

Physique Générale III

Prof. A. Fasoli

Automne 2023

Table des matières

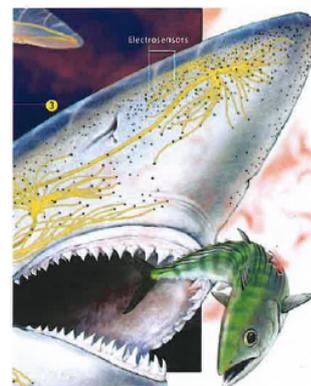
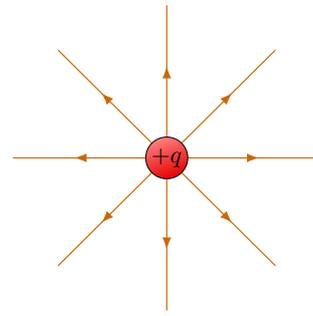
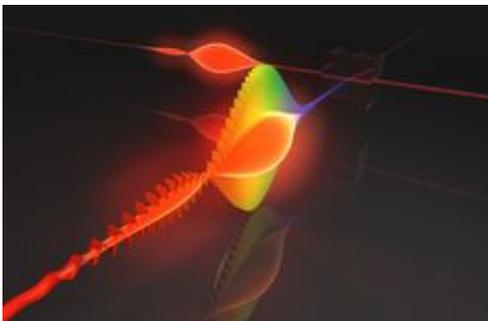
1	Charge électrique et champ électrique	1
1.1	Échelles spatiales et forces fondamentales	2
1.2	La force électromagnétique et le photon	2
1.3	Introduction à l'électrostatique : la charge électrique et l'induction électro- statique	5
1.4	La charge et structure de la matière	8
1.5	La loi de Coulomb	10
1.6	Principe de superposition et distribution de charges	13
1.7	Le champ électrique	15
1.8	La polarisation et les dipôles électriques	19
2	Loi de Gauss et ses conséquences	25
2.1	Le flux électrique	26
2.2	La loi de Gauss (~ 1820)	28
2.3	Conséquences de la loi de Gauss	32
3	Potentiel électrique	37
3.1	Energie potentielle électrique	38
3.2	Le potentiel électrique	40
3.3	Propriétés des conducteurs dans des champs électrostatiques	44
3.4	Le champ électrique comme dérivée du potentiel	47
3.5	Surfaces équipotentielles	48
3.6	Capacité électrique	53
4	Capacité électrique, condensateurs et diélectriques	57
4.1	Capacité électrique et stockage d'énergie	58
4.2	Condensateurs dans les circuits électriques	59
4.3	Diélectriques et polarisation	60
5	Courant électrique, résistance, puissance et circuits DC	67
5.1	Le courant électrique	68
5.2	Résistivité et résistance électriques	68
5.3	Résistance électrique et loi d'Ohm	73

5.4	Puissance électrique	74
5.5	Force électromotrice	76
5.6	Circuits électriques à courant continu (DC) et combinaisons de résistances	79
5.7	Lois de Kirchhoff	80
5.8	Circuits RC et applications	84
Appendix		91
5.A	Discussion sur la force agissant sur diélectrique dans condensateur	91
6	Ionisation et décharges - note de recherche : plasmas et fusion	95
6.1	Ionisation	96
6.2	Décharges électriques	96
6.3	<i>(facultatif) Introduction aux plasmas et à l'énergie de fusion</i>	99
7	Magnétisme et sources de champ magnétique	101
7.1	Un nouveau type d'interaction : champ magnétique et force de Lorentz .	102
7.2	Interprétation avec la théorie de la relativité	102
7.3	Mouvement des particules chargées dans un champ magnétique	104
7.4	Sources de champ magnétique : loi de Biot-Savart	106
7.5	Sources de champ magnétique : loi d'Ampère	111
7.6	Applications de la loi d'Ampère	118
7.7	Dipôles magnétiques et moment magnétique	120
7.8	Champs magnétiques dans la matière	126
8	Induction électromagnétique et loi de Faraday	133
8.1	Découverte de l'induction magnétique	134
8.2	Lois de Faraday et de Lenz	134
8.3	Courants de Foucault	137
8.4	Transformateurs et générateurs	138
9	Inductance et circuits AC	141
9.1	Inductance mutuelle et 'self'	142
9.2	Circuits RL	145
9.3	Énergie magnétique	148
9.4	Circuits AC et impédance complexe	149
9.5	Puissance dans circuits AC	152
9.6	Circuits RLC et introduction aux oscillations électromagnétiques	153
10	Equations de Maxwell et ondes électromagnétiques	161
10.1	Oscillations électromagnétiques	162
10.2	Courant de déplacement	163
10.3	Équations de Maxwell en forme intégrale et différentielle	165
10.4	Ondes électromagnétiques à partir des équations de Maxwell	168

10.5	L'équation d'onde et la solution générale	170
10.6	Transformée de Fourier et ondes planes	172
10.7	Ondes planes, fréquence, période, nombre d'onde et longueur d'onde . . .	176
10.8	Densité d'énergie dans les ondes électromagnétiques, vecteur de Poynting, intensité et pression de radiation	181
11	La lumière comme onde	189
11.1	Principe de Huygens	190
11.2	Ondes dans un diélectrique et réfraction	191
11.3	Génération d'ondes (discussion sur l'expérience "micro-ondes")	194
11.4	Polarisation	196
11.5	Superposition d'ondes électromagnétiques : ondes stationnaires	197
11.6	Superposition d'ondes électromagnétiques : interférence	200
11.7	Superposition d'ondes électromagnétiques : diffraction	207
11.8	Relation entre diffraction et transformée de Fourier	211
11.9	Diffraction de rayons-X	212
11.10	Diffusion des ondes électromagnétiques	214

Chapitre 1

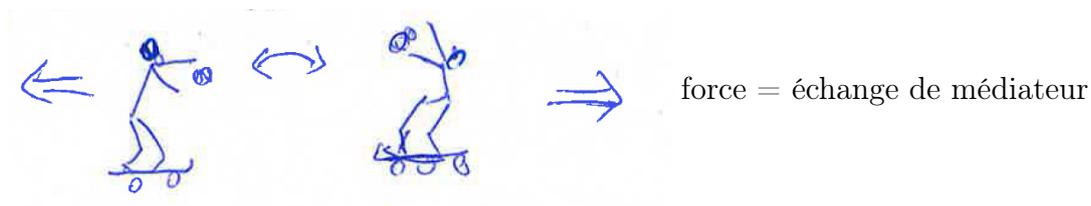
Charge électrique et champ électrique



1.1 Échelles spatiales et forces fondamentales

L'être humain a toujours voulu l'univers autour de lui dans les deux directions : de l'infinitésimale (très petit), au plus grand. Il s'est rendu compte en faisant cela que la chose la plus importante est l'ensemble des "interactions" entre éléments physiques, encore plus que les éléments eux-mêmes. Différentes échelles spatiales sont associées à différentes forces fondamentales. Les forces fondamentales sont à leur tour liées à différents propagateurs. Les propagateurs agissent sur des propriétés particulières.

- Grande échelle : $\sim 10^{28} - 10^5$ m (intensité $\times 10^{-35}$) gravitation
propagateur : graviton (masse = 0)
agit sur masse
- Échelle intermédiaire : $\sim 10^5 - 10^{-15}$ m (x1) force électromagnétique
propagateur : photon (masse = 0)
agit sur charge
- Échelle nucléaire : $\sim 10^{-11} - 10^{-20}$ m (x100) force forte (ou nucléaire)
propagateur : gluon (masse = 0, mais "couleur")
agit sur quarks
- Échelle subnucléaire : $\leq 10^{-17}$ m ($\times 10^{-7}$) force faible
propagateur : boson faible (grande masse)
agit sur tout

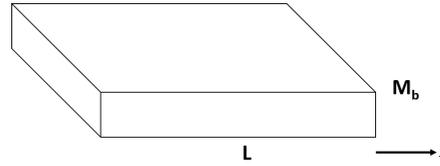


1.2 La force électromagnétique et le photon

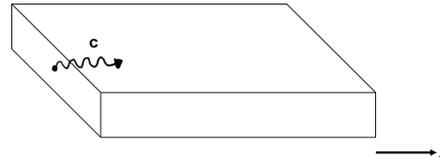
Le but de ce cours est d'étudier les phénomènes et les lois de l'électromagnétisme, donc liés au photon et à la charge. Comme l'intensité de la force électromagnétique est grande, et sa portée est longue, son influence sur notre monde et notre vie est très significative. Le photon, son propagateur, n'a pas de masse au repos (ou $m_{\text{photon}} \leq 10^{-48}$ kg, limite expérimentale), mais il a de la quantité de mouvement, liée à son énergie : $p = \frac{E}{c}$. Ce fait peut en effet être utilisé pour expliquer de façon assez intuitive l'équivalence entre masse et énergie.

Équivalence masse - énergie : démonstration “intuitive”

- Boîte isolée de masse M_b , longueur L (énergie et quantité de mouvement sont conservées!)



- Un côté de la boîte émet un photon d'énergie E . Ceci correspond à une quantité de mouvement (sans masse) : $p_{\text{photon}} = \frac{E}{c}$



- Comme \vec{p}_{tot} doit être conservée, la boîte recule, tel que :

$$M_b v_b = -p_{\text{photon}} = -\frac{E}{c} \Rightarrow v_b = -\frac{E}{M_b c}$$



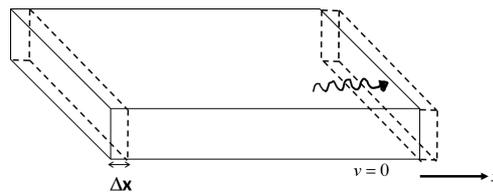
- Le photon parcourt une distance L mais celle parcourue par la boîte :

$$c\Delta t = L + v_b\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{L}{c - v_b}$$

$$\text{La distance parcouru par la boîte est } \Delta x = v_b\Delta t = v_b \frac{L}{c - v_b} = \frac{L}{c/v_b - 1} = \frac{L}{-c^2 M_b / E - 1}$$

- Quand le photon tape sur la paroi droite de la boîte, lui redonne la même quantité de mouvement, et la boîte s'arrête.

- Le centre de masse de la boîte semble avoir bougé! (de Δx)
 \Rightarrow impossible dans un système isolé!



Einstein : si la boîte émet de la lumière (photon), elle doit ‘perdre’ de la masse (le photon a de l'énergie), M_{pulse} , qu'elle ‘redonne’ de l'autre côté de la boîte. Valeur de $M_{\text{pulse}} = ?$
 Imposons que le centre de masse du système entier (boîte+photon) reste fixe :

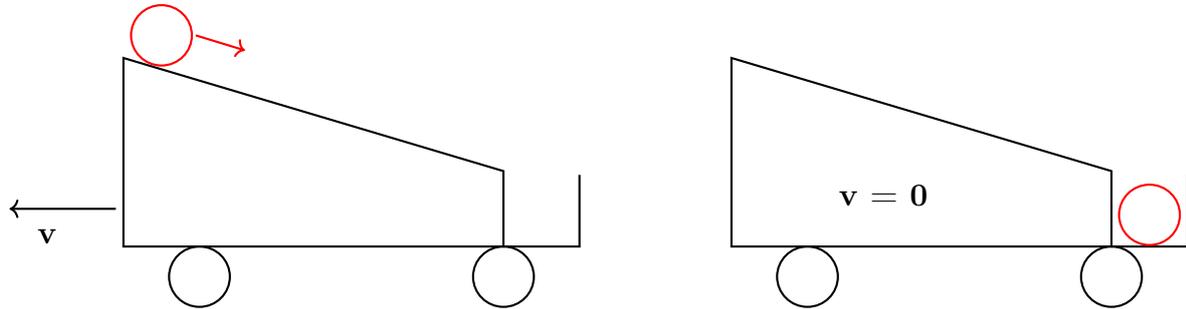
$$\begin{aligned} \Delta x_{\text{CdM}}^{\text{tot}} = 0 &\Rightarrow M_b \Delta x + M_{\text{pulse}}(L + \Delta x) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow M_{\text{pulse}} &= -M_b \frac{\Delta x}{(L + \Delta x)} = \frac{M_b}{(-1 - L/\Delta x)} = \frac{M_b}{\{-1 + \frac{L}{L}[1 + c^2 M_b/E]\}} = \frac{E}{c^2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Autrement dit :

$$E = M_{\text{pulse}} c^2 \quad (1.2)$$

Si un corps émet de l'énergie sous forme de radiation, il ‘perd’ une masse de $M_{\text{pulse}} = \frac{E}{c^2} \Rightarrow$ masse et énergie sont équivalentes!

Note 1.1. On peut penser à une analogie mécanique. La boîte à roulettes bouge lorsque la balle rouge descend.



La boîte s’arrête lorsque la balle rouge reste bloquée de l’autre côté.

Note 1.2. L’exemple du photon dans la boîte nous rappelle que la lumière (on verra, c’est une onde électromagnétique) a de la quantité de mouvement. En principe, on pourrait bouger par effet fusée en “lançant” de la lumière (si on allume un pointeur laser, on se fait propulser dans la direction opposée à celle de la lumière du faisceau laser).

La théorie de l’électromagnétisme est un des succès les plus éclatants du cerveau humain, et un qui, comme déjà dit, a une énorme influence sur notre vie. L’électromagnétisme “fonctionne” à tous les niveaux!

Les observations des phénomènes électriques et magnétiques ont couvert des milliers d’années, mais seulement dans la 2^{ème} moitié du XIX siècle elles ont été “condensées” dans une structure théorique unique : les équations de Maxwell, un système simple et élégant, presque une œuvre d’art!

Maxwell (~ 1865)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.4)$$

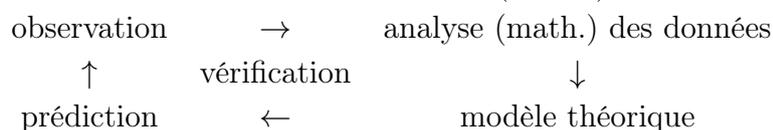
À la fin de notre cours, on connaîtra et on comprendra ces équations et leurs implications. On sera capable aussi de les utiliser pour calculer différentes quantités d’intérêt pratique dans beaucoup de situations réelles. Nous allons procéder avec cette construction morceau par morceau, en suivant le même chemin qui a été parcouru historiquement.

Nous observerons les phénomènes.

Nous tâcherons d’en extraire une loi physique en termes mathématiques.

Nous discuterons des conséquences de cette loi.

Méthode de Galileo (~1600)



Bertrand Russel (~ 1900) : “Aristote aurait pu éviter sa fausse théorie que les femmes ont moins de dents que les hommes, simplement en faisant la simple manip de demander à sa femme (ou sa soeur...) d’ouvrir sa bouche et compter...”

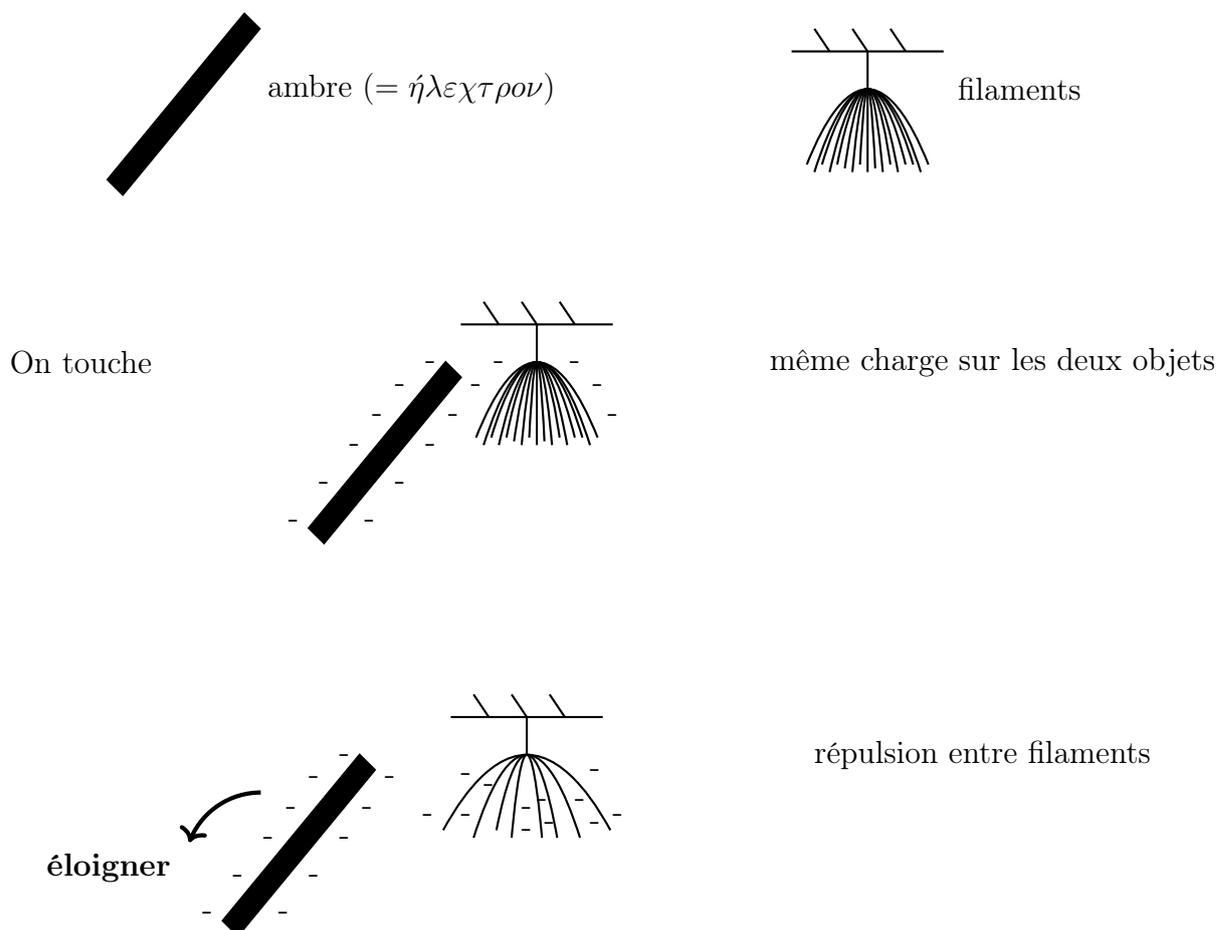
Einstein (~ 1934) : “La pure pensée logique ne peut nous donner une connaissance du monde. Toute connaissance commence avec l’expérience et termine avec l’expérience.”

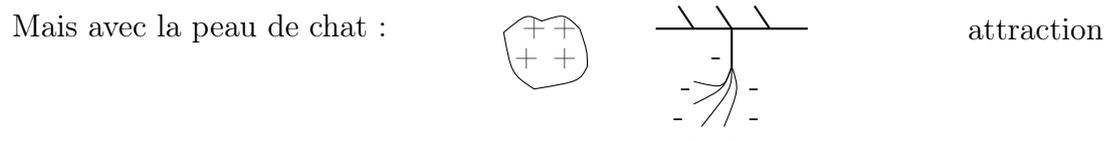
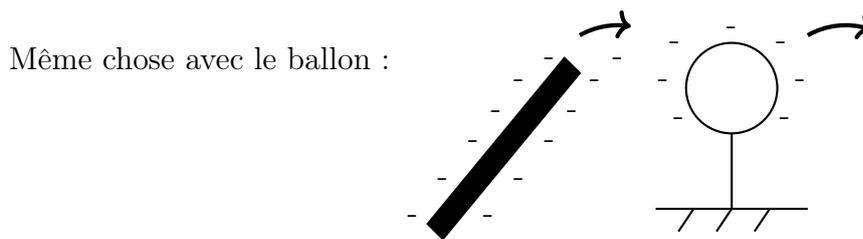
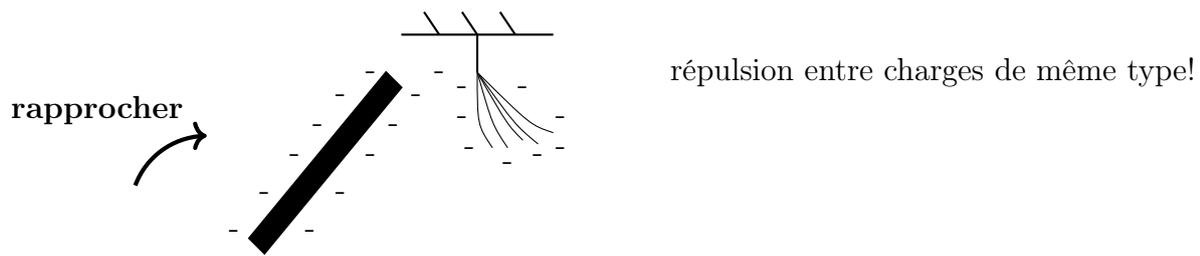
1.3 Introduction à l’électrostatique : la charge électrique et l’induction électrostatique

Tout commença en Grèce (ancienne). On observait que certains matériaux, ou combinaisons de matériaux, avaient des propriétés ‘étranges’. Un de ces matériaux/objets était l’ambre (en grec, électron).

Si on prend un bâton d’ambre (ou équivalent) et une peau de chat, on frotte le bâton avec la peau de chat, et on approche des filaments couverts d’une couche conductrice, on n’observe pas d’effet. Mais, si on touche les filaments, ils s’éloignent les uns des autres. Si on éloigne le bâton et puis on le rapproche, on a répulsion !

Interprétation





Conclusion #1 : il y a deux types de charges : + -

Conclusion #2 : la force peut être attractive ou répulsive.

Donc la matière a une nouvelle propriété : la **charge électrique** ;

A la charge est associée une force : la **force électrique** ;

Deux types de charges → **force attractive** ou **répulsive** ;

Note 1.3. *Les Grecs anciens se sont arrêtés là, car sans la méthode scientifique ils ne pouvaient pas établir les lois précises et mathématiques pour ces phénomènes.*

Note 1.4. *Plus tard, et jusqu'au 18^{ème} siècle, on pensait que la charge était associée à un fluide. Depuis, on a compris qu'elle est bien entendu associée à des particules.*

Question : quand je frotte la peau de chat sur l'ambre (ou équivalent), est-ce que je crée des charges ou je les déplace simplement d'un objet à l'autre ?

⇒ La charge est déplacée, elle n'est pas créée ni détruite.

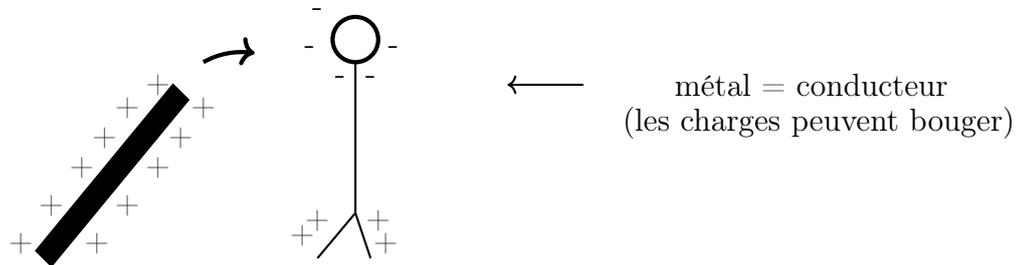
La charge est conservée ;

La charge a un signe +, -

Note 1.5. *Ces observations expérimentales nous rappellent aussi que la force électromagnétique agit sur des distances macroscopiques, et qu'elle est bien plus 'intense' que la force gravitationnelle.*

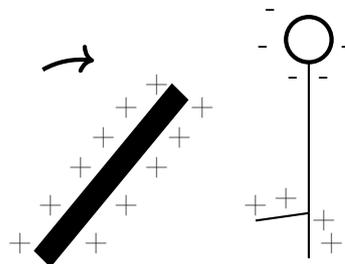
Électrostatique : les phénomènes ne dépendent pas du mouvement des charges.

Regardons les propriétés de la force électrique. Comment est-ce qu'elle dépend de la quantité de charge et de la distance? On visualise la force par un 'électroscope'.



