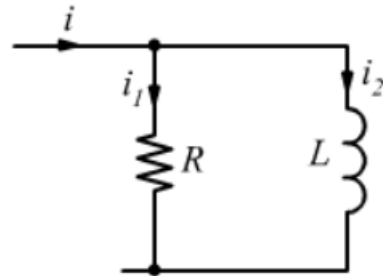
- Écrivez l'équation de l'évolution temporelle du courant qui passe dans l'inductance.
- À quel temps le courant qui passe dans la résistance est égal au courant qui passe dans l'inductance ?



Corrigé

- Quand l'interrupteur est fermé, un courant $i = const$ est envoyé depuis le générateur, qui se divise en i_1 à travers R , et i_2 à travers L . Avec la loi de Kirchhoff sur le nœud, nous pouvons écrire :

$$i = i_1 + i_2 \quad (32)$$



La loi de Kirchhoff dans la maille de droite nous indique que :

$$Ri_1 - L \frac{di_2}{dt} = Ri_1 + L \frac{di_1}{dt} = 0 \quad (33)$$

ou nous avons utilisé l'éq. (32) :

$$\frac{d(i = \text{const})}{dt} = 0 = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \Rightarrow \frac{di_1}{dt} = -\frac{di_2}{dt} \quad (34)$$

Nous pouvons résoudre l'équation en $i_1(t)$ avec l'intégrale, pour obtenir :

$$i_1(t) = i_0 e^{-t/\tau} \quad \tau = L/R \quad (35)$$

avec $i_0 = i$ la valeur du courant à travers la résistance à $t = 0$ s, car au début, tout le courant passe à travers la résistance. Nous pouvons obtenir l'équation pour le courant i_2 :

$$i_2(t) = i - i_1(t) = i(1 - e^{-t/\tau}) \quad (36)$$

b) Il suffit de poser l'égalité :

$$i_1(t) = i_2(t) \Rightarrow i e^{-t/\tau} = i(1 - e^{-t/\tau}) \quad (37)$$

ce qui donne :

$$t = \frac{L}{R} \ln 2 \simeq 1.4 \text{ s} \quad (38)$$