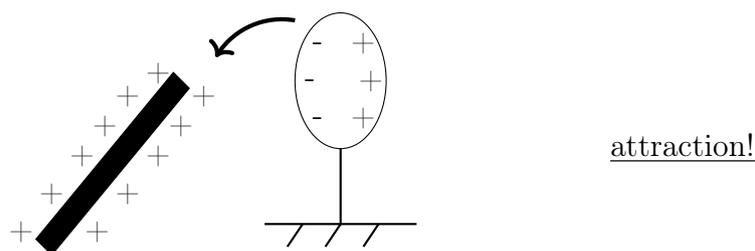
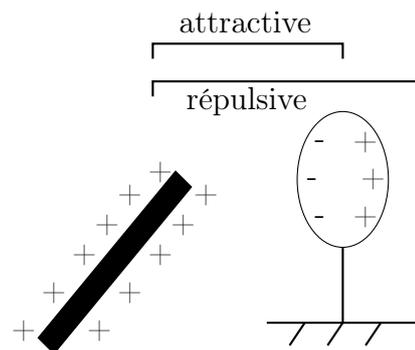
La force se manifeste sans contact! L'électroscope reste neutre, mais les charges sont déplacées : c'est "induction" électrostatique [= "séparation de charge dans conducteur"]

si on approche le bâton chargé, l'effet augmente



Idée : Si les charges peuvent être séparées sans toucher (dans un conducteur), et si la force augmente lorsque la distance diminue, on pourrait avoir une force nette sur un conducteur même sans toucher! Ça a l'air bizarre mais ça arrive dans la réalité!

Par exemple, on le voit avec une balle conductrice



C'est une confirmation que la force diminue avec la distance.

Et plus on met de charges sur l'électroscope, plus on voit que la force augmente proportionnellement à la charge.

Nous mettrons ensemble ces informations dans une loi physique (la loi de Coulomb, 1786).

1.4 La charge et structure de la matière

La force électrostatique est responsable de la stabilité de la matière.

Ex. : atome d'hydrogène

proton $m_p \sim 1.6 \times 10^{-27}$ kg
 électron $m_e \sim 9.3 \times 10^{-31}$ kg

Proton et électron ont des masses très différentes, mais la même charge : $\begin{cases} +e \\ -e \end{cases}$; e est

la plus petite charge observée dans la nature.

La charge est mesurée en Coulombs : $[q] = \text{C}$.

$$e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \quad [1 \text{ C} \rightarrow \text{beaucoup d'électrons!}]$$

Toutes les charges sont multiples de e : $Q = Ne, N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

On peut voir cela comme une version 'microscopique' du concept de la conservation de la charge : 'charger' un objet veut dire déplacer des électrons (ou des ions).

En résumé, nous avons vu que la matière possède une propriété nouvelle : la charge.

A la charge, est associée une force (électrique). Il y a deux types de charges ("+" ou "-") \leftrightarrow force répulsive ou attractive. Et la charge est conservée.

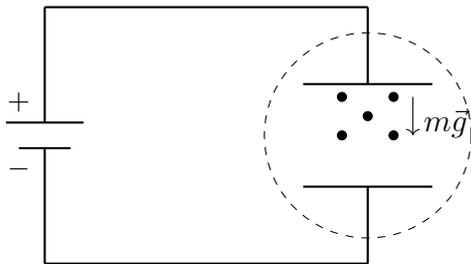
"Charger" un objet en effet correspond à déplacer des charges. Microscopiquement, cela veut dire déplacer des électrons (plus mobiles ou des ions), car la matière est faite d'électrons en orbite autour des noyaux.

+e proton
 -e électron

Électrons et protons sont des masses très différentes, mais la même charge. Toutes les charges sont des multiples des e :

$$Q = Ne \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Une dernière observation sur la charge : sa valeur est discrète (“quantisée”). Elle apparaît toujours en multiples entiers de e , qui est la charge de base. Ceci a été déterminé lors d’une fameuse expérience par Millikan en (1909). L’idée était de charger des petites gouttes et de mesurer leur chute dans un système qui produise une force électrique connue (plus la gravité, évidemment).



On ajuste le force électrique [la tension, donc le champ] pour que les gouttelettes ne tombent pas. Et effet c’était une expérience controversée ... Il avait considéré seulement un sous-ensemble de gouttelettes parmi toutes celles qui étaient produites et peut être “retouché” un peu les résultats ...

Les atomes sont gardés ensemble par la force de Coulomb.

Pourquoi, vu l’attraction entre proton et électron, l’atome ne collapse pas ?

→ parce que l’électron bouge ...

Qu’est-ce qu’il se passe si on arrête un électron dans un atome ?

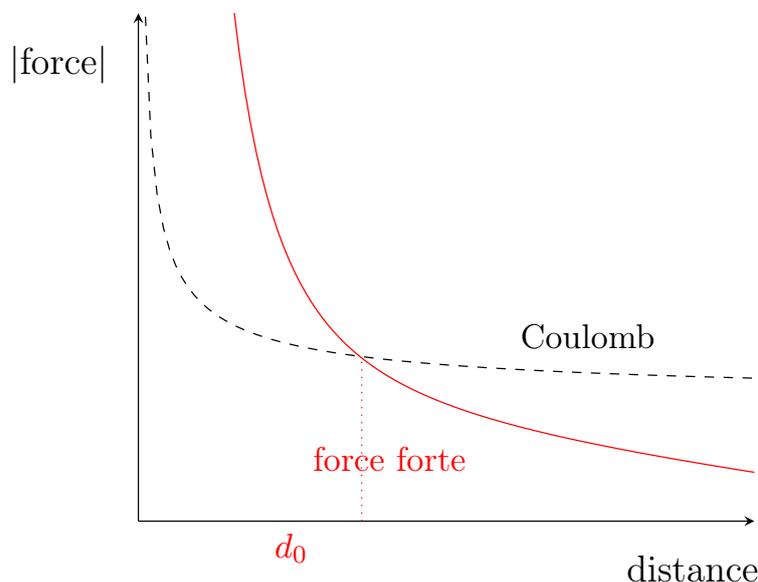
→ impossible de l’arrêter à un endroit à cause du principe d’indétermination de Heisenberg

$$\Delta p \Delta x \geq \hbar \quad (\text{si } \Delta x \text{ est petit, } \Delta p \text{ ne peut pas l'être!})$$

Et les autres éléments (que l’hydrogène) ? Le noyau n’a plus qu’un proton !

Comment restent-ils ensemble ? C’est une autre force qui les garde ensemble, la force forte.

Alors, peut-on avoir des noyaux arbitrairement grands ? Non, car à plus grandes distances, la force de Coulomb (répulsive) gagne !

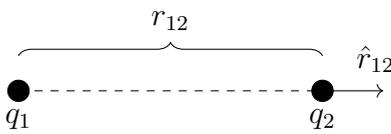


1.5 La loi de Coulomb

Loi de Coulomb (1786)

Nos premières observations nous ont permis de conclure que la force électrique $\propto \begin{cases} q_1 q_2 \\ \text{décroit avec} \\ \text{distance} \end{cases}$

L'expression de la force électrostatique ("de Coulomb") entre deux charges ponctuelles q_1 et q_2 est



$$\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{1 \rightarrow 2} \quad (\text{loi de Coulomb})$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$$

$$\epsilon_0 = 8.8 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$$

et le "Coulomb" C est l'unité de mesure de la charge.

Note 1.6. $\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$ est le vecteur unitaire qui donne direction et sens entre q_1 et q_2 ; $|\hat{r}_{12}| = 1$.

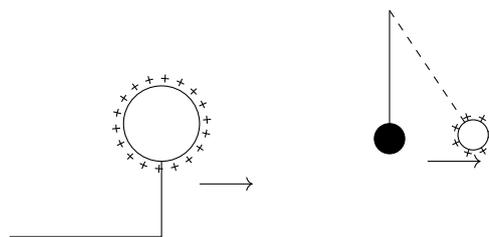
Note 1.7. $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ $\rightarrow 1 \text{ C}$ est une énorme quantité d'électrons...

Nous voulons vérifier expérimentalement la loi de Coulomb, et notamment la dépendance de la force avec la distance, qui est une propriété fondamentale.

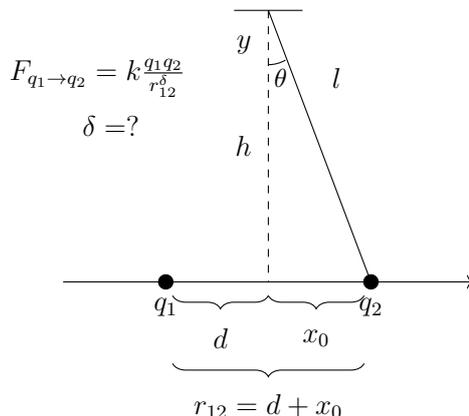
En effet il a fallu attendre ~ 2000 ans entre la découverte des phénomènes et la conclusion quantitative que $F \propto \frac{1}{r^2}$!

Démonstration de la loi de Coulomb

Pour faire l'expérience on se base sur une force connue, la gravité



Théorie



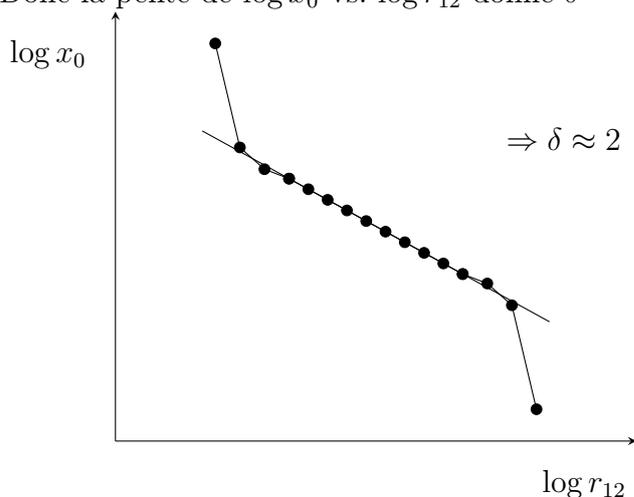
Équilibre des forces, tenant compte de la tension de la corde à laquelle q_2 est attachée (\vec{t})

$$(x) |F_{q_1 \rightarrow q_2}| = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^\delta} = |t_x| = t \sin \theta$$

$$(y) mg = |t_y| = t \cos \theta \quad \Rightarrow \quad t = \frac{mg}{\cos \theta}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^\delta} = t \sin \theta = \frac{mg}{\cos \theta} \sin \theta = mg \tan \theta \approx mg \sin \theta = mg \frac{x_0}{l} \\ \text{(petits angles)} & \quad \text{si } \theta \ll 1, \\ \tan \theta \simeq \sin \theta & \Rightarrow x_0 = \underbrace{\left[k \frac{q_1 q_2 l}{mg} \right]}_{A=\text{const.}} r_{12}^{-\delta} \xrightarrow{\log} \log x_0 = \log A - \delta \log r_{12} \end{aligned}$$

Donc la pente de $\log x_0$ vs. $\log r_{12}$ donne δ



Pourquoi le graphe semble s'éloigner de $\delta = 2$ à petites et à grandes distances? Discussion

- balles \neq points \rightarrow effet d'induction (distribution des charges sur les balles);
- approx. des petits angles plus valables, perte de charge à travers l'humidité de l'air, ...

Note 1.8. *Naturellement, si*

$$\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \quad , \quad (1.5)$$

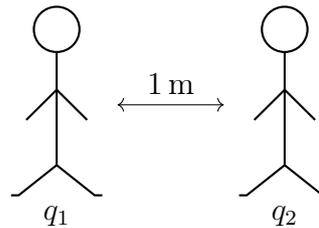
$$\vec{F}_{q_2 \rightarrow q_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{21} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} = -\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2} \quad \text{principe action et réaction} \quad (1.6)$$

Nous avons vu que, sur les différentes échelles spatiales, il y en a beaucoup au niveau sub-atomique qui sont “vides” : il n’y a rien dans l’“énorme” (proportionnellement à la taille des particules) espace entre électrons et noyau. Nous sommes essentiellement fait de vide ...

La force d’attraction est équilibrée sur ces distances par le mouvement (donc l’effet centrifuge) des électrons. Mais il y a un autre type d’équilibre remarquable : nous sommes faits de cellules, qui sont faites de molécules, faites d’atomes, avec charges + et - : l’équilibre entre charges + et - dans ce système complexe est extraordinairement précis !

S’il n’y avait pas un équilibre si précis, il y aurait une force gigantesque → application numérique de la loi de Coulomb.

Ex. deux personnes à 1 m de distance ; admettons que chacune ait un “déséquilibre” de charges positives et négatives de 1% → force ?



Corps humain : $\sim 10^{28}$ atomes ; prenons chaque atome avec $Z = 5$ en moyenne (5 charges “e” de chaque signe).

$$q_{tot} \sim 5 \cdot 10^{28} e;$$

$$q_1 = q_2 = \underbrace{0.01}_{1\%} \times 5 \cdot 10^{28} \times 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

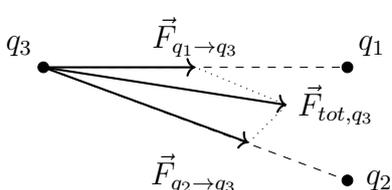
$$F_{q_1 \rightarrow q_2} = 9 \cdot 10^9 \times \frac{(8 \cdot 10^7)^2}{1} \text{ N} = 6 \cdot 10^{25} \text{ N}$$

Force-poids de la terre entière : $m_{terre}g \approx 6 \cdot 10^{24} \times 9.8 \text{ N} = 6 \cdot 10^{25} \text{ N}$.

1.6 Principe de superposition et distribution de charges

Distribution discrète de charges

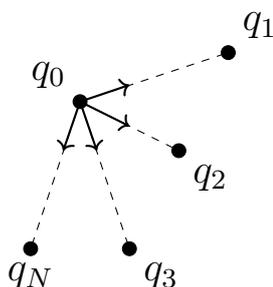
Deux charges agissant sur une 3^{ème}



$$\vec{F}_{tot, q_3} = \vec{F}_{q_1 \rightarrow q_3} + \vec{F}_{q_2 \rightarrow q_3} \quad (1.7)$$

[dans le dessin on considère, par ex., $q_1 q_2 > 0$, et $q_3 < 0$]

Si nous avons N charges agissant sur une charge “test” q_0



$$\vec{F}_{q_1, q_2, \dots, q_N \rightarrow q_0} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j q_0}{r_{q_j \rightarrow q_0}^2} \hat{r}_{q_j \rightarrow q_0} \quad (1.8)$$

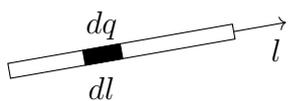
[par ex. $q_0 < 0$ et $q_1, q_2, \dots, q_N > 0$ dans le dessin]

Dans beaucoup de cas nous avons un très grand nombre de charges, distribuées sur un corps d’une forme donnée.

Nous devons donc faire une somme sur toutes les charges pour obtenir la force totale.

Distribution continue de charges

(1) Ligne



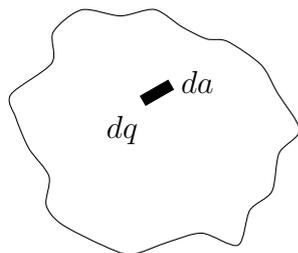
$$dq = \lambda dl; \quad \lambda = \frac{dq}{dl} \quad (1.9)$$

$$[\lambda] = \frac{C}{m} \quad \text{densité de charge linéaire} \quad (1.10)$$

Note 1.9. Dans beaucoup de cas, la charge est distribuée uniformément. Dans ces cas,

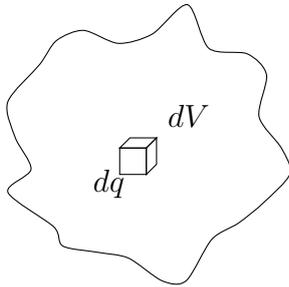
$$\lambda = \frac{dq}{dl} = \frac{Q}{L}, \text{ ou } \begin{cases} Q = \text{charge totale} \\ L = \text{longueur totale} \end{cases}$$

(2) Surface



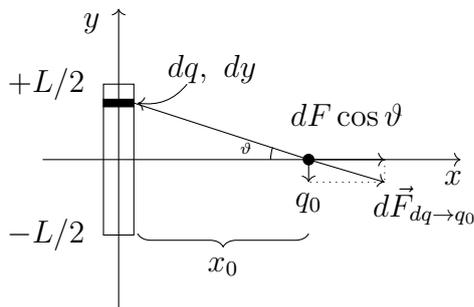
$$dq = \sigma da; \quad \sigma = \frac{dq}{da} \quad (1.11)$$

$$[\sigma] = \frac{C}{m^2} \quad \text{densité superficielle de charge} \quad (1.12)$$

(3) Volume

$$dq = \rho dV; \quad \rho = \frac{dq}{dV} \quad (1.13)$$

$$[\rho] = \frac{C}{m^3} : \text{densité volumique de charge} \quad (1.14)$$

Ex. de calcul dans le cas linéaire

Force sur q_0 par une tige chargée avec Q sur sa longueur, à distance x_0 (q_0, Q choisies > 0)

Force due au petit segment $dl = dy$:

$$d\vec{F}_{dq \rightarrow q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq q_0}{x_0^2 + y^2} \hat{r}; \quad dq = \lambda dy = \frac{Q}{L} dy \quad (1.15)$$

Symétrie : q_0 ne subira pas de force verticale

Force horizontale :

$$dF_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q/L dy q_0}{x_0^2 + y^2} \cos \vartheta \quad (1.16)$$

Mais $\cos \vartheta = \frac{x_0}{(x_0^2 + y^2)^{1/2}}$

$$\Rightarrow dF_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 L} \frac{Q q_0}{(x_0^2 + y^2)} \frac{x_0}{(x_0^2 + y^2)^{1/2}} dy \quad (1.17)$$

Principe de superposition : somme \rightarrow intégrale pour la distribution continue

$$F_{tot_x} = \int_{\text{distribution des charges}} dF_x = \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_0}{L} \frac{Q q_0 dy}{(x_0^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_0}{L} Q q_0 \underbrace{\int_{-L/2}^{+L/2} \frac{dy}{(x_0^2 + y^2)^{3/2}}}_I \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{dy}{(x_0^2 + y^2)^{3/2}} = \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{d\underbrace{(y/x_0)}_{=\xi}}{x_0^2(1 + \underbrace{(y/x_0)^2}_{=\xi^2})^{3/2}} = \frac{1}{x_0^2} \left[\frac{\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} \right]_{\frac{-L}{2x_0}}^{\frac{L}{2x_0}} = \\
 &= \frac{1}{x_0^2} \left[\frac{\frac{L}{2x_0}}{\sqrt{1 + \frac{L^2}{4x_0^2}}} + \frac{\frac{L}{2x_0}}{\sqrt{1 + \frac{L^2}{4x_0^2}}} \right] = \frac{1}{x_0^2} \frac{L}{\sqrt{x_0^2 + \frac{L^2}{4}}} \quad (1.19)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underbrace{F_{totx}}_{=F_{tot}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_0}{L} Qq_0 \frac{1}{x_0^2} \frac{L}{\sqrt{x_0^2 + \frac{L^2}{4}}} = \frac{Qq_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x_0 \sqrt{x_0^2 + \frac{L^2}{4}}} \quad (1.20)$$

Limite des grandes distances (auxquelles la tige “devient” comme un point) :

$$\lim_{x_0 \rightarrow \infty} F_{tot} = \frac{Qq_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x_0^2} \quad \text{OK, comme la loi de Coulomb pour deux charges ponctuelles.}$$

Limite petites distances (auxquelles la tige est comme “infinie”) :

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} F_{tot} = \frac{Qq_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{\cancel{L}}{Lx_0} \quad \text{mais } \frac{Q}{L} = \lambda \text{ (densité linéaire de charge), } F_{tot} = \frac{\lambda q_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{x_0}$$

1.7 Le champ électrique

Nous avons appris à calculer la force produite par une ou plusieurs charges (distribuées de façon discrète ou continue) sur une autre charge. La force agit entre charges. On peut la calculer pour chaque paire de charges, puis faire la somme, en appliquant le principe de superposition.

Elle agit sur une distance (en termes modernes, à travers son propagateur, le photon).

Pour la charge qui ‘subit’ la force, c’est comme si les autres charges (ou distributions de charges) modifiaient l’espace autour d’elles. Et c’est comme ça que la petite charge ‘sait’ que les autres sont là, à travers la force. Supposons que vous soyez chargés, et moi j’ai aussi une petite charge nette. Si j’arrive dans la salle, je ressens une force due à votre présence. Je ne ressentais pas grande chose quand j’étais loin...

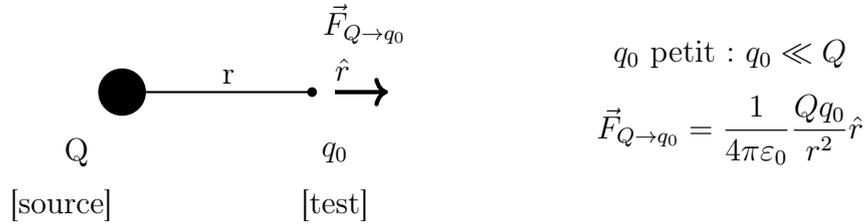
Donc la force dépend du fait que je suis dans la salle. Si je pars, la force n’est plus là, mais la distribution des charges qui l’a générée oui. Donc la source de la force est encore là.

Si je reviens avec une charge différente dans la main, je ressens une force différente même si je ne bouge pas, car l’espace autour de vous a été modifié par votre présence [vous êtes chargés!], et cette modification reste.

On aimerait décrire cette modification de l’espace, de façon à être prêt à calculer la force pour n’importe quelle charge qui y rentrerait, sans devoir calculer chaque fois toutes les forces entre paires de charges et les additionner.

Idée : séparer $\left\{ \begin{array}{l} \text{modification de l'espace (source) : champ} \\ \text{force agissant sur la charge placée dans cet espace (charge 'test')} \end{array} \right.$

Ex.

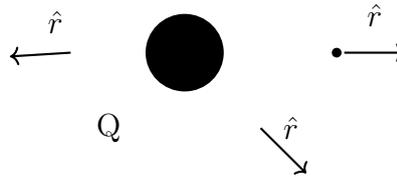


Déf. champ électrique produit par Q

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{Q \rightarrow q_0}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad [E] = \frac{N}{C} \quad (1.21)$$

(on l'imagine comme $\lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_{Q \rightarrow q_0}}{q_0}$) $\hat{r} = ?$

\hat{r} est le vecteur unitaire dirigé radialement, sortant de la source.



\vec{E} est "prêt" à agir sur toute charge qui serait insérée dans l'espace.

Note 1.10. $\vec{F}_{sur\ q_0} = q_0 \vec{E}$ pour n'importe quelle q_0 .
 Si $\vec{E} \neq 0$, $\vec{F}_{sur\ q_0} \neq 0$ (si $q_0 \neq 0$, bien entendu !)

Le champ électrique est une quantité mesurable, avec des charges 'de test' q_0 . Une fois que \vec{E} est connu, c'est trivial de calculer la force sur une charge.

Donc le problème dans l'électrostatique est en général le calcul de \vec{E} .

\vec{E} est une propriété de l'espace, et est en général une fonction de la position : $\vec{E} = \vec{E}(\vec{x})$

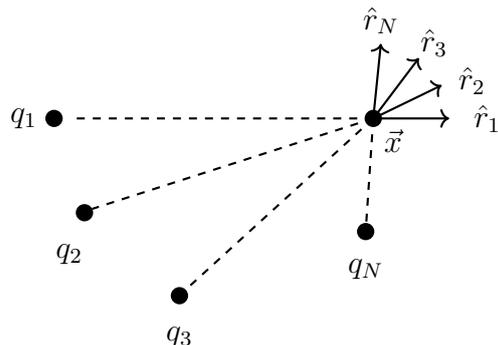
Avec plusieurs charges comme sources, on applique le principe de superposition comme pour la force (de laquelle le champ est tiré).

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_j \frac{q_j \hat{r}_j}{r_j^2}$$

q_j : sources

\vec{x} : point de l'espace considéré

\hat{r}_j : vecteur unitaire de source q_j au point \vec{x}

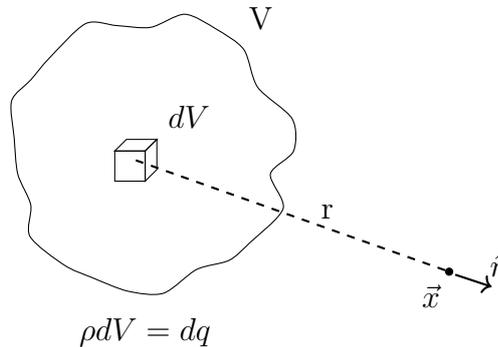


Pour une distribution continue :

$$\vec{E}(\vec{x}) = \int_{\text{dist. des charges}} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (1.22)$$

Par ex. pour une distribution volumique :

$$\vec{E}(\vec{x}) = \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (1.23)$$



\vec{E} est un champ vectoriel.

Pour ressentir une force à une certaine distance, il faut $\left\{ \begin{array}{l} \text{source} \\ \text{charge 'test'} \end{array} \right.$

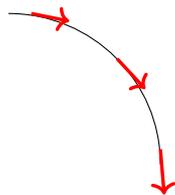
Ex. requin : on dit que le requin ‘sent’ l’odeur du sang. En effet une blessure sur notre corps produit un champ électrique dans l’eau, qui est détecté à distance par le requin. Pour ça, le requin a un récepteur avec des charges de test qui ressentent une force s’il y a un champ électrique. Il sent les odeurs et entend les sons à grandes distances, mais il compte principalement sur les senseurs de champ électrique à petites distances pour mieux cerner et attaquer la proie.

Comment représenter un champ ?

Lignes de champ (Faraday, ~ 1830)

L’idée est d’utiliser la même représentation qu’un flot d’un fluide (même si rien ne s’écoule physiquement dans ce cas).

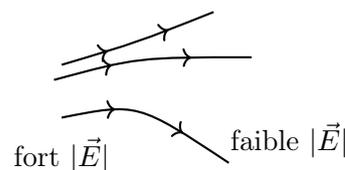
Direction



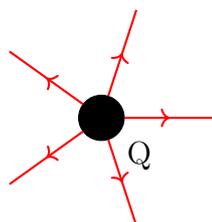
- la ligne suit la direction de \vec{E} ;
- \vec{E} est tangent à la ligne à chaque point ;
- la ligne indique la direction de la force sur une charge positive.

Intensité

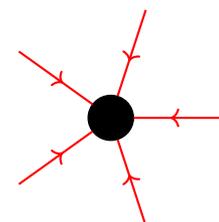
densité des lignes



Ex. $Q > 0$

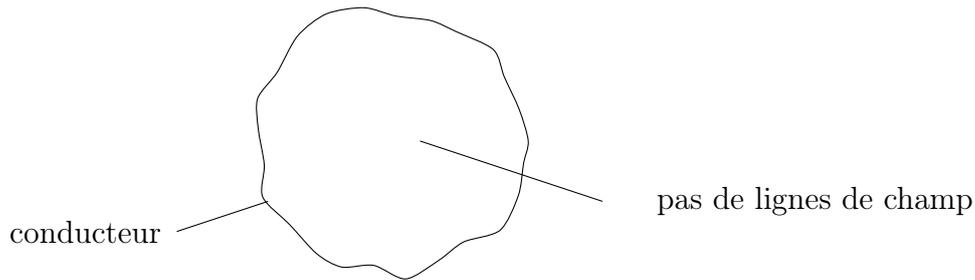


$Q < 0$



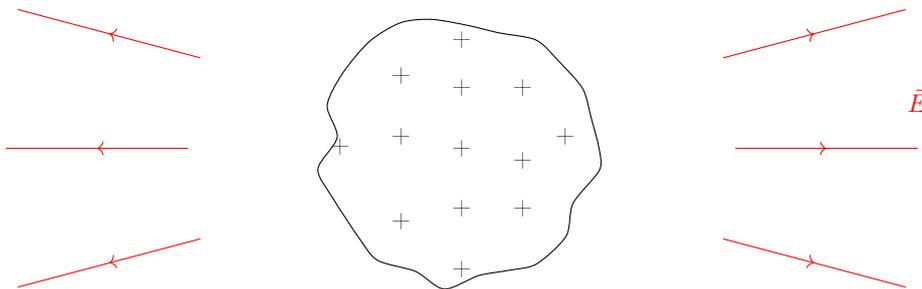
Règles pour les lignes de champ :

(1) $\vec{E} = 0$ à l'intérieur des conducteurs (en électrostatique) \rightarrow pas de lignes de champ du tout. Comme les charges sont libres de bouger, si $\vec{E} \neq 0 \Rightarrow \vec{F} \neq 0$, et les charges bougeraient.

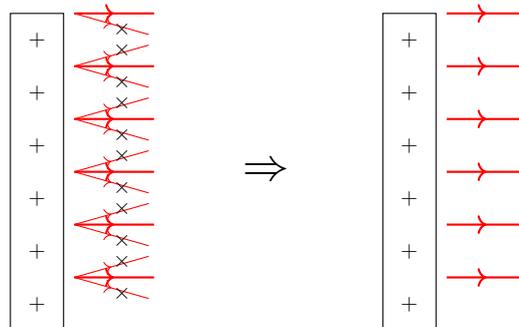


(2) Les lignes de champ vont de + à - ;

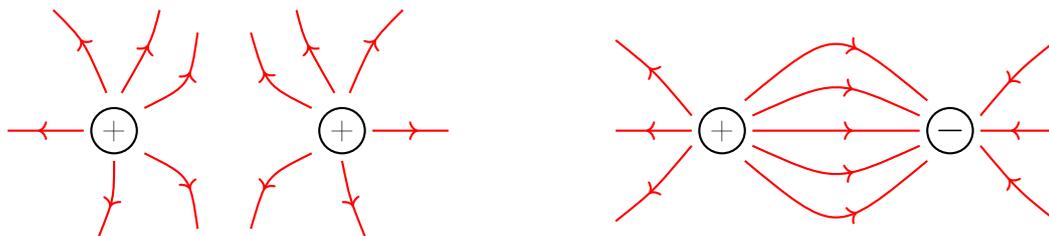
(3) A grandes distances, toute distribution de charges apparaît comme un point ;



(4) A petites distances, toute distribution de charges apparaît comme plane. Et pour un plan, les lignes de champ sont \perp à la surface, car toutes les autres composantes s'annulent.



On peut visualiser diverses structures, et diverses formes de lignes dans une expérience.



etc...

Cette expérience montre très bien la structure des lignes de champ, mais comment fonctionne-t-elle? Comment est-ce que ça traduit un concept si abstrait en quelque chose de visible?

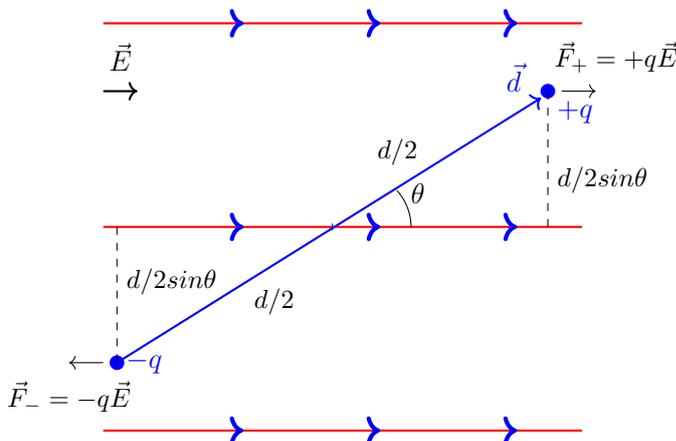
⇒ **Dipôles électriques**

1.8 La polarisation et les dipôles électriques

Considérons deux charges égales mais de signe opposé, à distance d , considérée constante.



Que se passe-t-il si je place le dipôle dans un champ électrique uniforme?



$\vec{F}_{tot} = +q\vec{E} - q\vec{E} = 0$
 Mais les deux forces n'agissent pas sur la même direction
 → **moment de force**/ couple

$$|\vec{\tau}| = qE \left[\frac{d}{2} \sin \theta \right] + qE \left[\frac{d}{2} \sin \theta \right] = qEd \sin \theta$$

Déf. "moment de dipôle" ou "moment dipolaire"

$$\boxed{\vec{p} = q\vec{d} \quad [p] = \text{Cm}} \tag{1.24}$$

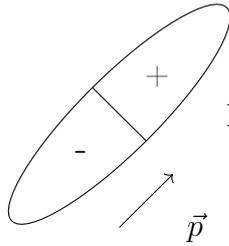
$$|\vec{d}| = d; \quad \text{direction de } -q \text{ à } +q$$

$$\vec{\tau} \text{ est un vecteur : } |\vec{\tau}| = |\vec{p}| |\vec{E}| \sin \theta \Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}}$$

Ceci veut dire qu'un dipôle sera forcé à tourner jusqu'à ce qu'il soit aligné avec le champ \vec{E}

Si $\vec{p} \parallel \vec{E} \Rightarrow \theta = 0$ et $\vec{\tau} = 0$

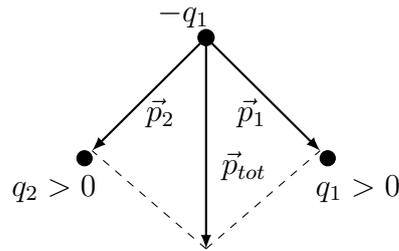
Ceci est le principe de la manipulation qui visualise les lignes de champ. Elle contient des graines de semoule qui sont électriquement neutres, mais qui ont un grand moment de dipôle \vec{p} .



Dans \vec{E} , les mini dipôles s'orientent le long des lignes de force

Moment dipolaire de plusieurs charges.

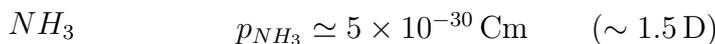
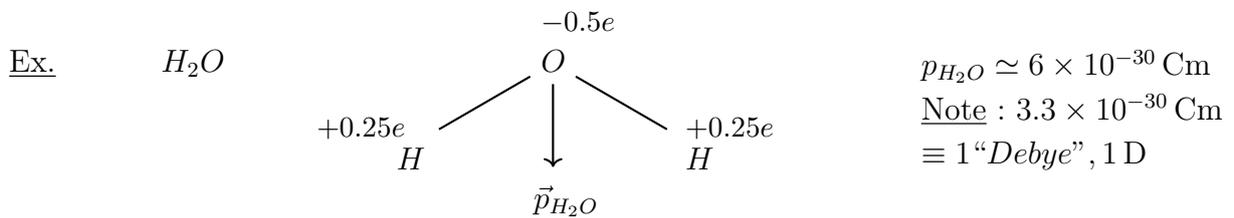
Ex. 3 charges
(=deux 'couples'
= deux dipôles)



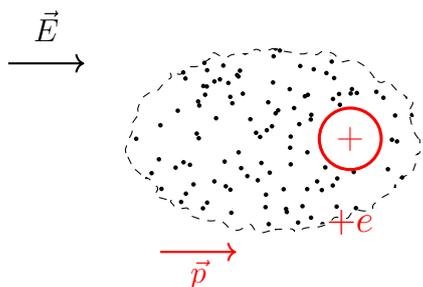
Les moments dipolaires se somment comme des vecteurs, et donnent lieu au moment dipolaire total, \vec{p}_{tot} .

Au niveau moléculaire, les charges sont de l'ordre de 'e', et les distances de l'ordre de 1 Å (= 10^{-10} m).

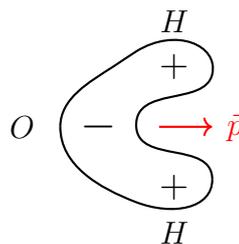
Donc $p_{mol} \sim 10^{-10}m \times 1.6 \times 10^{-19} C \simeq 1.6 \times 10^{-29} Cm$



Note 1.11. *Le moment dipolaire se forme car le nuage d'électrons est 'déplacé' par rapport au noyau.*

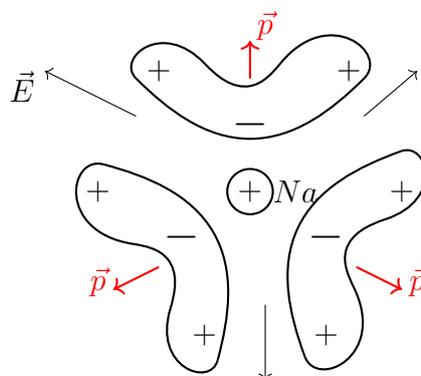
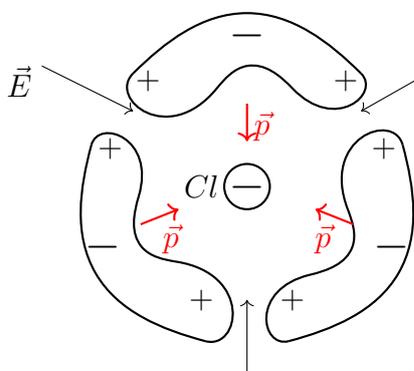


Ex. H_2O



Qu'est-ce qu'il se passe si on a des ions libres dans l'eau ? Comment s'orientent les molécules ?

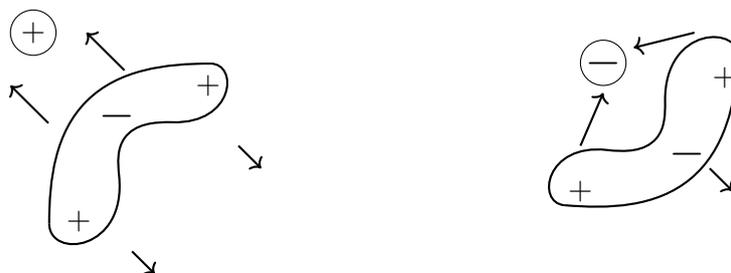
Ex. Solution saline de NaCl, qui dans l'eau se sépare en Na^+ , Cl^-



Naturellement, cette tendance à s'orienter dans le champ électrique est contrastée par l'agitation thermique. Il faudra comparer les énergies en jeu pour prévoir la situation ($k_B T$ vs. l'énergie du dipôle dans \vec{E}).

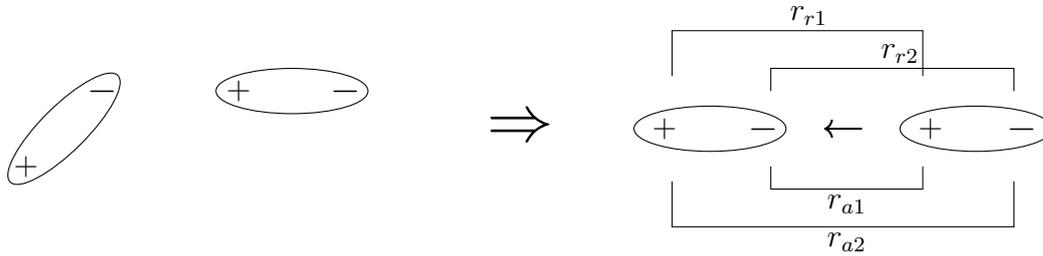
Interaction ion-eau

Comme le dipôle s'oriente le long du champ électrique, un ion générera toujours une force d'attraction sur la molécule d'eau (car la charge du signe opposé est plus proche).



Il aura donc la formation de 1-2 couches de molécules d'eau autour du ion, qui le rendront moins mobile (donc conductivité plus petite ou coefficient de diffusion plus petit). C'est comme si le "rayon" effectif du ion était augmenté en solution.

Interaction entre deux dipôles.

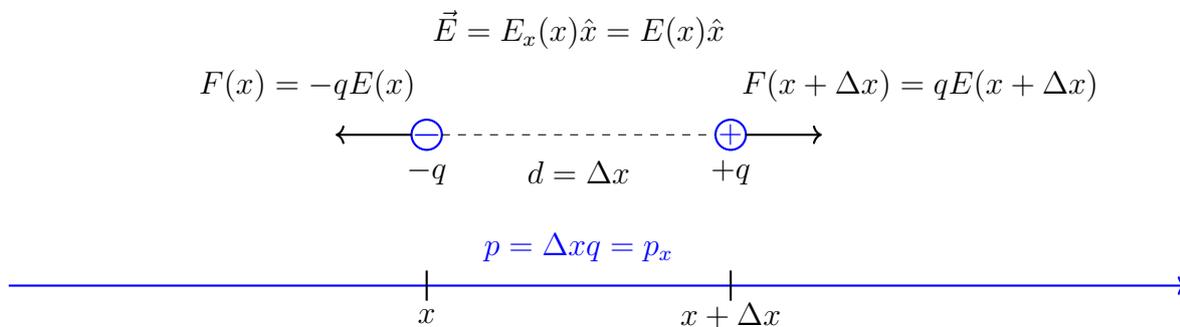


comme $F \sim 1/r^2$, l'attraction domine

Entre deux molécules avec dipôle, comme celles de l'eau, il y a donc attraction (faible, mais non nulle) → force de Van der Waals.

☞ Question 'piège' : on avait dit qu'il n'y aurait pas de force nette sur un dipôle! Pourquoi y a-t-il une force entre deux dipôles ?

En effet, ces phénomènes sont la conséquence de la **force nette** qui se met en place lorsqu'un **dipôle él. est placé dans un champ non-uniforme**. Calculons-la dans le cas simple à 1-dimension.



Force nette sur dipôle

$$F = q[E(x + \Delta x)] - q[E(x)] = \underbrace{q\Delta x}_p \left[\frac{E(x + \Delta x) - E(x)}{\Delta x} \right] \underset{\text{si } \Delta x \rightarrow 0}{=} p \frac{dE}{dx} \quad \left(= p_x \frac{dE}{dx} \right) \tag{1.25}$$

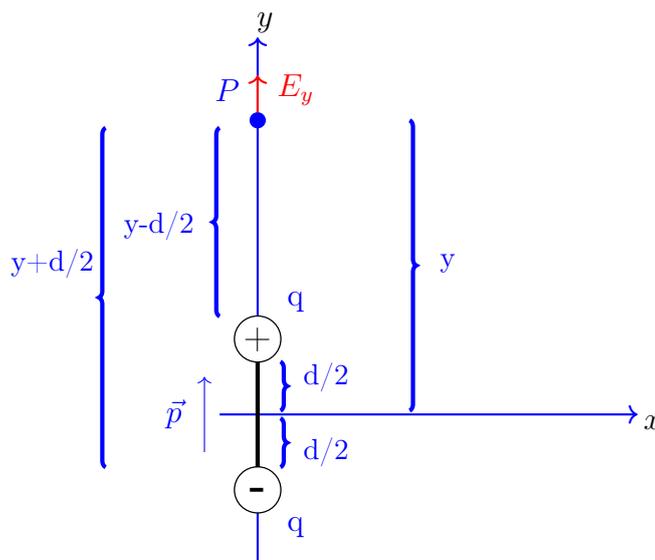
En général,

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} \tag{1.26}$$

Donc la force est présente uniquement en présence d'un champ non-uniforme.

Exemple de calcul de E : champ produit par un dipôle.

Un dipôle peut être vu comme source de champ électrique (par ex. une molécule d'eau produit un petit champ E). On veut calculer E_y au point P, avec $y \gg d$, sur l'axe y.



$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\left(y - \frac{d}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(y + \frac{d}{2}\right)^2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y^2} \left[\left(1 - \frac{d}{2y}\right)^{-2} - \left(1 + \frac{d}{2y}\right)^{-2} \right] \quad (1.27)$$

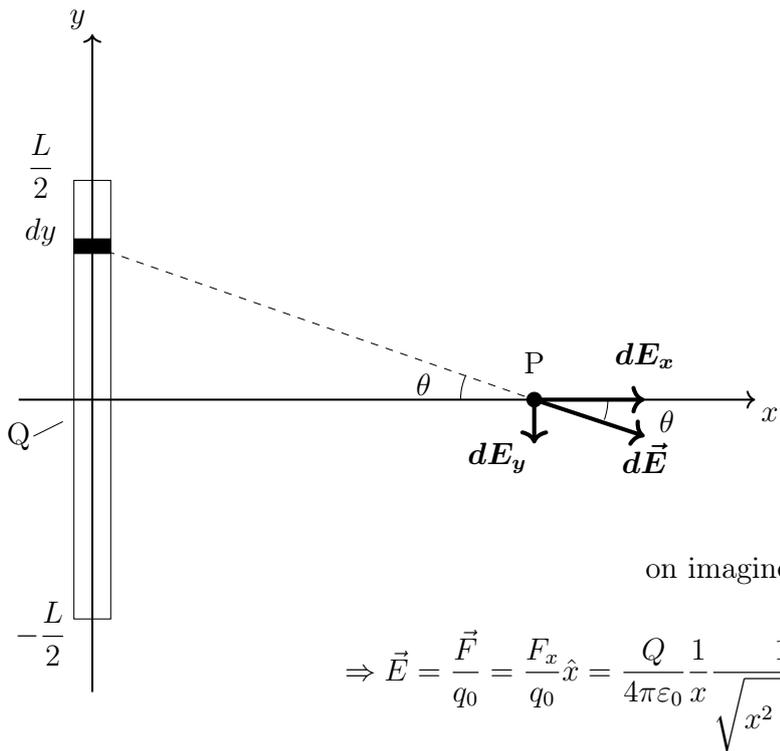
$$\begin{aligned} \text{Mais } \frac{d}{2y} \ll 1 &\Rightarrow \left(1 - \frac{d}{2y}\right)^{-2} \simeq 1 + 2\frac{d}{2y} = 1 + \frac{d}{y} \\ &\Rightarrow \left(1 + \frac{d}{2y}\right)^{-2} \simeq 1 - 2\frac{d}{2y} = 1 - \frac{d}{y} \\ &\Rightarrow E_y \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y^2} \left[1 + \frac{d}{y} - 1 + \frac{d}{y} \right] = \frac{qd}{2\pi\epsilon_0 y^3} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{y^3} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Note 1.12. $E \simeq \frac{1}{(\text{distance})^3}$

Note 1.13. $E \propto p$: si on mesure E on ne peut pas avoir d'informations indépendantes sur q ou d .

Note 1.14. La dépendance de la distance est $E \propto \frac{1}{(\text{distance})^3}$ même pour les points qui ne sont pas sur l'axe du dipôle.

Si on reprend la distribution linéaire de charge finie que nous avons vue pour le calcul de la force, et on interprète le résultat en termes de champ :



$$\lambda = \frac{Q}{L}$$

E au point P ?
on imagine la charge-test q_0 au point P :

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{F_x}{q_0} \hat{x} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{L^2}{4}}} \hat{x}$$

Si $x \gg L$, $E \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2}$ → si le point P est très loin du bâton (par rapport à la longueur), \vec{E} est le même que pour une charge ponctuelle.

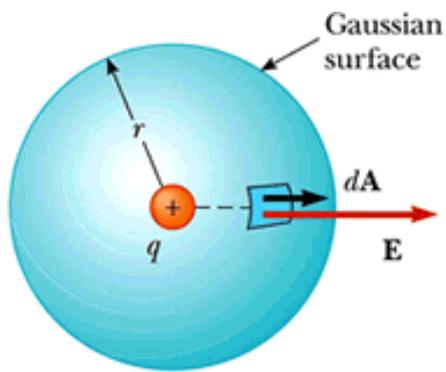
Si $x \ll L$, au contraire, $E \approx \frac{Q}{2_4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \frac{Q/L=\lambda}{L} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{x} \hat{x}$

⇒ Nous avons trouvé 3 dépendances du champ de la distance

- | | | |
|--------------------------------------|--|--|
| 1. Ligne de charge infiniment longue | | $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\text{distance}}$ |
| 2. Charge ponctuelle | | $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\text{distance}^2}$ |
| 3. Dipôle | | $E = \frac{p}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\text{distance}^3}$ |

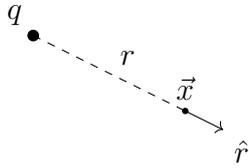
Chapitre 2

Loi de Gauss et ses conséquences

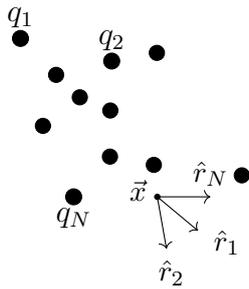


2.1 Le flux électrique

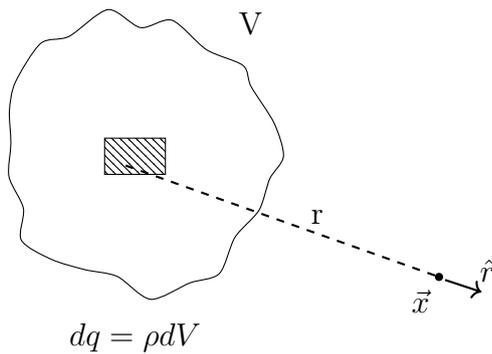
Rappel champ électrique



$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \quad (2.1)$$



$$\vec{E}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}_j}{r_j^2} \quad (2.2)$$



$$\vec{E}(\vec{x}) = \int_V \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} = \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \quad (2.3)$$

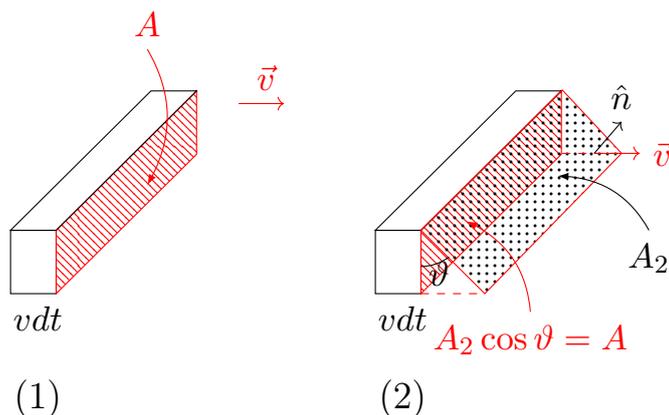
Nous avons progressé en électro-statique sur la base d'observations, par ex. l'existence de la charge et la force de Coulomb $\propto 1/r^2$.

Nous avons introduit le concept de champ pour séparer la source de la charge-test et calculer la “perturbation” de l'espace que la source produit, “prête” à exercer une force sur la charge.

Maintenant nous allons développer une méthode qui permet de calculer \vec{E} sans devoir partir de la définition pour une charge et faire une somme (ou une intégrale). De plus, en regardant les propriétés mathématiques de \vec{E} , on peut découvrir des nouvelles propriétés de \vec{E} .

Considérons l'eau qui s'écoule dans les océans. On y place un objet, par ex. un filet pour pêcher des petits poissons.

Question : quelle est la quantité d'eau qui passe à travers la surface A dans l'unité de temps ?



Volume qui passe dans l'unité de temps dt à travers A_1 :

$$(1) \quad dV = \underbrace{vdt}_{\text{longueur}} A \quad (2.4)$$

$$(2) \quad dV = vdt \underbrace{A_2 \cos \vartheta}_{\text{surface efficace}} = A \quad (2.5)$$

Si on définit le vecteur surface $\vec{A} = A\hat{n}$ (\hat{n} : vecteur normal unitaire), $dV = (\vec{v}dt) \cdot \vec{A}$, ou $\frac{dV}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{A}$. C'est le flux d'eau, c'est-à-dire quantité d'eau qui passe à travers le filet en dt .

Note 2.1. $\frac{dV}{dt}$ (le flux) est une quantité scalaire.

Par analogie, on définit le flux électrique

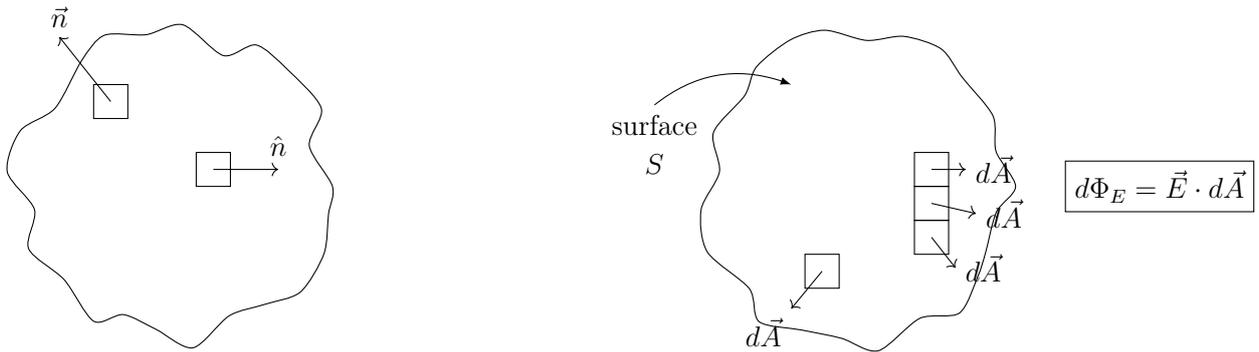
$$\Phi_E^A = \vec{E} \cdot \vec{A} \quad \text{“flux de } \vec{E} \text{ à travers } \vec{A} \text{”} \quad (2.6)$$

C'est donc une mesure de la “quantité de champ” qui est interceptée par \vec{A} . Rien ne s'écoule, naturellement.

Note 2.2. • Pour le signe on prend la convention de choisir un côté de la surface

- Pour les surfaces fermées la normale est choisie vers l'extérieur
- Pour les surfaces compliquées (pas plates), on divise en petites surfaces infinitésimales $d\vec{A}$. Chaque $d\vec{A}$ est suffisamment petite qu'elle puisse être considérée plate.

Ex. de surface fermée et de forme arbitraire.



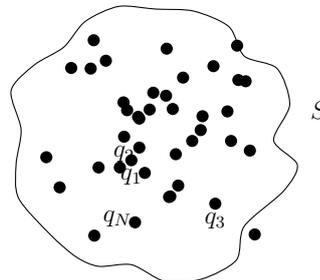
Flux total

$$\Phi_E = \oint_{\text{surface } S} d\Phi_E = \underbrace{\oint_{\text{surface } S}}_{\text{intégrale de surface}} \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (2.7)$$

2.2 La loi de Gauss (~ 1820)

Pout toute surface fermée S ,

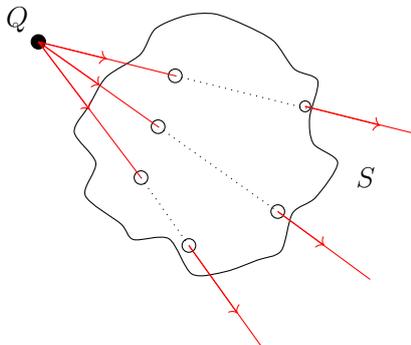
$$\Phi_E^S = \frac{Q_{\text{totale en } S}}{\epsilon_0} \quad (2.8)$$



Ceci implique que le flux ne dépend pas $\left\{ \begin{array}{l} \text{d'où exactement les charges se trouvent} \\ \text{de la forme de } S \end{array} \right.$

Preuve (en 4 étapes)

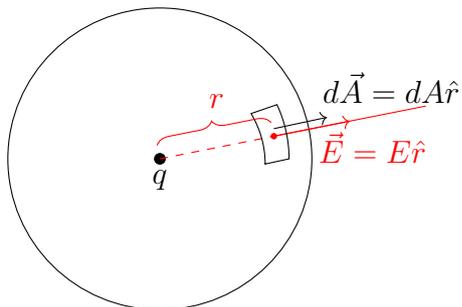
(1) la charge est à l'extérieur de la surface



chaque ligne de champ qui entre dans la surface S , sort de S . La somme de toutes les contributions qui rentrent dans la surface est égale à la somme de toutes les contributions qui sortent. Donc le flux net doit être nul.

$$Q_{\text{en } S} = 0 \iff \Phi_E^S = 0$$

(2) charge ponctuelle au centre d'une sphère S (ex. $q > 0$)



$$\Phi_E^S = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (2.9)$$

mais

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (2.10)$$

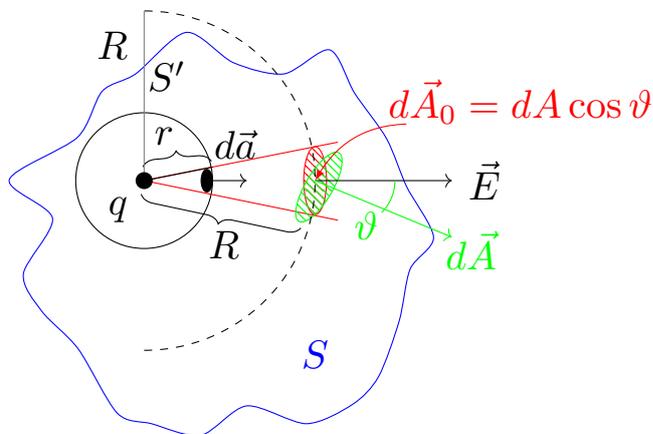
$$\Phi_E^S = \oint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \underbrace{\hat{r} \cdot d\vec{A}}_{\hat{r} \parallel d\vec{A}} = \oint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dA;$$

mais $r = \text{const.}$ sur la surface de la sphère!

$$\Phi_E^S = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \underbrace{\oint_S dA}_{\text{surface totale de la sphère}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.11)$$

Note 2.3. Point clé est l'exacte dépendance de $E \propto \frac{1}{r^2}$ (loi de Coulomb).

(3) charge ponctuelle q dans surface arbitraire S



On inscrit la sphère S' , de rayon r , qui est centrée sur q , et est à l'intérieur de S .

On veut montrer que le flux à travers S' est le même qu'à travers S .

Flux à travers $d\vec{A}$:

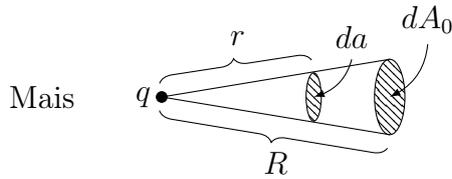
$$d\Phi_E^{dA} = \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(R) \overbrace{dA \cos \vartheta}^{dA_0} = E(R) dA_0 \quad (2.12)$$

Mais

$$E(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \Rightarrow d\Phi_E^{dA} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} dA_0 \quad (2.13)$$

Flux à travers $d\vec{a}$:

$$d\Phi_E^{da} = \vec{E} \cdot d\vec{a} = E(r) da = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} da \quad (2.14)$$



Mais

géométrie :

$$\frac{da}{r^2} = \frac{dA_0}{R^2} \tag{2.15}$$

(c'est même la définition de l'angle solide)

Donc :

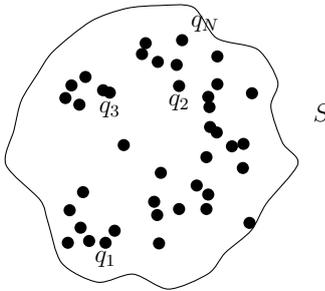
$$d\Phi_E^{dA} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{dA_0}{R^2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{da}{r^2} \right] = d\Phi_E^{da} \tag{2.16}$$

pour n'importe quels da, dA , et donc aussi pour les sommes ou intégrales sur da, dA

$$\Rightarrow \Phi_E^S = \Phi_E^{S'} = (\text{de la partie (2)}) = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{2.17}$$

(4) Plusieurs charges en S

On applique le principe de superposition :



$$\begin{aligned} \Phi_E^S &= \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_S \sum_{j=1, \dots, N} \vec{E}_j \cdot d\vec{A} \\ &= \sum_{j=1, \dots, N} \oint_S \vec{E}_j \cdot d\vec{A} \stackrel{(3)}{=} \sum_{j=1, \dots, N} \frac{q_j}{\epsilon_0} \\ &= \frac{Q_{\text{totale in } S}}{\epsilon_0} \end{aligned} \tag{2.18}$$

□

La loi de Gauss donne une relation entre le champ \vec{E} et Q , donc entre le champ et sa source

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{en } S}}{\epsilon_0} \tag{2.19}$$

∀ toute surface fermée S

Cela donne une façon de calculer \vec{E} qui peut être bien plus simple que l'application de la définition, car S est une surface mathématique que nous pouvons choisir arbitrairement. Quels sont nos choix pour simplifier le calcul de \vec{E} (ou de Q à partir de \vec{E}) ?

Idées pour simplifier $\Phi_E^S = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$

(1) choisir $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ de façon à éviter une dépendance de ϑ $\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} \parallel d\vec{A} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{A} = E dA \\ \vec{E} \perp d\vec{A} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 \end{array} \right.$

(2) utiliser la symétrie

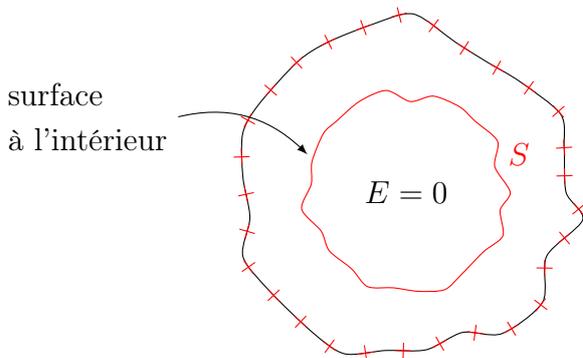
(3) choisir surfaces S simples à calculer (sphères, cylindres, ...)

Ex. de calcul et de conséquence expérimentale

Ici on trouve Q à partir de \vec{E} .

Conducteur sur lequel on place de la charge (par ex. positive) : où est-ce que la charge va aller ?

Dans un conducteur, $E = 0$ (en électro-statique)



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \text{car} \quad \vec{E}_S = 0 \quad (2.20)$$

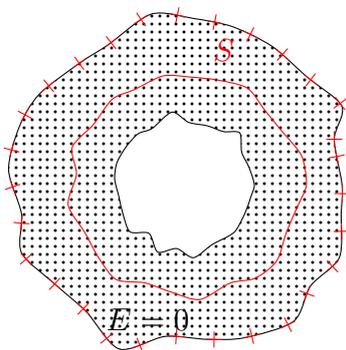
pour toute surface S fermée à l'intérieur du conducteur.

Mais

$$\Phi_E^S = \frac{Q_{en\ S}}{\epsilon_0} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (2.21)$$

\Rightarrow aucune nette charge ne peut être présente en S ! $Q_{en\ S} = 0 \quad \forall S \Rightarrow$ la charge ne peut être située que sur la surface externe !

Qu'est-ce qu'il se passe si le conducteur est creux (vide à l'intérieur) ?



$$\Phi_E^S = 0 = \frac{Q_{en\ S}}{\epsilon_0} \quad (2.22)$$

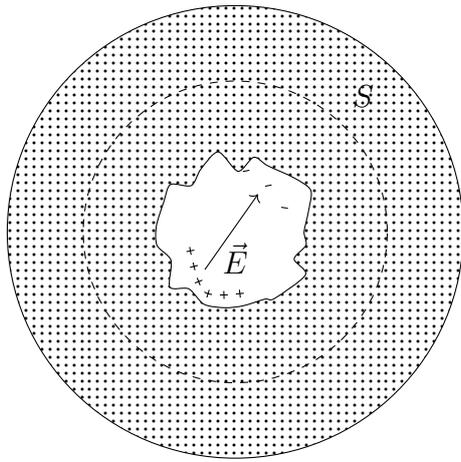
\Rightarrow la même conclusion qu'avant ! (à moins de mettre la charge directement dans le trou central)

2.3 Conséquences de la loi de Gauss

Cette propriété de la charge qui ne peut qu'être distribuée sur la surface externe d'un conducteur a des implications pratiques importantes : écranage électrostatique et cage de Faraday.

Idée : utiliser un conducteur creux pour écranter tout champ électrostatique. Écranter de l'extérieur vers l'intérieur et vice-versa.

Cage de Faraday



En principe, il pourrait y avoir des charges sur la surface interne, \oplus et \ominus en nombre égal, car $Q_{en\ S} = 0$.

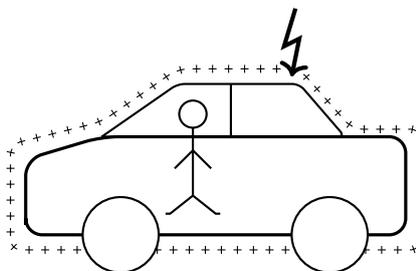
Mais comme on a un conducteur, le champ \vec{E} qui se mettrait en place ferait immédiatement bouger les charges (qui peuvent bouger sur un conducteur), qui se neutraliseraient.

Autre façon de décrire le principe de la cage de Faraday :

Si un conducteur creux est placé dans un champ électrique, les charges se redistribuent sur sa surface externe de façon à ce qu'aucun champ \vec{E} ne serait ressenti à l'intérieur. Une distribution externe de charge ne peut pas produire de charges dans la cavité. Et une distribution de charges dans la cavité ne peut pas produire un champ à l'extérieur.

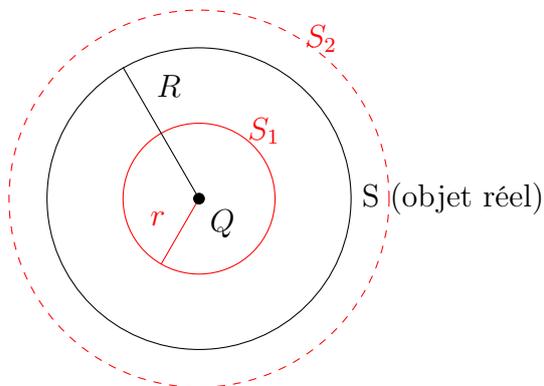
Note 2.4. Toutes ces considérations sont des conséquences de la loi de Coulomb, $F \propto \frac{1}{r^2}$.

L'écranage électrostatique est la raison pour laquelle il est mieux de rester à l'intérieur de la voiture pendant un orage...



Ex. de calcul pour trouver E à partir de Q

(1) Q distribuée uniformément sur sphère, $\vec{E} = ?$



Note 2.5. Comme on dit que Q est distribuée uniformément, la sphère ne peut pas être conductrice.

$$\rho = \frac{dq}{dV} = \text{const.} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad (\text{assumons } Q > 0) \quad (2.23)$$

Choisir surface pour calculer le flux facilement : sphère concentrique avec S ; où ? \Rightarrow où nous voulons calculer \vec{E} !

S_1 et S_2 sont des objets mathématiques, r : rayon générique.

Symétrie : \vec{E} ne peut être que radial (il n'y a aucune direction privilégiée)

$$r < R : \quad \oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{S_1} E(r) dA = E(r) \oint_{S_1} dA = E(r) 4\pi r^2 \stackrel{\text{Gauss}}{=} \frac{Q_{en S_1}}{\epsilon_0} \quad (2.24)$$

quelle est la charge contenue en S_1 ?

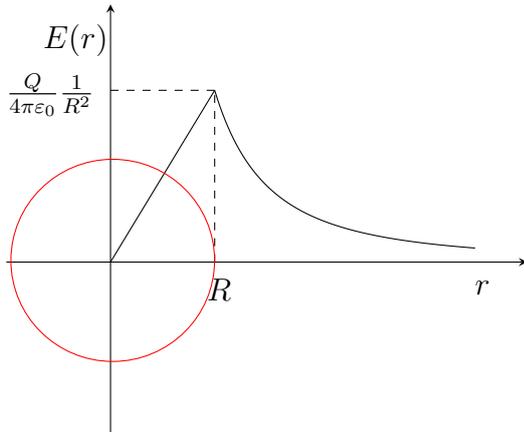
Comme $\rho = \frac{dq}{dV} = \text{const.}$,

$$Q_{en S_1} = \rho V(S_1) = \frac{Q \frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = Q \frac{r^3}{R^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{r^3}{R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r} \quad r \leq R$$

$$r > R : \quad \oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q_{en S_2}}{\epsilon_0} = \frac{Q_{en S}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2.25)$$

$$\Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}} \quad (\text{comme pour une charge ponctuelle})$$



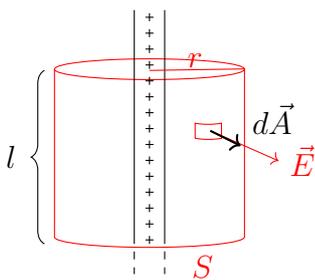
Note 2.6. Si on place une charge \ominus dans la sphère, elle sera sujette à une force \propto distance du centre

\rightarrow comme un ressort, donc on s'attend un mouvement harmonique

Autres exemple de calcul du champ en symétrie cylindrique

(2) Fil infini uniformément chargé

$$\lambda = \frac{dq}{dl} = \text{const.} \tag{2.26}$$

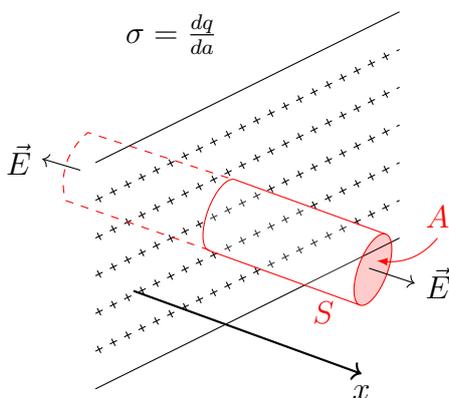


$$\Phi_E^S = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(r) \overbrace{2\pi r l}^{\text{surface}} = \frac{\overbrace{\lambda l}^{Q_{en S}}}{\epsilon_0} \tag{2.27}$$

$$\Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}} \tag{2.28}$$

(on se rappelle du calcul à travers la définition de E , bien plus compliqué)

(3) Plan infini (d'épaisseur nulle) uniformément chargé



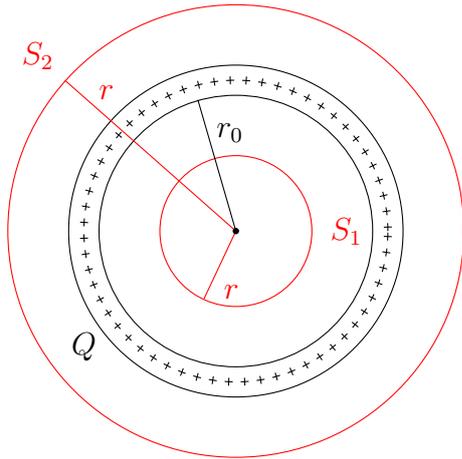
$$\Phi_E^S = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(x) \underbrace{2A}_{\text{surface}} = \frac{\overbrace{\sigma A}^{Q_{en S}}}{\epsilon_0} \tag{2.29}$$

car on doit considérer les deux côtés

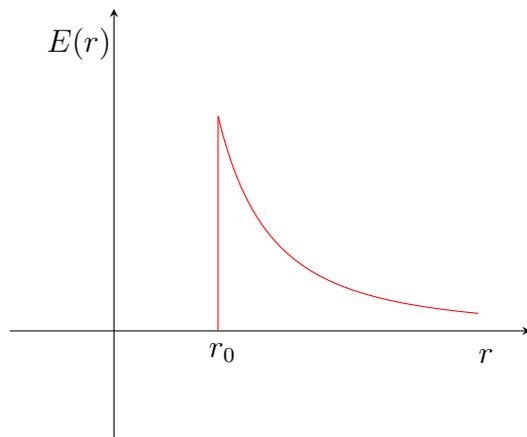
$$\Rightarrow \boxed{E(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}} \tag{2.30}$$

(4) Coquille sphérique uniformément chargée (d'épaisseur négligeable)

$$\Phi_E^S = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi r^2 E(r) = \begin{cases} 0 & r < r_0 \\ \frac{Q}{\epsilon_0} & r > r_0 \end{cases} \begin{matrix} Q_{en S_1} = 0 \\ \\ Q_{en S_1} = Q \end{matrix}$$



$$\Rightarrow E(r) = \begin{cases} 0 & r < r_0 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} & r > r_0 \end{cases} \quad (2.31)$$

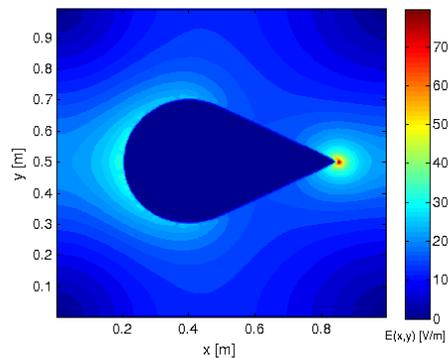
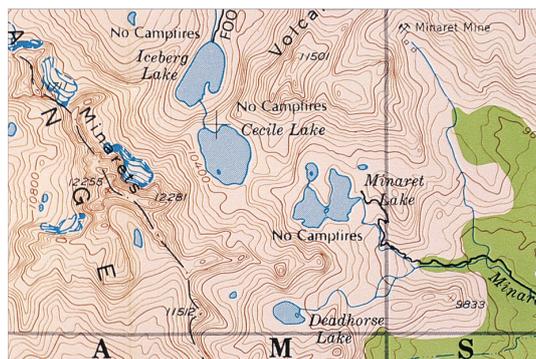
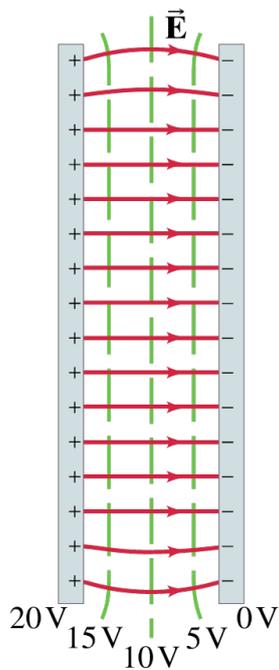
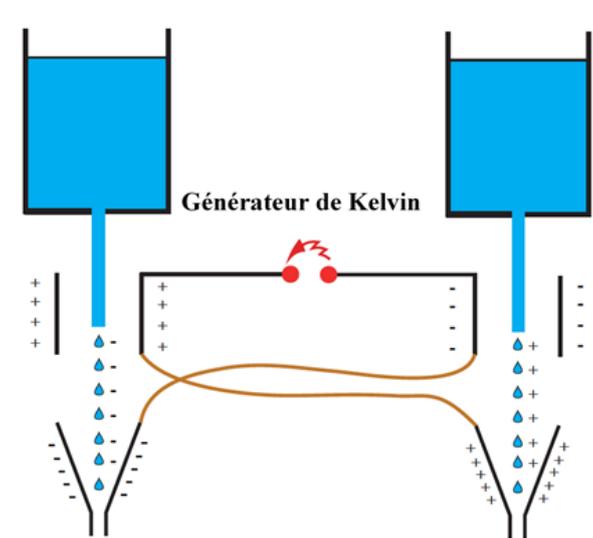


Chapitre 3

Potentiel électrique



Alessandro Volta (1745-1827)



3.1 Energie potentielle électrique

On commence la discussion avec une expérience ‘challenge’.

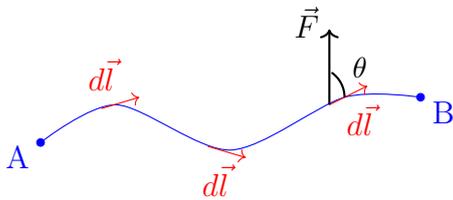
DEMO 1 Générateur de Kelvin

Cette expérience contient beaucoup d’éléments de la physique que nous avons vu jusqu’à maintenant, et que nous allons voir cette semaine.

Observez-la le long du cours, et réfléchissez sur l’explication! Qu’est-ce qui cause la décharge électrique? On a l’impression que de l’énergie électrique est générée : d’où vient-elle? “Qui” fait le travail nécessaire pour la générer?

Rappel énergie potentielle en général.

Travail fait par une force sur un corps qui va de A à B : $W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B F \cos\theta dl$

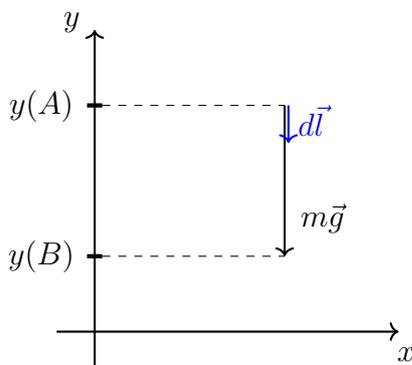


Note 3.1. \vec{F} n’est pas forcément alignée avec $d\vec{l}$!

Force ‘conservative’ : $W_{A \rightarrow B}$ ne dépend pas du chemin. Donc le travail dépend uniquement du point initial et du point final. En particulier, le travail net est nul lorsque l’on revient au point initial.

Dans ce cas $W_{A \rightarrow B} = U(A) - U(B)$: le travail peut être exprimé comme la différence entre deux quantités scalaires associées aux deux points dans l’espace, le départ et l’arrivée. En effet, c’est la même quantité scalaire évaluée aux deux points. C’est l’énergie potentielle.

Ex. gravitation



$$\begin{aligned}
 W_{A \rightarrow B} &= \int_{y(A)}^{y(B)} m\vec{g} \cdot d\vec{l} \\
 &= - \int_{y(A)}^{y(B)} mg dy \\
 &= -mg[y(B) - y(A)] \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

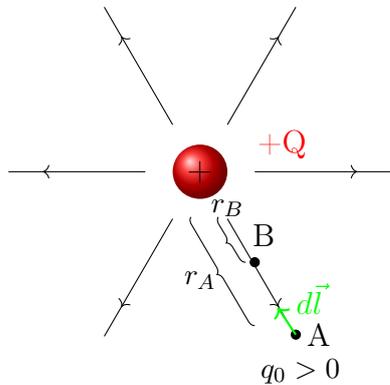
$$W_{A \rightarrow B} = -mg[y(B) - y(A)] = \underbrace{mgy(A)}_{U(A)} - \underbrace{mgy(B)}_{U(B)} = -\Delta U \quad (3.2)$$

>0 : la gravité a fait du travail ↑
note convention
 $\Delta U = U(\text{final}) - U(\text{initial})$

⇒ **énergie potentielle gravitationnelle** est $mg \times (\text{hauteur})$;

Si nous poussons un poids vers le haut, nous faisons du travail positif, et le travail fait par la gravité est négatif.

Par analogie : énergie potentielle électrique.



On considère une charge ponctuelle $Q (>0)$.
On veut rapprocher une charge de test $q_0 (>0)$ de A à B.

Quel est le travail ?

On devra investir du travail nous-mêmes, comme pour faire remonter un poids dans le champ gravitationnel.

Le travail fait par la force électrique devrait être négatif.

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} =; \quad \text{mais } \vec{E} \text{ est dirigé comme } -d\vec{l} (\text{ou } dr) \quad (3.3)$$

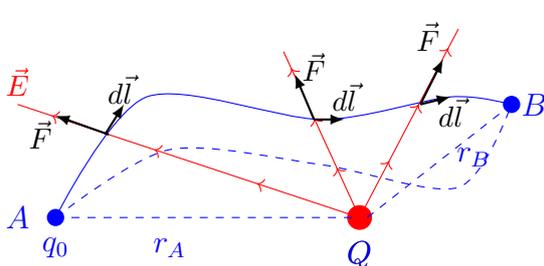
$$= -q_0 \int_A^B E dl = q_0 \int_A^B E dr; \quad \text{mais } E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}; \quad (3.4)$$

$$W_{A \rightarrow B} = \frac{q_0 Q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{1}{r^2} dr = \frac{q_0 Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right] < 0; \quad \text{car } r_A > r_B; [Q, q_0 > 0] \quad (3.5)$$

Note 3.2. $W_{A \rightarrow B} < 0$ aussi si $Q, q_0 < 0$: même signe → répulsion, on doit toujours ‘pousser’ pour rapprocher les charges.

Si $Q > 0, q_0 < 0$ ou $Q < 0, q_0 > 0 \Rightarrow W_{A \rightarrow B} > 0$ (attraction)

Est-ce qu’on peut attribuer une énergie potentielle au champ électrique ? Oui, mais seulement si on démontre que $W_{A \rightarrow B}$ est indépendant du chemin !



\vec{E} est dirigé radialement

$$\vec{F} = q_0 \vec{E} = \frac{q_0 Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} \quad (3.6)$$

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \frac{q_0 Q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{l} \quad (3.7)$$

Mais $\hat{r} \cdot d\vec{l} = dr$: seulement la composante radiale du déplacement compte et contribue au travail.

Donc :

$$W_{A \rightarrow B} = \frac{q_0 Q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{dr}{r^2} = \frac{q_0 Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right] \quad \text{c'est indépendant du chemin !} \quad (3.8)$$

On peut donc attribuer une énergie potentielle au champ électrique, qui est conservatif.

Note 3.3. *Comme toutes les forces radiales*

$$W_{A \rightarrow B} \stackrel{\text{déf}}{=} U(A) - U(B) = -\Delta U \quad (3.9)$$

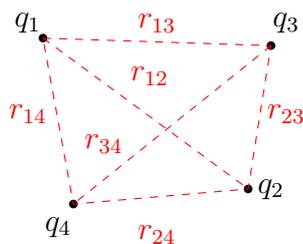
$$\text{avec } \boxed{U(r) = \frac{q_0 Q}{4\pi\epsilon_0 r}} \quad (3.10)$$

Energie potentielle associée aux deux charges q_0, Q à distance r

Comme U est définie par rapport à une référence (donc à une constante près), on peut choisir $U(\infty) = 0$ comme référence. Avec ce choix, $U(r)$ correspond à l'énergie/travail nécessaire à amener deux charges de distance infinie à une distance r .

Et pour plusieurs charges? \Rightarrow **principe de superposition**

Le champ est en effet conservatif pour toute distribution de charges. L'énergie totale sera la somme des énergies associées à chaque paire de charges.



C'est beaucoup plus simple de sommer les énergies que les champs, car c'est une somme de scalaires. La seule difficulté est ne pas compter les paires à double...

$$U_{tot} = \sum_{i < j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}; \quad (3.11)$$

3.2 Le potentiel électrique

L'énergie est une propriété de la distribution de charges considérée, pas de l'espace. Maintenant, nous appliquons la même idée que nous avons utilisée pour passer de la force au concept de champ, en considérant l'effet par unité de charge.

$$\Rightarrow \text{Déf. potentiel électrique} = \frac{\text{énergie potentielle électrique}}{\text{unité de charge}}$$

$$\boxed{V = \frac{U}{q_0}} \quad (3.12)$$

Pour une charge ponctuelle

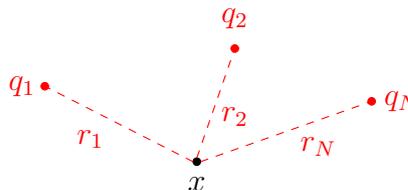
$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (3.13)$$

Comme pour U , V est défini en relation à un point, ici $r = \infty$, $V(r \rightarrow \infty) = 0$

Unités : $[V] = \frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}} = \text{“Volt”}$ [de Alessandro Volta...]

Plusieurs charges

$$V(\vec{x}) = \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_j} \tag{3.14}$$



Distribution de charges continue :

$$V = \int_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} \tag{3.15}$$

S : distribution de charges

Signification de V :

$$W_{A \rightarrow B} = U(A) - U(B) \Rightarrow \frac{W_{A \rightarrow B}}{q_0} = V(A) - V(B) = -\Delta V \tag{3.16}$$

↑
'différence de potentiel entre A et B'

$-\Delta V$ est donc le travail par unité de charge fait par la force électrique lorsque les charges sont bougées de A à B.

$$W_{A \rightarrow B} = -q_0 \Delta V \tag{3.17}$$

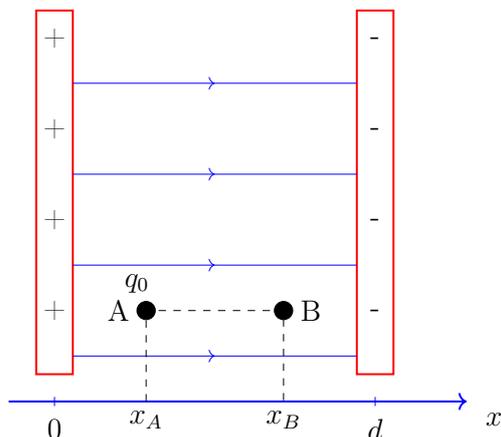
$$\text{et } V(A) - V(B) = -\Delta V = \frac{W_{A \rightarrow B}}{q_0} = \frac{1}{q_0} \int_A^B q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}; \tag{3.18}$$

$$V(A) = V(B) + \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \tag{3.19}$$

$$\text{Si on choisit } B \rightarrow \infty \quad V(A) = - \int_{\infty}^A \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{et} \quad V(\infty) = 0 \tag{3.20}$$

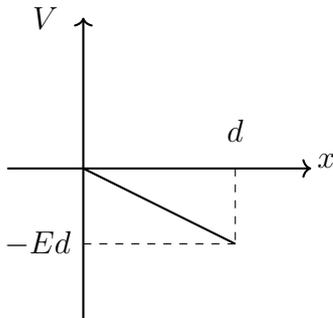
Relation entre V et \vec{E}

Ex. deux plaques parallèles



$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B} &= \int_A^B q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = U(A) - U(B) \\ &\stackrel{\substack{E = \text{const. et} \\ \text{dirigé selon x}}}{=} \int_{x_A}^{x_B} q_0 E dx \\ &= q_0 E (x_B - x_A) \end{aligned} \tag{3.21}$$

$U(A) = -q_0 E x_A$; en général $U(x) = -q_0 E x$, et $V(x) = -E x$



☞ Mais cette fois-ci on ne peut pas prendre $V(\infty) = 0$, mais plutôt $V(x = 0) = 0$ [et $U(x = 0) = 0$]

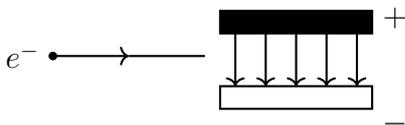
Si on va d'une plaque à l'autre $V(d) = -Ed$.

En effet, V est plus bas à la plaque négative [pour une charge test $q_0 > 0$ on "descend" dans le potentiel, alors que pour une charge test $q_0 < 0$ on "remonte"].

Visualisons la "descente" on la "remontée" d'un faisceau d'électrons dans ce type de potentiel, avec un champ uniforme entre deux plaques, mais en présence d'une vitesse initiale $v \neq 0$.

Note 3.4. *La gravité ici n'a aucun effet...*

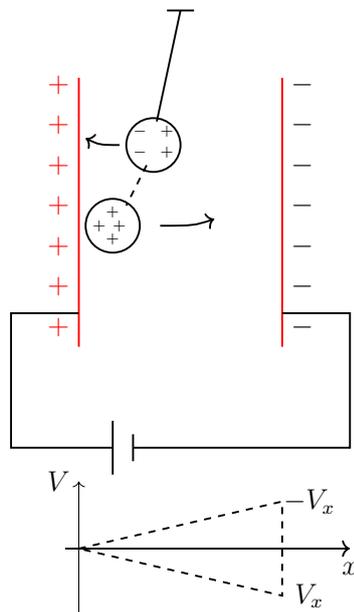
DEMO Déviation électrostatique d'un faisceau d'électrons.



Quelle direction prendra le faisceau ?

Observons le même effet, mais sans vitesse initiale, et avec un objet visible macroscopiquement.

DEMO



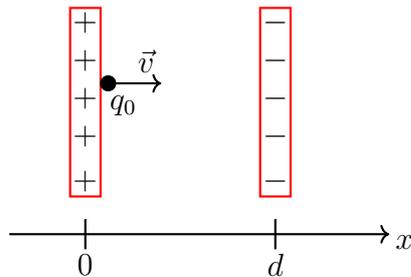
La balle se charge d'un côté, et "descend" dans son énergie potentielle de l'autre côté, où elle prend de la charge de signe opposé. Elle "re-descend" de l'autre côté encore, et ainsi de suite...

Utilisation du concept de potentiel

Dans la pratique, on applique une différence de potentiel (=“voltage” ou “tension”) pour obtenir un travail ; la question est : combien d’énergie acquièrent les charges ?

Ex. on applique ΔV entre deux plaques ; q_0 à gauche, à repos.

Energie de q_0 à $x = d$?



$$\Delta V = V(d) - V(0) = -E \cdot d + E \cdot 0 = -E \cdot d \tag{3.22}$$

$$\Rightarrow E = -\frac{\Delta V}{d} \tag{3.23}$$

Note 3.5. E est mesuré aussi en $[E] = \frac{V}{m}$

Énergie

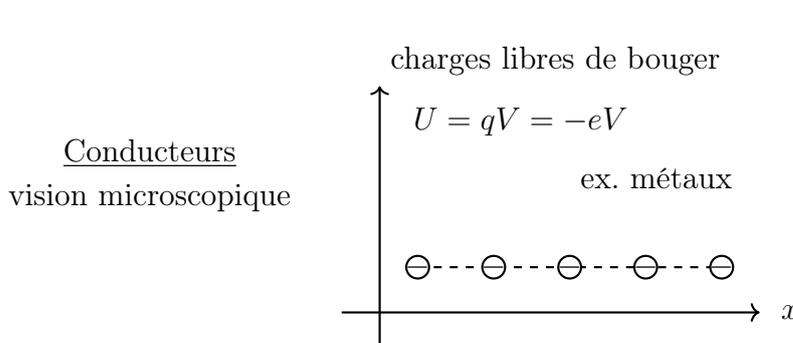
$$K_0 + U_0 = \overbrace{K_d}^{\text{cinétique}} + \overbrace{U_d}^{\text{potentielle}} \Rightarrow K_d = U_0 - U_d = q_0(V_0 - V_d) = -q_0\Delta V = q_0Ed \tag{3.24}$$

Donc $\frac{1}{2}mv^2 = -q_0\Delta V = q_0Ed$ (3.25)

La particule chargée acquiert de l’énergie car le champ/force fournit du travail.

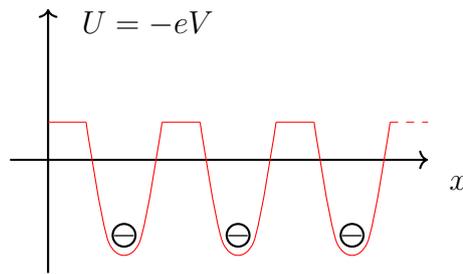
Note 3.6. Les téléviseurs à tube cathodique fonctionnaient comme ça avec des plaques qui contrôlent l’énergie (\rightarrow intensité et couleur) et la trajectoire, des électrons (position sur l’écran).

Classification simple de matériaux vis-à-vis de la possibilité d’avoir des charges qui bougent à l’intérieur.



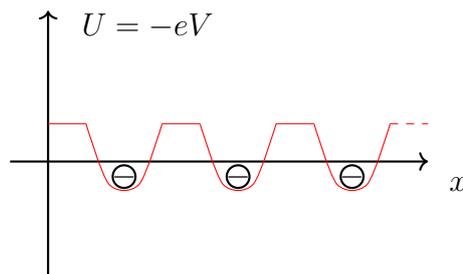
les électrons peuvent ‘rouler’ facilement (sans travail). Ils ne sont pas piégés à un endroit particulier.

Note 3.7. En réalité les effets quantiques ne sont pas négligeables...

Isolants

pas de ‘roulement’ libre pour les électrons. Seulement des petites oscillations autour de l’équilibre.

Semi-conducteurs
(entre les deux)

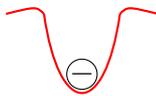


comme les isolants, mais les puits sont peu profonds, et les électrons peuvent sortir et transporter de la charge.

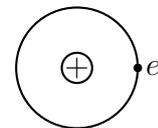
Ces structures sont plus ou moins fixes pour les solides, mais peuvent bouger pour les liquides et le gaz.

Par ex. dans un gaz (e.g. H)

$$U = -eV$$



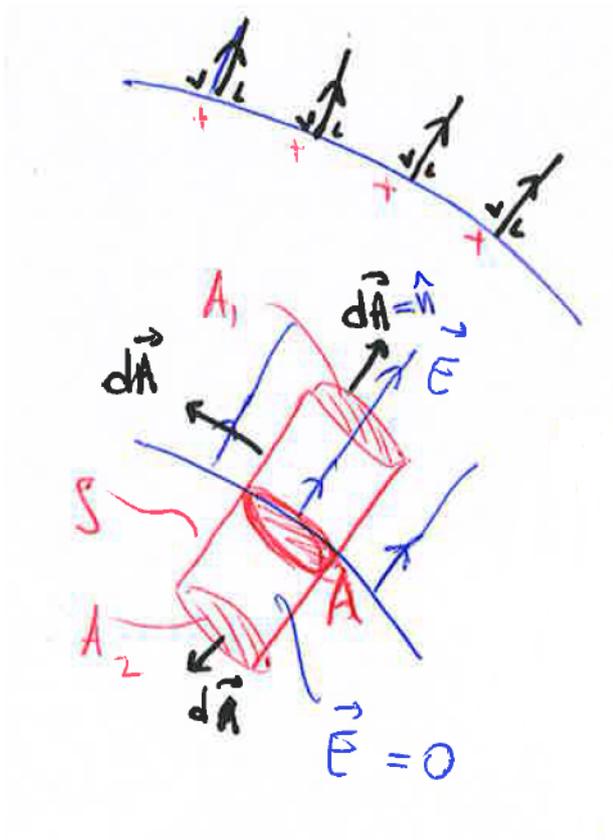
on peut ‘libérer’ l’électron et ioniser la gaz



3.3 Propriétés des conducteurs dans des champs électrostatiques

- (1) $\vec{E} = 0$ à l’intérieur (si non, les charges bougeraient) ;
- (2) Pas de charges à l’intérieur, seulement sur la surface (Gauss) ;
- (3) \vec{E} est \perp à la surface, car c’est à la surface que les charges se trouvent ; et toute composante du champ électrique parallèle à la surface les ferait bouger, chose pas admise dans une situation d’équilibre électrostatique.

(4)

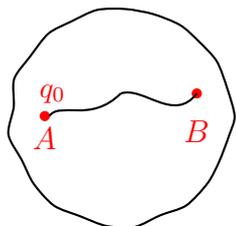


$$\text{Si } \sigma = \frac{dq}{da} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} \tag{3.26}$$

$$\text{Car } \Phi_E^S = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{A_1} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \underbrace{\int_{\text{côté}} \vec{E} \cdot d\vec{A}}_{=0 \text{ car } \vec{E} \perp d\vec{l}} + \underbrace{\int_{A_2} \vec{E} \cdot d\vec{A}}_{=0 \text{ car } E=0} = \int_{A_1} \vec{E} \cdot d\vec{A} \tag{3.27}$$

$$\text{Donc } \Phi_E^S = \int_{A_1} \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA = \frac{Q_{\text{en } S}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}} \tag{3.28}$$

(5) Le potentiel est constant - les conducteurs sont ‘équipotentiels’

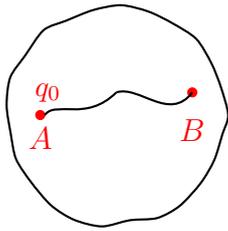


$$V(A) - V(B) = \frac{1}{q_0} \int_A^B q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{car } \vec{E} = 0 \tag{3.29}$$

$$\Rightarrow V(A) = V(B) \quad \forall A, B \tag{3.30}$$

Donc on ne fait pas de travail pour déplacer les charges (quasi-statiquement ! on ignore le frottement) sur un conducteur.

Question : pouvons-nous inverser l’argument et dire que $\vec{E} = 0$ toujours sur les surfaces équipotentiellles ? NON, pas en général !



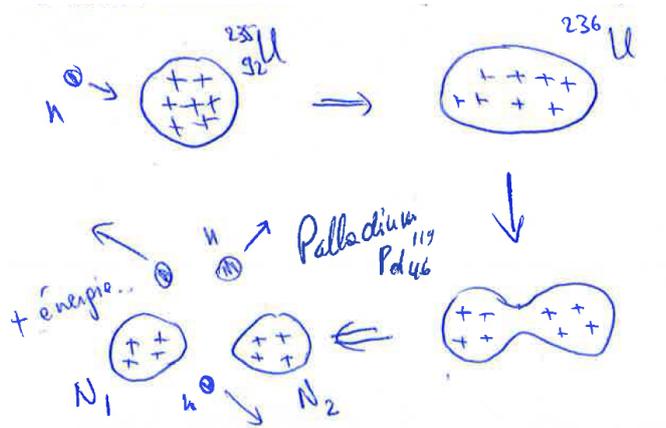
Si $V(A) = V(B), \forall A, B$, ça implique que le travail est nul : $\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ si $d\vec{l}$ est le long une surface équipotentielle.

Mais cela n'implique pas forcément $\vec{E} = 0$: on pourrait avoir $\vec{E} \perp d\vec{l}$

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{E} = 0 \\ \vec{E} \perp d\vec{l} \end{cases} \text{ donc...}$$

(6) En général, $\vec{E} \perp$ surfaces équipotentielles.

Exercice de calcul d'énergie potentielle électrique : fission nucléaire.



Énergie relâchée ? (calcul fait sans connaître la physique nucléaire!)

distance moyenne proton-proton
 $d \simeq 10^{-14}$ m

Énergie potentielle du noyau d'Uranium

$$U(Z = 92) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{(91 \cdot 92)}{d} e^2 \tag{3.31}$$

Énergie potentielle des deux noyaux résultants de la fission :

$$U(Z = 46) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{(45 \cdot 46)}{d} e^2 \tag{3.32}$$

Différence

$$\begin{aligned} \Delta U = U(Z = 92) - 2U(Z = 46) &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d} \left[\frac{91 \cdot 92}{2} - 45 \cdot 46 \right] = \\ &\simeq 2.7 \times 10^{-11} \text{ J} \quad \text{pour une réaction} \end{aligned} \tag{3.33}$$

$$1\text{kg de } ^{235}\text{U} \rightarrow \frac{1000}{235} \times N_A \text{ atomes} = 2.55 \times 10^{24} \text{ atomes}$$

Donc $\Delta U_{tot} = 2.55 \times 10^{24} \times 2.7 \times 10^{-11} \text{ J} \simeq 7 \times 10^{13} \text{ J} \sim 20000$ tonnes de TNT...

3.4 Le champ électrique comme dérivée du potentiel

Concept de gradient et relation entre \vec{E} et V .

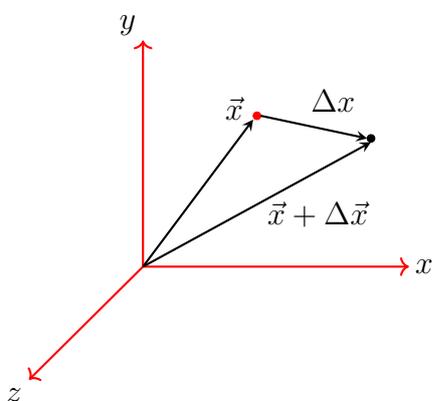
Si

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}, \quad (3.34)$$

peut on trouver \vec{E} à partir de V ?

V est une sorte d'intégrale de \vec{E} , donc \vec{E} sera une sorte de dérivée de V .

Considérons deux points proches (supposons $|\Delta\vec{x}|$ petit)



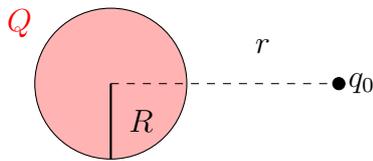
$$\begin{aligned} V(\vec{x} + \Delta\vec{x}) - V(\vec{x}) &= \\ &= \int_{\vec{x} + \Delta\vec{x}}^{\vec{x}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\vec{x}}^{\vec{x} + \Delta\vec{x}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \\ &\quad (\text{car } \vec{E} \simeq \text{const. sur un petite distance}) = \\ &\simeq - \vec{E} \cdot \int_{\vec{x}}^{\vec{x} + \Delta\vec{x}} d\vec{l} = - \vec{E} \cdot \Delta\vec{x} = \\ &= - \{E_x, E_y, E_z\} \{\Delta x, \Delta y, \Delta z\} = \\ &= (-E_x)\Delta x + (-E_y)\Delta y + (-E_z)\Delta z; \end{aligned} \quad (3.35)$$

mais $V(\vec{x} + \Delta\vec{x}) - V(\vec{x}) = \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial V}{\partial z} \Delta z \quad \forall \Delta x, \Delta y, \Delta z \text{ petits}$ (3.36)

$$\Rightarrow \begin{cases} E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \quad \text{ou } \vec{E} = -\vec{\nabla}V, \quad \vec{\nabla} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\} \quad (3.37)$$

Donc on peut bien trouver \vec{E} à partir de V , qui est une quantité scalaire, pour laquelle l'application du principe de superposition est plus simple. La direction de \vec{E} est donc celle le long de laquelle le potentiel décroît le plus rapidement.

Ex. de calcul simple : sphère métallique



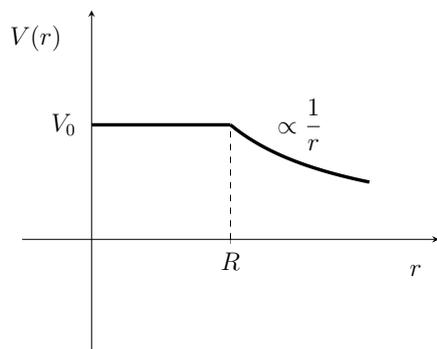
$$V(r) = V_0 \quad \text{const. pour } r \leq R$$

$$V(r) = ? \quad \text{pour } r > R?$$

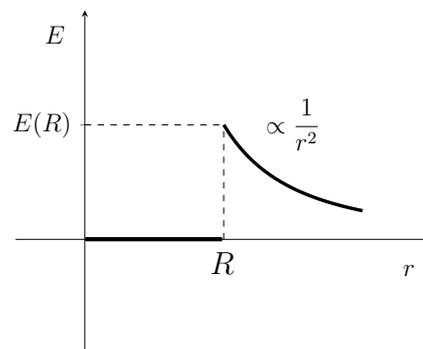
$$\vec{E}(r) = ?$$

$$V(r) = \frac{U(r)}{q_0} = \frac{1}{q_0} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq_0}{r} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \tag{3.38}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} = \left[-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \hat{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} \tag{3.39}$$



$$(V(r \rightarrow \infty) = 0)$$



Et si l'objet n'est pas sphérique?

$$\text{métal} \equiv \text{conducteur} = \begin{cases} \text{surface équipotentielle} \\ \text{charge uniquement sur la surface} \end{cases}$$

Est-ce que les charges vont se répartir uniformément sur la surface?

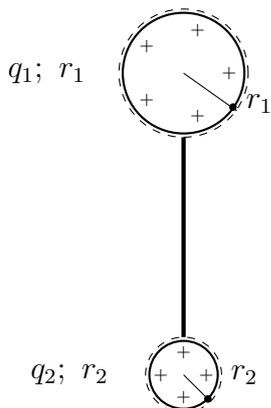
3.5 Surfaces équipotentielles

DEMO Effet d'une pointe

on observe que la charge est plus grande sur la pointe d'un objet métallique que sur le reste de sa surface

Effet de pointe

Prenons deux sphères conductrices connectées, donc au même potentiel (comme si c'était le même seul conducteur)



$$V_1(r_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1} = V_2(r_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2} = V \quad (3.40)$$

$$E_1(r_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1^2} = \frac{V}{r_1} \stackrel{r_1 \gg r_2}{\ll} \frac{V}{r_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2^2} = E_2(r_2) \quad (3.41)$$

En effet $\frac{E_1(r_1)}{E_2(r_2)} = \frac{r_2}{r_1}$: plus petit est le rayon, plus grand est E!

(3.42)

Si on considère la densité de charge sur la surface,

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow \sigma_1 = \epsilon_0 E_1 \ll \sigma_2 = \epsilon_0 E_2 \quad (3.43)$$

Avec un objet non-rond, mais avec une courbure différente à différents endroits :



On peut voir l'objet comme composé de N sphères avec rayons r_1, r_2, \dots, r_N , et $r_N \ll r_1$. Toutes les sphères sont au même potentiel :

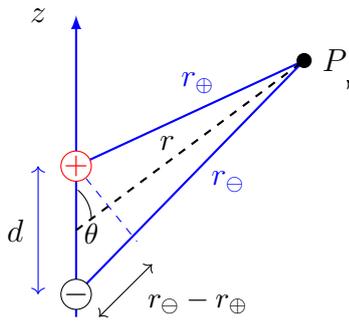
$$V_j = \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0 r_j}; \quad \text{avec } V_j = V_0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, N \quad (3.44)$$

et $Q_j = 4\pi\epsilon_0 r_j V_0$; densité de charge $\sigma_j = \frac{Q_j}{\text{surface}_j}$ (3.45)

$$\sigma = \frac{Q_j}{4\pi r_j^2} = \frac{4\pi\epsilon_0 r_j V_0}{4\pi r_j^2} = \frac{\epsilon_0 V_0}{r_j} \propto \frac{1}{r_j} \quad \begin{matrix} \text{plus petit est } r_j, \\ \text{plus grande est la densité de charge.} \end{matrix} \quad (3.46)$$

Ex. de calculs de potentiel et de champ ($\vec{E} = -\vec{\nabla}V$)

(1) Dipôle électrique $V(P) = ?$ $E(P) = ?$



on veut calculer le potentiel, puis E à cet endroit

(on se rappelle qu'on avait calculé $E \propto \frac{1}{(\text{distance})^3}$ mais seulement sur l'axe du dipôle)

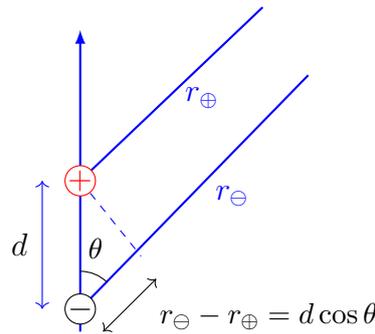
Principe de superposition

$$V = V_{\oplus} + V_{\ominus} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_{\oplus}} + \frac{-q}{r_{\ominus}} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_{\ominus} - r_{\oplus}}{r_{\oplus}r_{\ominus}} \tag{3.47}$$

Note 3.8. Les dipôles qui nous intéressent, comme ceux qui caractérisent les molécules polaires, telles que H_2O , sont très petits, et on s'intéresse aux valeurs de V et de E à des distances beaucoup plus grandes que la séparation des charges, $r \gg d$.

Donc on peut considérer que r_{\oplus} et r_{\ominus} sont approximativement parallèles :

$$\begin{cases} r_{\ominus} - r_{\oplus} \simeq d \cos \theta \\ r_{\oplus}r_{\ominus} \simeq r^2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow V \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \tag{3.48}$$

A partir de V on peut immédiatement calculer E : comme $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ on utilise les coordonnées polaires

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \tag{3.49}$$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \right\} = +\frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^3} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^3}; \tag{3.50}$$

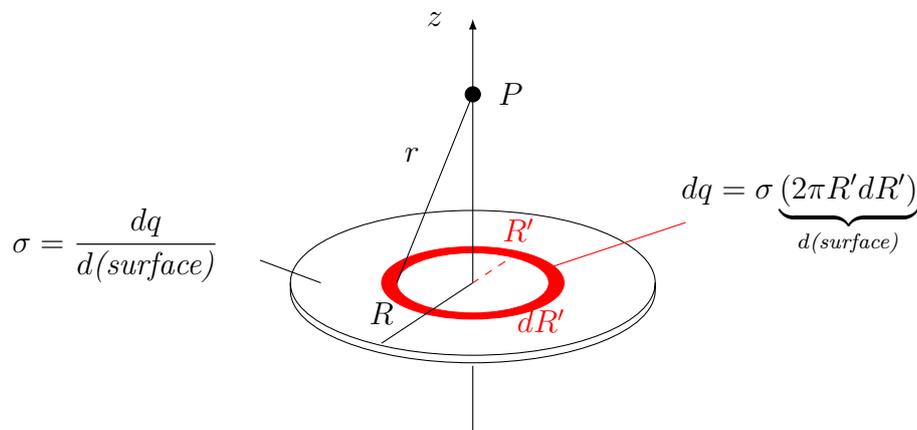
$$E_{\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \right) = \frac{1}{r} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^2} \sin \theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \tag{3.51}$$

Sur l'axe vertical, $\begin{cases} \sin \theta = 0 \\ \cos \theta = 1 \end{cases}$, et $\vec{E} = E(r)\hat{r} = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^3} \hat{r}$.

(Même résultat trouvé en faisant le calcul de E à partir de la formule).

(2) Potentiel dû à une distribution continue de charge : disque chargé uniformément.

$V(P) = ?$; $E(P) = ?$



La contribution de chaque anneau infinitésimal chargé avec dq au potentiel est :

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma 2\pi R' dR'}{4\pi\epsilon_0 r}; \quad r = \sqrt{z^2 + R'^2} \quad (3.52)$$

$$\text{Donc} \quad dV = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{R' dR'}{\sqrt{z^2 + R'^2}}; \quad (3.53)$$

Potentiel total (principe de superposition pour distribution continue) :

$$V = \int dV = \int_0^R \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{R' dR'}{\sqrt{z^2 + R'^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{z^2 + R'^2} \right]_0^R = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{z^2 + R^2} - z) \quad (3.54)$$

Note 3.9. On a pris le cas $z \geq 0$

→ Champ électrique $\vec{E}(z)$ sur l'axe vertical ?

Symétrie : \vec{E} ne peut pas avoir une autre direction que \hat{z}

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{E} = E_z \hat{z} &= -\frac{\partial V}{\partial z} \hat{z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{z^2 + R^2} - z) \right] \hat{z} = \\ &= -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} \left[\frac{1}{2} (z^2 + R^2)^{-1/2} 2z - 1 \right] = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} - 1 \right] \hat{z} = \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right] \hat{z}; \end{aligned} \quad (3.55)$$

Note 3.10. $\lim_{z \rightarrow 0} E_z(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, comme pour un plan infini !

Si on reprend la loi de Gauss, ensemble avec la relation entre \vec{E} et V , on arrive à une équation très compacte et générale pour V .

Loi de Gauss (en version ‘intégrale’) :

$$\Phi_E^S = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{\text{en S}}}{\epsilon_0} \quad (3.56)$$

Mais il y a un théorème mathématique (“de la divergence”) qui dit :

$$\int_{\text{Surface}} \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_{\text{Volume}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dV \quad \vec{B} \equiv \text{vecteur générique} \quad (3.57)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \equiv \text{div} \equiv \text{divergence de ...} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}. \quad (3.58)$$

$$\Rightarrow \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_{\text{Volume}} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \overbrace{\int_{\text{Volume}} (\rho dV)}^{\text{Q en S}} \quad (3.59)$$

Loi de Gauss en version ‘locale’ ou différentielle :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.60)$$

Mais $\vec{E} = -\vec{\nabla}V \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}V) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (3.61)

Équation de Poisson : $\left[\nabla^2 \equiv \text{laplacien} \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right]$

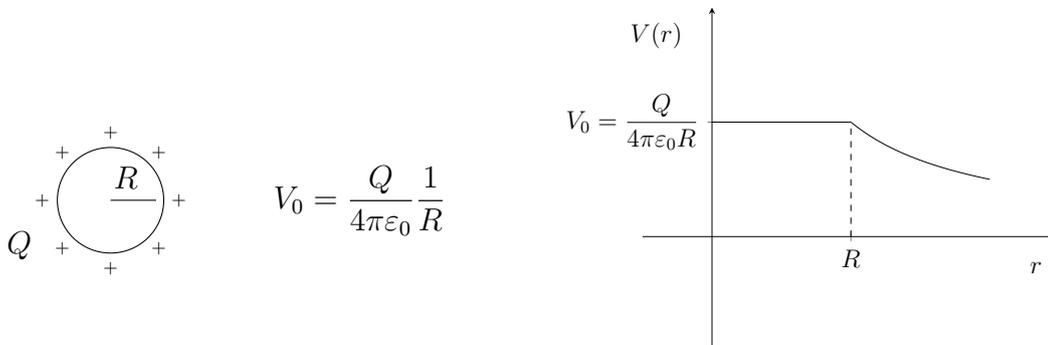
$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.62)$$

Relie source (densité de charge) et potentiel.

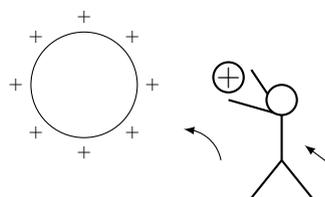
Si $\rho = 0 \Rightarrow \nabla^2 V = 0$, équation de Laplace. (3.63)

3.6 Capacité électrique

Revenons au cas simple d'une sphère chargée (métallique).



V_0 est proportionnel à Q . Plus de charge je mets sur la sphère, plus j'augmente son potentiel. Mais au fur et à mesure que je mets de la charge, ça devient plus difficile d'en mettre encore, parce je dois la 'pousser' pour vaincre la répulsion.



Donc je dois faire du travail contre E , et en faisant ce travail j'augmente l'énergie potentielle du système et, bien sur, l'énergie/unité de charge, donc le potentiel.

Pour n'importe quel objet, on définit la "capacité" C comme :

$$Q = \underbrace{[\text{const.}] V}_{\text{capacité, } C} \qquad C = \frac{Q}{V} \qquad (3.64)$$

$$[C] = \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} = \text{Farad, F}$$

Ex. sphère

$$Q = \underbrace{4\pi\epsilon_0 R}_{C} V_0 \qquad \Rightarrow \qquad C = 4\pi\epsilon_0 R \quad (\text{ne dépend que de la géométrie}) \qquad (3.65)$$

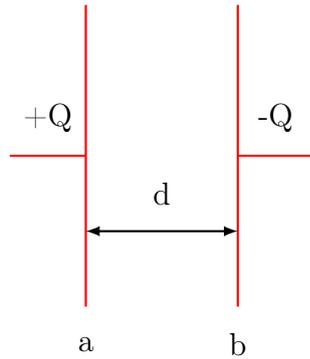
Plus la sphère est grande, plus de charge on peut y stocker.

Ex. terre $R \sim 6 \times 10^6 \text{ m}$; $C = 4\pi\epsilon_0 R \cong 4 \times 3 \times 8.8 \times 10^{-12} \times 6 \times 10^6 \cong 6 \times 10^{-4} \text{ F} = 600 \mu\text{F}$ (petit ! 1 F c'est une capacité énorme !)

Note 3.11. Dans l'ex. conceptuel de la sphère, je considère que la charge que j'y mets dessus est prise à $r \rightarrow \infty$, où le potentiel est nul. Si je veux augmenter la possibilité de stocker la charge, donc la capacité, je devrais prendre la charge d'une surface proche.

Def. "condensateur" : deux conducteurs séparés par un isolant (ou par la vide).

Ex. plans parallèles



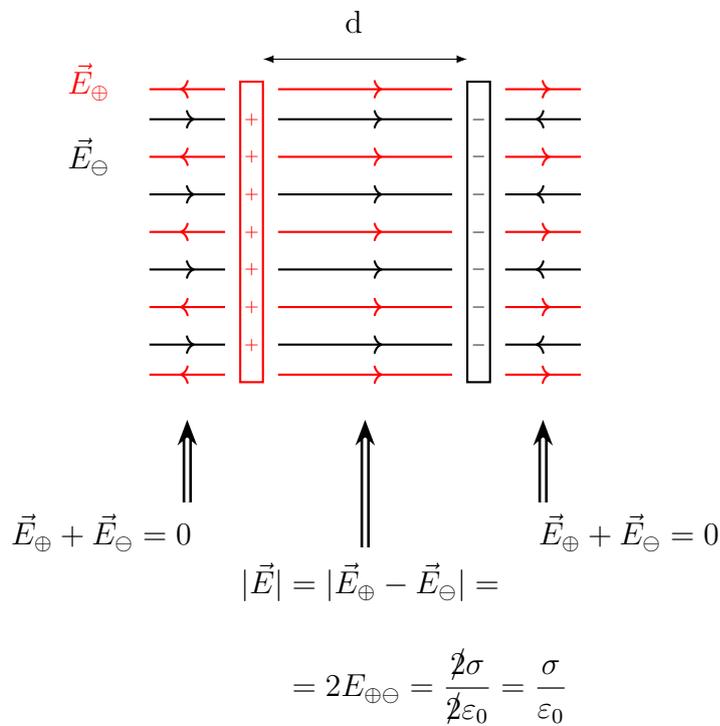
- Pas de charge au début
- Supposons de prendre de la charge +Q d'un côté et de l'amener à l'autre côté.

Il n'y a pas de charge nette. Mais le processus de déplacer la charge d'un côté à l'autre est appelé 'charger le condensateur'.

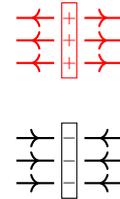
$|\pm Q|$ = 'charge' du condensateur.

$$C = \frac{Q}{V_a - V_b}; \quad \text{calculons-la!}$$

L'idée est toujours de calculer le potentiel (ou le champ) produit par Q , puis prendre le rapport.



Chaque plaque produit un champ (effets de bord négligés) :



$$|E_{\oplus}| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$|E_{\ominus}| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E} \cdot \int_a^b d\vec{l} = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$

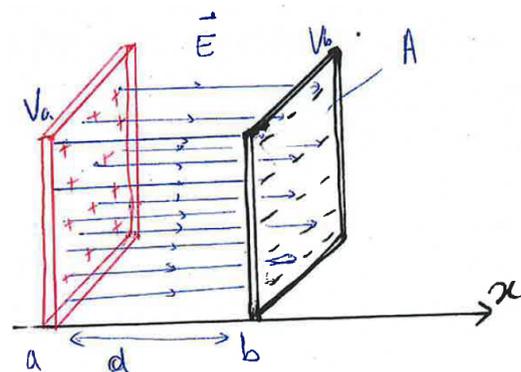
(3.66)

Mais $Q = \sigma A; \sigma = \frac{Q}{A}$

(3.67)

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{V_a - V_b} = \frac{Q}{Ed} = \frac{Q}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} d} = \frac{\epsilon_0 Q}{\frac{Q}{A} d} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

(3.68)



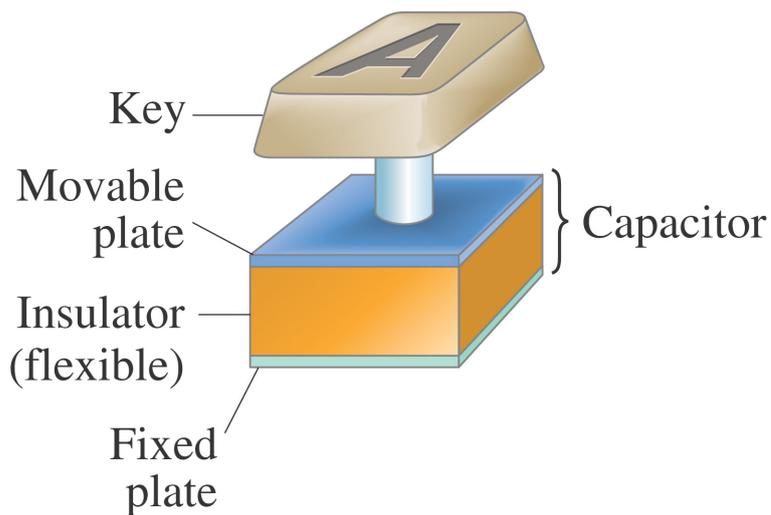
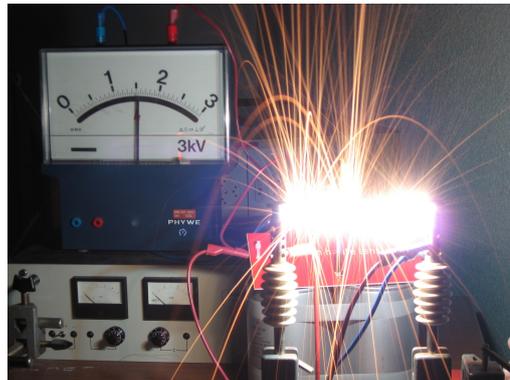
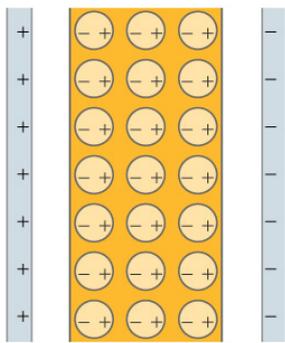
Note 3.12. *C dépend uniquement de facteurs géométriques.*

☞ *Si on fait un calcul de C et on trouve une dépendance de V, E, ou Q, on a fait certainement une erreur !*

Note 3.13. *C augmente avec A (plus de place pour stocker charge), et diminue avec d (plus difficile de bouger la charge, car V augmente).*

Chapitre 4

Capacité électrique, condensateurs et diélectriques



Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

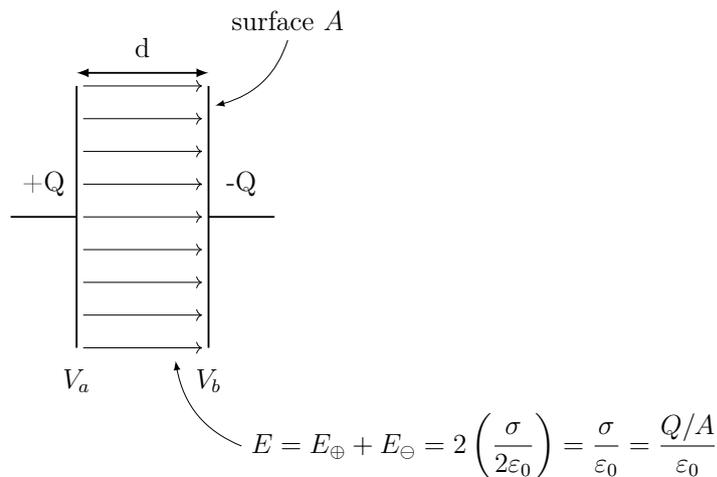
4.1 Capacité électrique et stockage d'énergie

Rappel

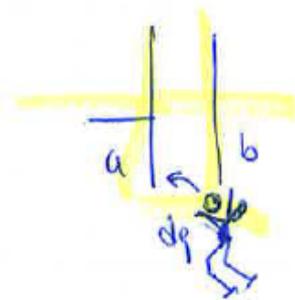
$$Q = \underbrace{\text{const.}}_C \times V \Rightarrow C = \frac{Q}{V} \quad (4.1)$$

Ex.

- sphère $C = 4\pi\epsilon_0 R$
- plaques parallèles $C = \frac{Q}{V_a - V_b} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$



Le condensateur comme un “emaganeuseur” d'énergie



“je” dois faire du travail pour transférer la charge, petit à petit, par petits pas de dq , d'un côté à l'autre

$$\frac{dW}{dq} = V \text{ (c'est la définition de } V \text{ !)}$$

$$\Rightarrow dW = V dq : \text{ et le travail total ?}$$

$$W_{tot} = \int dW = \int_{Q_{initial}}^{Q_{final}} V dq = \int_0^Q V dq \underset{V=\frac{q}{C}}{=} \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \left[\frac{1}{2} q^2 \right]_0^Q = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (4.2)$$

Le travail correspond à l'augmentation de l'énergie potentielle

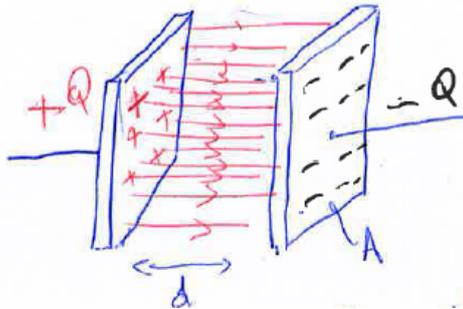
$$U_{stockée} = W_{tot} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2 \frac{Q}{V}} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} (CV)V = \frac{1}{2} CV^2 \quad (4.3)$$

Donc, plus C est grande, et plus V est élevée, plus grande est la quantité d'énergie qu'on peut stocker.

Donc un condensateur représente une façon de stocker de l'énergie dans un circuit, que l'on utilise après pour différentes fonctions, par ex. pour faire tourner un moteur ou allumer une ampoule.

Note 4.1. *C peut stocker l'énergie, mais ne peut pas l'amplifier. Par contre, on peut accumuler de l'énergie pendant un temps relativement long, puis l'utiliser sur un temps court : dans ce cas on amplifie la puissance.*

Évaluons l'énergie emmagasinée en termes de champ électrique



$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$V = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0}d$$

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \frac{A}{d} \right) (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \underbrace{Ad}_{\text{volume}} \quad (4.4)$$

En général

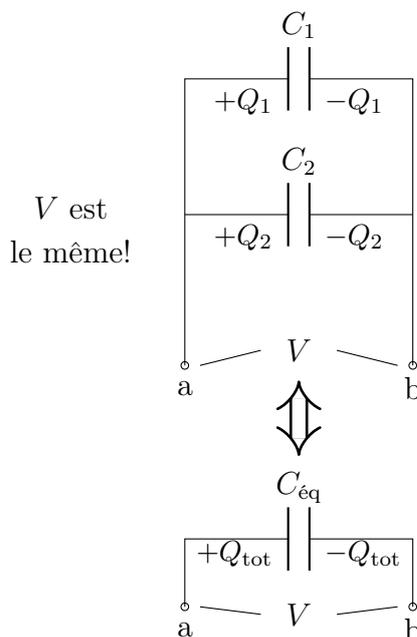
$$\frac{dU}{d\text{Volume}} = \text{densité d'énergie} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (4.5)$$

Donc l'énergie est stockée sous forme de champ électrique dans un certain volume.

4.2 Condensateurs dans les circuits électriques

Deux types de connexions : en série ou en parallèle

(1) *C* en parallèle → [parallèle = même potentiel, car les fils sont des surfaces équipotentielles]

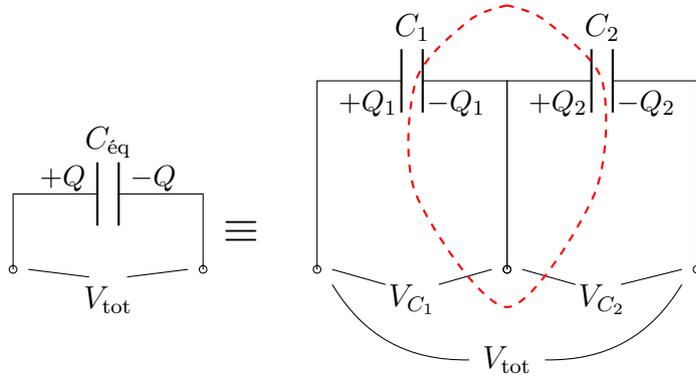


$$V_{C_1} = V_{C_2} = V \quad ; \quad V = \frac{Q}{C} \quad \text{donc}$$

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \quad ; \quad \text{et } Q_1 + Q_2 = Q_{tot}$$

$$\begin{aligned} C_{eq} &= \frac{Q_{tot}}{V} = \frac{Q_1 + Q_2}{V} = \frac{Q_1}{V} + \frac{Q_2}{V} = \\ &= \frac{Q_1}{V_{C_1}} + \frac{Q_2}{V_{C_2}} = C_1 + C_2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Pour plusieurs C_j en parallèle : $C_{eq} = \sum_{j=1}^N C_j$
 (2) C en série



Ici $Q_1 = Q_2$ (par ex. si l'on considère la partie rouge, qui n'a aucune connexion externe)

$$\begin{cases} V_{tot} = V_{C_1} + V_{C_2} \\ Q_1 = Q_2 = Q \end{cases} \quad V_{tot} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = Q \left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right] = \frac{Q}{C_{eq}} \quad (4.7)$$

$$\Rightarrow C_{eq} = \left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right]^{-1} \quad (4.8)$$

Pour plusieurs C_j en série : $C_{eq} = \left[\sum_{j=1}^N \frac{1}{C_j} \right]^{-1}$



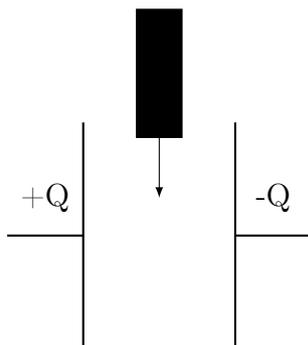
4.3 Diélectriques et polarisation

Note 4.2. Prenons $A \simeq 1 \text{ m}^2$; $d = 1 \text{ mm}$

$$\Rightarrow C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = \frac{8.8 \times 10^{-12} \times 1}{10^{-3}} = 10^{-8} \text{ F} = 10 \text{ nF}$$

Très petite valeur ! Comment, dans la pratique, produit-on des capacités avec $C \sim \mu\text{F}$ ou mF ? Diélectriques !

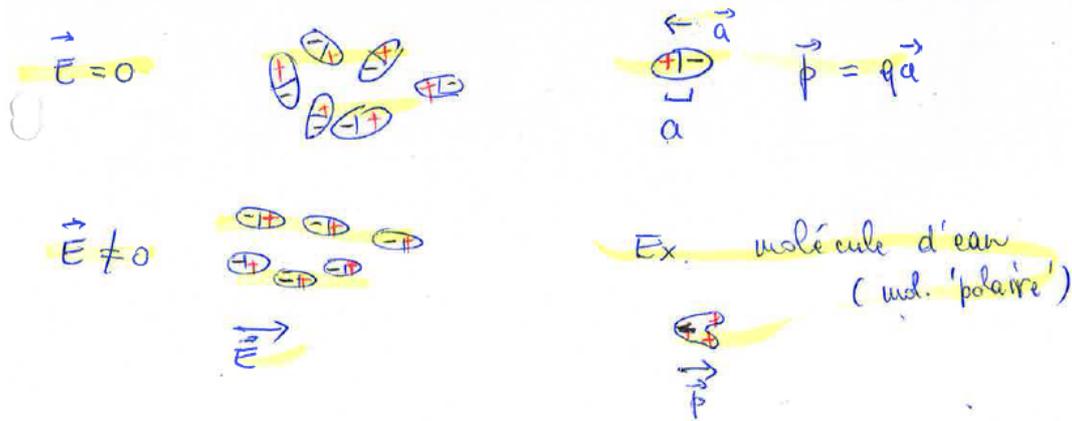
DEMO potentiel qui varie avec la distance entre les deux plaques, et avec l'insertion d'un diélectrique.



Q ne change pas ; mais lorsqu'on insère la plaque de diélectrique, la tension V diminue. Comme $V = \frac{Q}{C}$, cela veut dire qu'on a augmenté la valeur de C en insérant le diélectrique.

Pourquoi ? L'explication est dans le comportement des diélectriques au niveau microscopique.

Un diélectrique (\equiv isolant) est fait de petits dipôles. Les charges ne peuvent pas vraiment bouger librement, mais les dipôles peuvent tourner et s'aligner avec le champ \vec{E} .



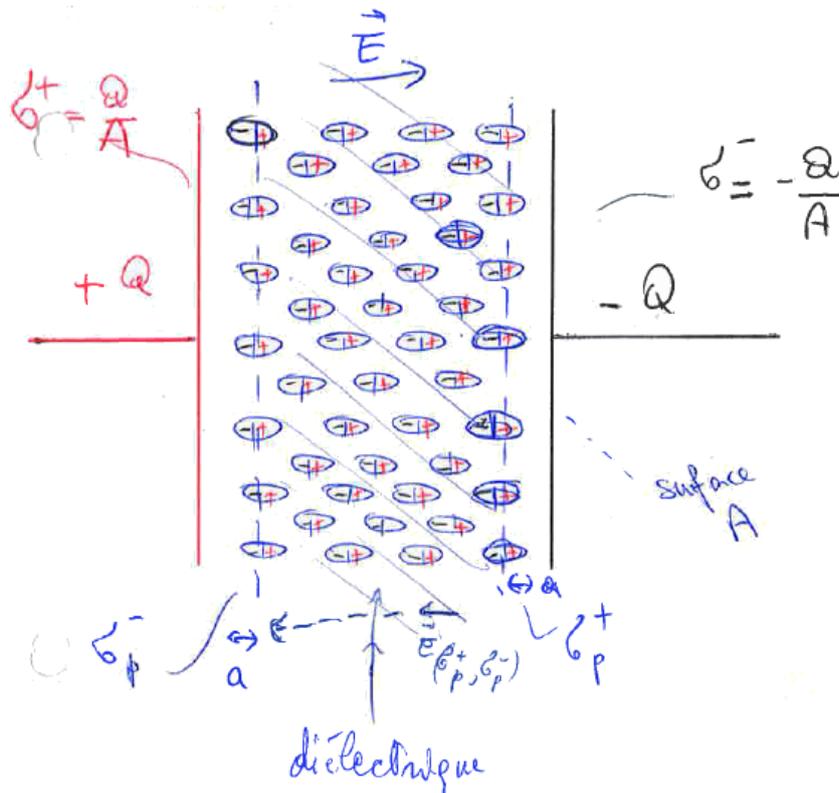
Déf. $\vec{P} = n\vec{p}$ "polarisation", où n est le nombre de dipôles par unité de volume. Ça dépend du matériau, mais aussi du champ \vec{E} !

En effet plus grand est $|\vec{E}|$, plus grande est la valeur de $|\vec{P}|$ (et la direction sera la même que \vec{E})

$$\vec{P} = const. \times \vec{E} = (\epsilon_0\chi)\vec{E} \quad \text{où on définit} \quad \chi \text{ "susceptibilité" diélectrique}$$

χ est un scalaire sans dimensions; $\chi > 0$.

Vision microscopique à l'intérieur du condensateur avec diélectrique



Toutes les charges des dipôles se compensent, excepté pour les deux couches externes. Celles-ci ont une densité de charge superficielle de σ_p^+ et σ_p^- .

Ces couches non-équilibrées ont une épaisseur de $\sim a$ (la taille des dipôles). Ces densités de charge superficielle créent un champ qui à l'intérieur du matériel s'oppose au champ original, et le diminue.

Combien de charges de polarisation ne sont pas équilibrées ?

$$\# \text{ de charges non-équilibrées} = \underbrace{n}_{\substack{\# \text{ de dipôles} \\ \text{volume}}} \times \underbrace{aA}_{\text{volume}} = naA$$

Densité superficielle

$$|\sigma_p^+| = |\sigma_p^-| = \frac{Q_p^{tot}}{A} = \frac{q \overbrace{naA}^{\# \text{ charges}}}{A} = qna = np = P \tag{4.9}$$

$$\Rightarrow |\sigma_p^+| = |\sigma_p^-| = P \tag{4.10}$$

Champ total, réduit par l'effet de la polarisation :

$$E = \underbrace{\frac{\sigma}{2\epsilon_0}}_{\text{vide}} + \underbrace{\frac{\sigma}{2\epsilon_0}}_{\text{vide}} - \frac{|\sigma_p^+|}{2\epsilon_0} - \frac{|\sigma_p^-|}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{P}{\epsilon_0} = E_0 - \chi E \tag{4.11}$$

$\frac{\epsilon_0 \chi E}{\epsilon_0} = \chi E$

$$\Rightarrow E(1 + \chi) = E_0 \tag{4.12}$$

$$E = \frac{E_0}{1 + \chi} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{E_0}{K} \quad \text{avec} \quad K \stackrel{\text{def.}}{=} 1 + \chi \quad \text{“constante diélectrique”} \tag{4.13}$$

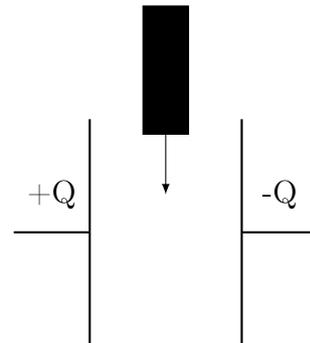
des fois on l'indique avec ϵ_r
 $K > 1$ car $\chi > 0$ “permittivité relative”

K donne le facteur de réduction du champ (et donc du potentiel) à cause de la présence du diélectrique et sa charge de polarisation à la surface.

On peut maintenant qualifier l'augmentation de C :

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{Ed} = \frac{QK}{dE_0} = KC_0 \tag{4.14}$$

où C_0 est la valeur de la capacité sans diélectrique.



La capacité est donc augmentée d'un facteur K (le même que le facteur de réduction de E) $E \rightarrow \frac{E_0}{K}$; $V \rightarrow \frac{V_0}{K}$.

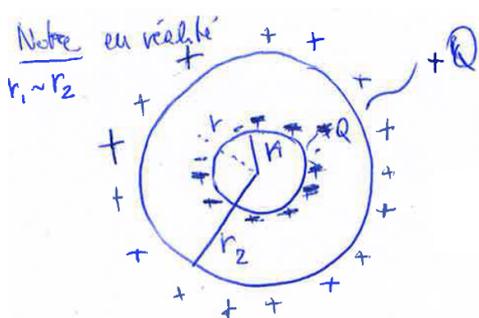
Dans la pratique, on choisit des diélectriques avec une grande valeur de K pour augmenter le valeur de C .

Ex. de valeurs de K

matériel	$K = 1 + \chi$
vide	1
air	1.0006
plexiglas	3.4
eau	80 (20°)
ethanol	23
céramique	~ 5000
verre	5 – 15

Effets biologiques : beaucoup d'interactions en biologie sont liées aux forces électrostatiques dans les fluides (en grande majorité, eau). Si on remplace l'eau avec d'autres liquides qui ont des valeurs très différentes de K , par ex. l'alcool, ces interactions sont fortement influencées!

Ex. Cellule vue comme un condensateur sphérique. Quelle est sa capacité? Et la valeur du champ? Ou de la densité de charge?



$$E(r) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} V_{out} - V_{in} = \Delta V &= + \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = \\ &= + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] > 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right) > 0 \quad (4.17)$$

Capacité :

$$C = \frac{|Q|}{|\Delta V|} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left| \left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} \right) \right|} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{|r_1 - r_2|} \quad (4.18)$$

Cellule :

$$\begin{cases} r_1 \sim r_2 \sim 10^{-5} \text{ m} \quad (= 10 \mu\text{m}) \\ r_1 - r_2 \sim 6 \cdot 10^{-9} \text{ m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow C \simeq 4\pi\epsilon_0 \frac{(10^{-5})^2}{6 \cdot 10^{-9}} \cong \frac{12 \times 8.8 \times 10^{-12} \times 10^{-10}}{6 \times 10^{-9}} \cong 1.8 \cdot 10^{-12} \text{ F} \simeq 2 \text{ pF}$$

A partir de C on peut calculer la charge sur la surface de la cellule : $|Q| = C|\Delta V|$, et typiquement $|\Delta V| \sim 0.1 \text{ V} = 100 \text{ mV}$

$$\Rightarrow |Q| \simeq 2 \cdot 10^{-12} \cdot 0.1 \text{ C} = 2 \cdot 10^{-13} \text{ C}; \quad N = \frac{Q}{e} = \frac{2 \cdot 10^{-13} \text{ C}}{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} \cong 10^6 \text{ charges élémentaires}$$

Densité de charge à la surface :

$$\sigma \sim \frac{|Q|}{4\pi r_1^2} \simeq \frac{|Q|}{4\pi r_2^2} \simeq \frac{2 \cdot 10^{-13} \text{ C}}{12 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2} = \frac{1}{6} \cdot 10^{-3} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \simeq 0.17 \times 10^{-3} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

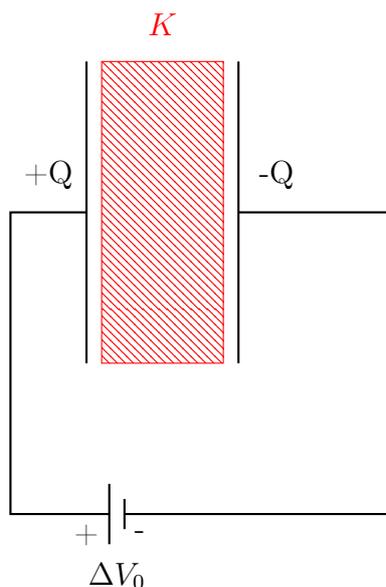
Mais quand on mesure, on trouve $\sigma_{\text{réel}} \sim 10\sigma$: pourquoi ? Parce que la membrane a des propriétés diélectriques, qui font que $C \rightarrow KC_0$, avec $K \sim 10$!

En effet, en réalité, $C \sim 20 \text{ pF}$, et pas 2 pF !

Énergie stockée dans un condensateur avec diélectrique.

On a vu que l'énergie stockée est $U_{\text{stockée}} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2$.

Considérons maintenant un condensateur avec diélectrique, auquel on applique une différence de potentiel ΔV_0



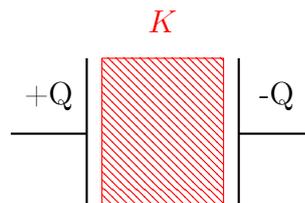
$$Q_0 = (KC_0)\Delta V_0$$

$$\text{ou } \Delta V_0 = \frac{Q_0}{KC_0}$$

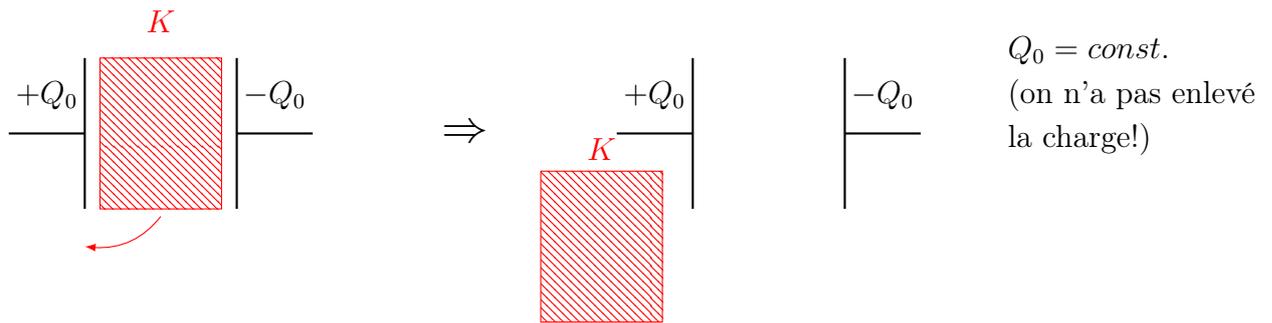
C_0 est la capacité du condensateur sans diélectrique

Détachons la batterie, en laissant donc la même charge Q_0 sur les plaques du condensateur. L'énergie stockée est donc

$$U_{\text{avant}} = \frac{1}{2} \underbrace{(KC_0)}_C \Delta V_0^2$$



Maintenant enlevons le diélectrique



Que vaut ΔV ? $\Delta V = \frac{Q_0}{C_0}$ (il n'y a plus de K !) Donc $\Delta V = K\Delta V_0$: la tension a augmenté!
Et l'énergie?

$$\Rightarrow U_{\text{apres}} = \frac{1}{2}C_0\Delta V^2 = \frac{1}{2}C_0K^2\Delta V_0^2 = \frac{1}{2}\underbrace{(KC_0)\Delta V_0^2}_{U_{\text{avant}}} \times K = U_{\text{avant}} \times K \quad (4.19)$$

Donc l'énergie a augmenté

$$U_{\text{après}} - U_{\text{avant}} = (K - 1)U_{\text{avant}} \quad (4.20)$$

D'où vient cette énergie?

Idée: Nous avons dû faire un travail pour "sortir" le diélectrique du condensateur, donc ça vient de nous!

Donc, si on doit faire un travail pour extraire le diélectrique, en augmentant l'énergie du système, ça veut dire que le diélectrique devrait naturellement être attiré à l'intérieur du condensateur.

Chapitre 5

Courant électrique, résistance, puissance et circuits DC



TABLE 19-1 Symbols for Circuit Elements

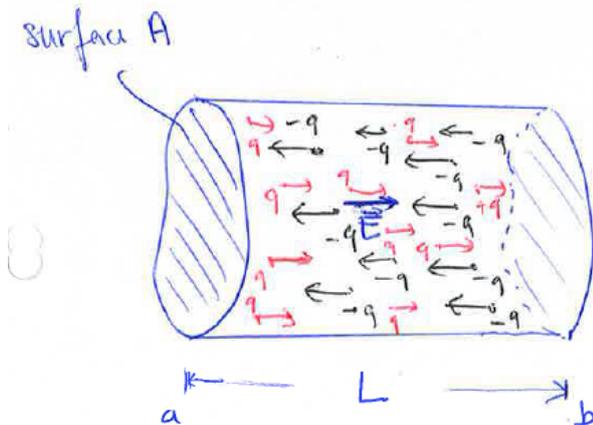
Symbol	Device
--- --- ---	Battery
--- --- --- or --- --- ---	Capacitor
$\text{---}\sim\text{---}$	Resistor
---	Wire with negligible resistance
$\text{---}\text{---}$	Switch
$\text{---}\perp\text{---}$ or $\text{---}\downarrow\text{---}$	Ground



5.1 Le courant électrique

Fin de l'électrostatique : dorénavant les charges peuvent bouger. L'argument utilisé pour conclure que $\vec{E} = 0$ dans les conducteurs n'est plus valable.

Considérons un conducteur ($\vec{E} \neq 0$, et on permet aux charges de bouger...)



$$V_a - V_b = V \Rightarrow E = \frac{V}{L} \quad (5.1)$$

Déf. 'courant électrique' :
quantité de charge nette qui passe à travers la surface A par unité de temps.

$$i = \frac{dQ}{dt}; \quad [i] = \frac{C}{s} = A \quad \text{"ampère"} \quad (5.2)$$

Note 5.1. Le courant électrique est une quantité scalaire, liée au conducteur spécifique que l'on considère.

Note 5.2. Le courant a un signe, donc une direction. La convention est que la direction du courant est celle du mouvement des charges positives (même si ce sont les électrons qui bougent!).

Deux conditions pour avoir un courant :

- (1) Porteurs de charge libres de bouger
- (2) Champ électrique (ou différence de potentiel) $\neq 0$

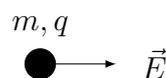
5.2 Résistivité et résistance électriques

Naturellement, le courant passe uniquement si on applique un champ \vec{E} , ou une différence de potentiel ΔV . Mais combien de courant passe pour un E (ou un ΔV) donné ?

\Rightarrow Résistivité et résistance

Analyse microscopique.

Charge q , avec masse m



Équation du mouvement :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}$$

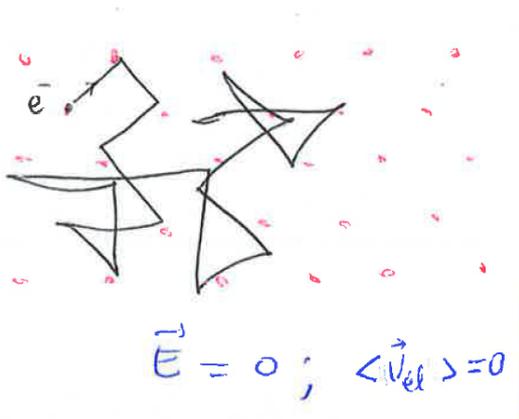
Si $|\vec{E}| \neq 0$, $|\vec{v}|$ augmente tout le temps : $|\vec{v}| \rightarrow \infty$

Mais est-ce possible, en particulier si les charges sont dans un objet matériel? Non, car il y a de la résistance!

Analogie avec la gravité : si on saute avec un parachute, on n'accélère pas à l'infini, car il y a le frottement de l'air, et on atteint une 'vitesse terminale'.

Quelle est l'origine du 'frottement' (résistance) pour les charges?

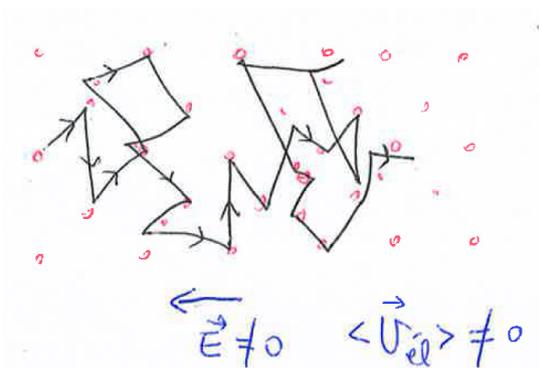
Métal : les atomes et ions forment un réseau qui vibre, mais en moyenne restent au même endroit. Par contre, un certain nombre d'électrons se déplacent librement.



La source du mouvement désordonné est la température. Les électrons sont beaucoup plus légers et mobiles, et leur mouvement thermique est bien plus significatif pour la même température. Ils rebondissent dans le réseau du métal, mais si $E = 0$, en moyenne $\langle \vec{v}_{el} \rangle = 0$

Note 5.3. $\langle \vec{v}_{el} \rangle = 0$, mais $v_{th,el} \simeq 10^6 \frac{m}{s}$ à température ambiante $\left[v_{th,el} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}} \right]$

Si $\vec{E} \neq 0$, les électrons ont toujours un mouvement aléatoire très rapide, mais avec une moyenne $\neq 0$.



$$\langle \vec{v}_{el} \rangle \neq 0$$

On peut quantifier le terme de frottement contre les ions du réseau comme un terme de frottement classique, proportionnel à $|\vec{v}|$.

$$m \frac{d\vec{v}_d}{dt} = q\vec{E} - \underbrace{f\vec{v}_d}_{\text{frottement}} \tag{5.3}$$

équation du mvt. pour la vitesse ordonnée, "de dérive"

Etat stationnaire :

$$\frac{d\vec{v}_d}{dt} = 0 \tag{5.4}$$

(mais pas statique! $\vec{v}_d \neq 0$)

$$q\vec{E} = f\vec{v}_d, \quad \text{où } \vec{v}_d = \text{vitesse de dérive terminale} \tag{5.5}$$

$$\vec{v}_d = \frac{q\vec{E}}{f}; \quad \text{note } v_d \ll v_{\text{th, el.}}; \quad \text{typiquement, dans un métal } v_d \sim 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

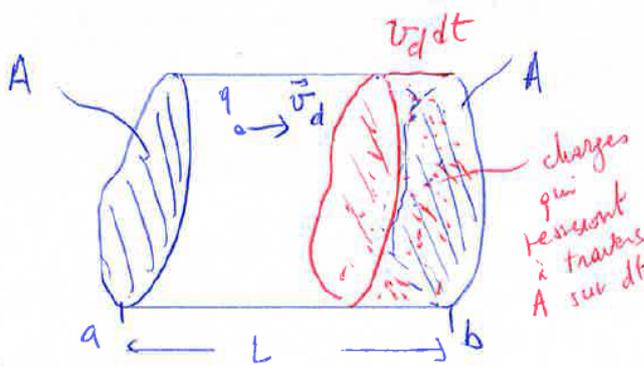
Discussion.

Pourquoi quand on allume une lampe, on ne doit pas attendre le temps correspondant à $\Delta t = \frac{\text{distance (lampe-interrupteur)}}{v_d}$ (qui serait assez long..)?

...c'est comme quand un peloton de soldats est mis en marche par l'ordre d'un sergent... tous les soldats commencent à marcher en même temps, les premiers n'ont pas besoin d'attendre que les derniers arrivent là où ils sont. La commande s'est propagée bien plus vite que la marche.

Dans notre cas la 'commande' est la différence de potentiel. A quelle vitesse pensez-vous que celle-ci se propage?

Vision microscopique de notre conducteur



$$E = \frac{V_a - V_b}{L} = \frac{V}{L} \quad (5.6)$$

Quelles charges passent à travers A sur le temps dt ?

→ celles qui étaient à une distance de A inférieure ou égale à $v_d dt$

Donc :

$$i = \frac{\text{charge à travers A sur } dt}{dt} = \frac{dQ}{dt} = \frac{q \times \# \text{charges dans volume } Av_d dt}{dt} = \quad (5.7)$$

$$= q \underbrace{n_q}_{\substack{\# \text{ de charges} \\ \text{volume}}} \underbrace{Av_d dt}_{\text{volume}} \frac{1}{dt} = nqv_d A; \quad (5.8)$$

Cette valeur dépend de A, donc de la géométrie du conducteur spécifique considéré.

Déf.

$$\vec{J} \quad \text{densité de courant} \quad [J] = \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

$$\vec{J} \quad \text{est tel que } \vec{J} \cdot \vec{A} = i \quad [i \text{ est donc équivalent à un flux}]$$

\vec{J} est une quantité locale qui décrit le flot de charge en général, indépendamment du conducteur spécifique.

$$\text{Comme } i = n_q q v_d A \quad \Rightarrow \quad \vec{J} = n_q q \vec{v}_d$$

Note 5.4. Si on a plusieurs (N) espèces de porteurs de charge (ex. ions et électrons), alors $\vec{J} = \sum_{j=1}^N n_{q_j} q_j \vec{v}_{d_j}$

Maintenant, nous voulons revenir à l'estimation de la résistivité, pour laquelle on veut exprimer \vec{J} en fonction de \vec{E} .

Considérons, par simplicité, une seule espèce (typiquement les électrons)

$$\underbrace{\vec{v}_d = \frac{q\vec{E}}{f}}_{\text{vitesse "terminale"}} \Rightarrow \vec{J} = n_q q \vec{v}_d = n_q q \frac{q\vec{E}}{f} = \underbrace{\left(\frac{n_q q^2}{f}\right)}_{\text{const.}} \vec{E} \stackrel{\text{déf.}}{=} \underbrace{1}_{\rho = \text{résistivité}} \vec{E} \quad (5.9)$$

La résistivité $\rho = \frac{f}{n_q q^2}$, est donc une mesure de la friction : plus il y en a, moins de densité de courant sera générée par un E donné.

Note 5.5. Plus de porteurs de charge (on plus de charges par porteur), plus facile sera de faire passer un courant

$$[\rho] = \frac{\text{V m}^2}{\text{A}} = \text{m} \frac{\text{V}}{\text{A}} = \text{m}\Omega \quad \text{"ohm-mètre"} \quad (5.10)$$

ρ dépend du matériau (isolant, semi-conducteur ou conducteur).

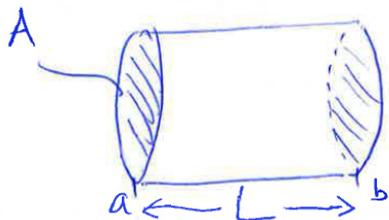
Question : si on applique une différence de potentiel sans augmenter la vitesse des porteurs de charges, où va notre 'travail', donc l'énergie ?

Ex. gravité : si on tombe avec un parachute, la force de gravitation fait un travail sur nous, mais une fois arrivés à notre vitesse terminale, nous n'accélérons plus. Où va le travail ?
 → dans l'échauffement de l'air dû au frottement. Avec un parachute/ une personne on ne verra pas d'effet, mais avec $\sim 10^{23}$ parachutes, on devrait voir un échauffement de l'air !
 Le même concept s'applique au courant électrique : l'énergie va dans l'augmentation des oscillations du réseau avec lequel les électrons rentrent en collision.

Revenons à la résistivité : on veut passer de la propriété d'un matériau en général à celle d'un bout de conducteur "réel".

→ **Résistance** déf. $R \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{V}{i}$ pour un objet donné

$[R] = \frac{\text{V}}{\text{A}} = \Omega$ "ohm" ; symbole 



$$V_a - V_b = V; \quad \vec{J} = \frac{1}{\rho} \vec{E}; \quad \vec{J} \cdot \vec{A} = JA$$

$$i = JA = \frac{1}{\rho} EA \underset{E=\frac{V}{L}}{=} \frac{1}{\rho} \frac{V}{L} A = \frac{A}{\rho L} V$$

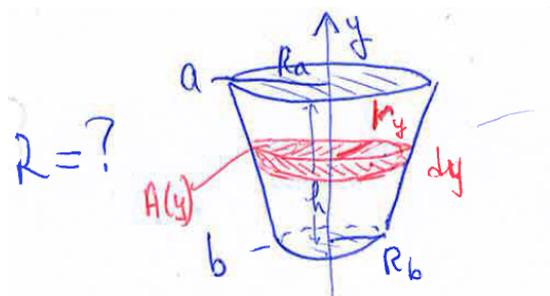
$$\Rightarrow R = \frac{V}{i} = \rho \frac{L}{A}$$

\uparrow
 matériau
 \uparrow
 géométrie (cylindrique)

Note 5.6. En général, nous considérons dans ce cours $\vec{J} \perp \vec{A}$, donc $\vec{J} \cdot \vec{A} = JA = i$.

Pour résoudre les problèmes de calcul de résistance, on essaye toujours de se référer au cas du conducteur cylindrique (fil).

Ex. de calcul : quelle est la résistance entre les deux faces d'une tranche de cône de résistivité ρ ?

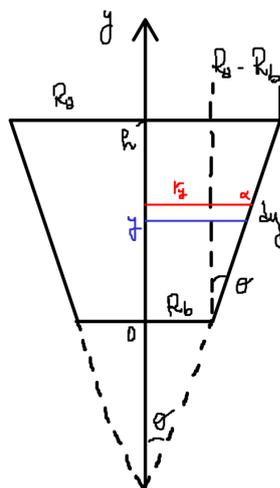


- on considère une couche d'épaisseur dy ;
- cette couche peut être considérée approximativement comme un cylindre ;
- résistance de la couche $dR = \rho \frac{dy}{A(y)}$.

La résistance totale sera, intuitivement, la somme des résistances de toutes les couches [on verra que cela est le cas en général pour les résistances en série, et les couches sont connectées en série].

$$R_{tot} = \int_0^h \rho \frac{dy}{A(y)} = \int_0^h \rho \frac{dy}{\pi r_y^2} \quad (5.11)$$

$$r_y = ?$$



$$\begin{aligned}
 r_y &= R_b + \alpha = \\
 &= R_b + y \frac{R_a - R_b}{h} = \\
 &= R_b + y \frac{R_a - R_b}{h}
 \end{aligned}$$

$$R_{tot} = \int_0^h \rho \frac{dy}{\pi \left[R_b + \frac{R_a - R_b}{h} y \right]^2}; \quad \xi = R_b + \frac{R_a - R_b}{h} y; \quad d\xi = \frac{R_a - R_b}{h} dy$$

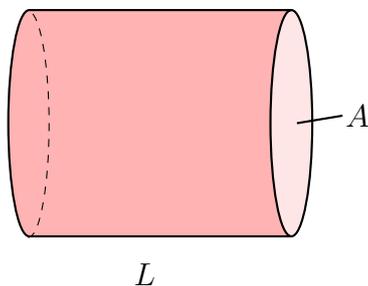
$$\Rightarrow R_{tot} = \int \frac{\rho}{\pi} \frac{h}{R_a - R_b} \frac{d\xi}{(\xi)^2} = \frac{\rho}{\pi} \frac{h}{R_a - R_b} \left[-\frac{1}{R_b + \frac{R_a - R_b}{h} y} \right]_0^h =$$

$$= \frac{\rho}{\pi} \frac{h}{R_a - R_b} \left[\frac{1}{R_b} - \frac{1}{R_a} \right] = \frac{\rho}{\pi} \frac{h}{R_a R_b}$$

Note 5.7. Si $R_a = R_b = R_0 \Rightarrow R_{tot} = \frac{\rho h}{\pi R_0^2}$, et on retrouve le résultat qu'on devrait avoir pour un cylindre.

5.3 Résistance électrique et loi d'Ohm

Reprenons notre “cas de base” : **conducteur cylindrique (fil)**



$$R = \rho \frac{L}{A} = \left(\frac{f}{n_q q^2} \right) \frac{L}{A} \quad (5.12)$$

La résistance est définie comme $R = \frac{V}{i}$, c'est à dire le facteur de proportionnalité entre différence de potentiel et courant.

Donc en général on mesure $V = iR$.

Mais, attention ☹, la loi d'Ohm est $V = iR$, avec R indépendante de i et de V .

Si non, la relation entre i et V peut ne pas être de simple proportionnalité. Si $R = R(i)$ ou $R = R(V)$, alors la loi d'Ohm perd son sens, et on parle de conducteur “non-ohmique”.

Pouvons-nous imaginer une situation dans laquelle $R = R(i)$, ou $R = R(V)$?

On peut penser aux facteurs qui peuvent influencer la valeur de $R = \frac{f}{n_q q^2} \frac{L}{A}$ (pour un conducteur cylindrique).

En effet, on peut penser de modifier le facteur f , qui quantifie le frottement, ou la difficulté des porteurs de charge à passer à travers le matériel (le réseau solide du métal par ex.).

Les oscillations du réseau sont déterminées par sa température. Si on le refroidit, on réduit les oscillations thermiques, en rendant plus facile le passage de charges. On devrait donc réduire f , et R . Vice versa, on augmente f et R quand on augmente la température.

Typiquement $R = R(T) = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$, avec $\alpha \simeq \text{const.}$, paramètre qui dépend de la nature du matériau.

5.4 Puissance électrique

Si on fait passer un courant assez fort, on peut avoir $R = R(i)$, parce que $T = T(i)$. Ce serait un conducteur “non-ohmique”. Pour pouvoir calculer ce genre d’effet, et bien d’autres, liés au passage de courant dans un conducteur, on doit introduire le concept de **puissance électrique**.

Si on fait passer un courant dans un conducteur, on “force” les porteurs de charge à travers son réseau, et on transfère de l’énergie des porteurs de charge au réseau, par collisions. C’est comme ça qu’on maintient une vitesse de dérive (ordonnée) constante.

En effet la différence de potentiel ne peut pas accélérer les charges au-delà de leur vitesse de dérive “terminale”, et donc cette énergie doit être dissipée dans le réseau.

Dans l’unité de temps :

$$\text{puissance} = \frac{dW}{dt} = \frac{dq}{dt} V = iV = \begin{cases} (V = iR) & i^2 R \\ (i = \frac{V}{R}) & \frac{V^2}{R} \end{cases} \quad (5.13)$$

travail fait par V

$$[P] = \text{Watt ou [V A]} \quad (5.14)$$

Note 5.8. Si $T = T(\text{puissance}) = T(iV)$, et $R = R(T) \rightarrow R = R(iV)$ “non-ohmique”.

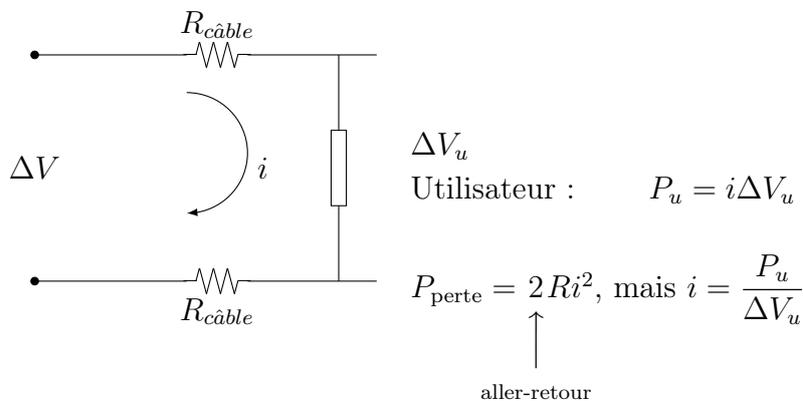
La puissance électrique dissipée dans un conducteur peut être utilisée pour :

- chauffer (chauffage électrique)
- faire de la lumière (ampoule à incandescence)
- fusibles (si trop de courant, chauffent et “sautent”, c’est-à-dire ouvrent le circuit)
- etc

Mais dans d’autres situations, elle est plutôt à éviter/minimiser, par ex. :

- chauffage des câbles/composants électriques
- pertes dans le transport de l’électricité.

Ex. transport d'électricité. Les câbles ont forcément une résistance $\neq 0$, $R_{\text{câble}}$, qui amène une perte P_{perte} .



$$P_{\text{pertes}} = 2R \frac{P_u^2}{\Delta V_u^2} \tag{5.15}$$

Pour optimiser P_u et diminuer P_{pertes} , on augmente ΔV_u .

Note 5.9. En réalité on transporte l'énergie en courant alternatif (AC), donc le calcul est légèrement différent...

Ex. numérique : ligne de 100 km, $R_{\text{câble}} \sim 2 \Omega$, $P_u \sim 400 \text{ MW}$, $\Delta V_u \sim 200 \text{ kV}$

$$\Rightarrow P_{\text{pertes}} \sim 2 \times 2 \times \frac{(400 \times 10^6)^2}{(200 \times 10^3)^2} \text{ W} = \frac{4 \times 16^4 10^{16}}{4 \cdot 10^{10}} \text{ W} = 16 \text{ MW}$$

Mais si on utilise $\Delta V_u \sim 400 \text{ kV}$

$$\Rightarrow P_{\text{pertes}} \sim 2 \times 2 \times \frac{(400 \times 10^6)^2}{(400 \times 10^3)^2} \text{ W} = 4 \text{ MW}$$

Pourquoi on n'augmente pas plus ΔV_u (ou ΔV) ? → **effet corona** [décharges !]

Note 5.10. La résistance de la peau humaine dépend du degré d'humidité, $R_{\text{peau}} \sim 10 \text{ k}\Omega \div 1 \text{ M}\Omega$.

Mais à l'intérieur de notre corps, le sang et les liquides interstitiels extracellulaires sont des électrolytes, donc conduisent assez bien l'électricité.

Si la peau est percée, et le courant passe "à l'intérieur", il peut attendre des valeurs importantes même avec des différences de potentiel modestes.

☞ **Électrocution** : le problème principal (parfois létal !) est le dérangement du fonctionnement du coeur. Le coeur n'est plus "contrôlé" s'il y a $\sim 10 \text{ mA}$ qui circulent autour.

Donc, si on prend le cas plus pessimiste, avec $R_{\text{peau}} \sim 10 \text{ k}\Omega$, la tension maximale devrait être :

$$\Delta V_{\text{max}} = i_{\text{max}} R_{\text{peau}} \sim 10 \times 10^{-3} \times 10^4 \text{ V} = 100 \text{ V} \tag{5.16}$$

Typiquement, on considère pour la sécurité :

$$\begin{cases} \Delta V \leq 50 \text{ V} \\ i \leq 10 \text{ mA} \end{cases} \quad (5.17)$$

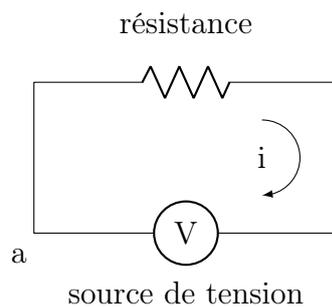
Donc on doit utiliser des transformateurs pour réduire la haute tension à laquelle on transporte l'électricité à des valeurs moins dangereuses.

Conseil : ne touchez jamais un système électrique avec les deux mains! Si le courant passe entre les deux mains, il passe dans la région du coeur...



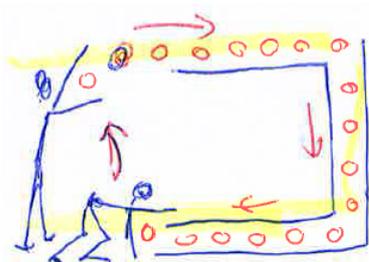
5.5 Force électromotrice

Circuit électrique simple



Si l'énergie n'était pas dissipée à cause du frottement ($R = 0$), le potentiel serait le même sur tous les points du circuit : $V = V_a$ partout.

Mais s'il y a dissipation, ce qui est le cas en général (sauf en situation de super-conductivité!), on doit continuer à fournir un travail pour faire circuler les charges.



on doit continuer à pousser les charges "en haut", pour qu'elles puissent "tomber" en bas, en perdant de l'énergie potentielle, et continuer à bouger.

Déf. :

$$\frac{\text{travail fait sur la charge qui bouge sur circuit fermé}}{\text{charge}} = \mathcal{E}$$

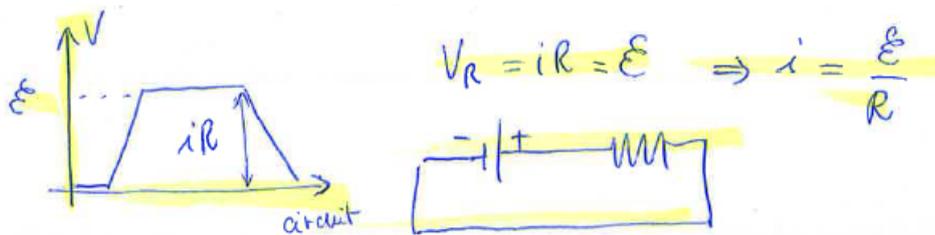
“force électro-motrice”; ou

“emf” (pour “electromotive force”)

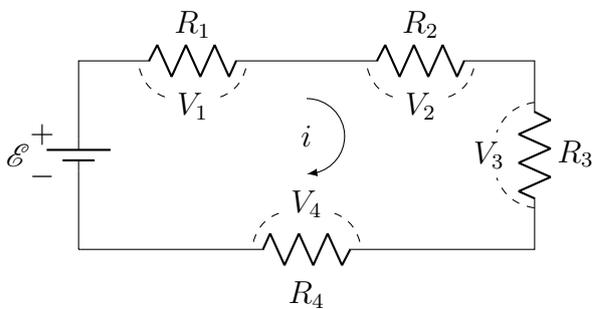
Note $[\mathcal{E}] = V$; \mathcal{E} n'est pas une force!

Symbole :  batterie

Représentation utile :



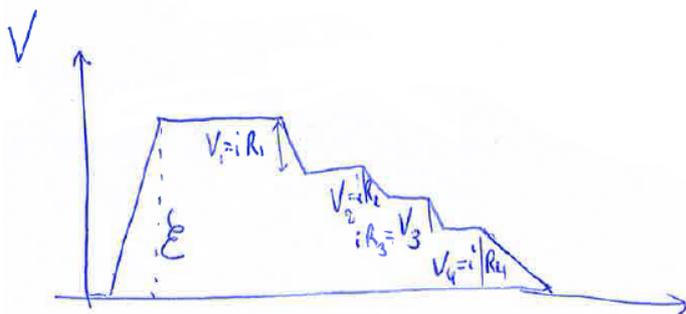
Dans un circuit avec plusieurs résistances en séries :



à travers chaque résistance

$$V_j = iR_j \text{ (i est le même)}$$

mais on doit toujours revenir au même niveau d'énergie, donc de potentiel, si on fait un tour complet.



Donc

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \mathcal{E} \quad (5.18)$$

ou, en général, $\mathcal{E} = \sum_j V_j$.

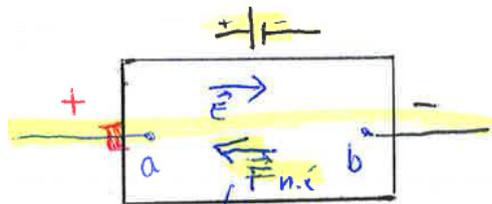
Source idéale de emf :

$$V = \mathcal{E} \quad \text{fixe, indépendante de } i$$

Ça n'existe pas dans la réalité! (on pourrait augmenter $i \rightarrow \infty$, et on fournirait une énergie infinie)

Source réelle de emf (batterie) :

regardons à l'intérieur de la batterie



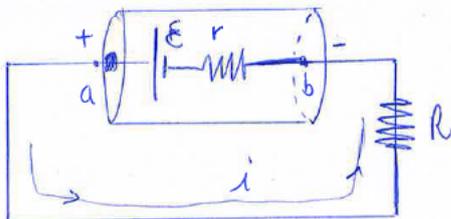
à l'intérieur il doit y avoir une force 'non-électrique', \vec{F}_{n-e} , qui pousse les charges contre le champ électrique.

force 'non-électrique'
[ex. chimique ou mécanique]

Mais, naturellement, comme il y a du frottement pour "descendre" dans le sens du champ, \vec{E} , il y a du frottement pour "remonter" contre le champ \vec{E} [comme quand on prendre une remontée mécanique avec les skis...]

On appelle cette résistance à l'intérieur de la source de emf "**résistance interne, r** ".

Représentation en circuit :



$$V_{ab} \neq \mathcal{E} \text{ si } i \neq 0, \text{ car} \quad (5.19)$$

$$V_{ab} = \mathcal{E} - ir \quad (5.20)$$

$$V_{ab} = iR \quad (5.21)$$

Note 5.11. V_{ab} devient très différent de \mathcal{E} lorsque r devient grande, ou lorsqu'on essaie d'extraire de la batterie un grand courant i .

$$\Rightarrow \quad \mathcal{E} - ir = iR \quad \Rightarrow \quad \boxed{i = \frac{\mathcal{E}}{r + R}} \quad (5.22)$$

\mathcal{E} est ce qui est spécifiée pour une batterie. Lorsque la batterie vieillie, \mathcal{E} reste la même, mais r augmente, donc la batterie n'arrive plus à faire passer le courant qu'on veut à travers R .

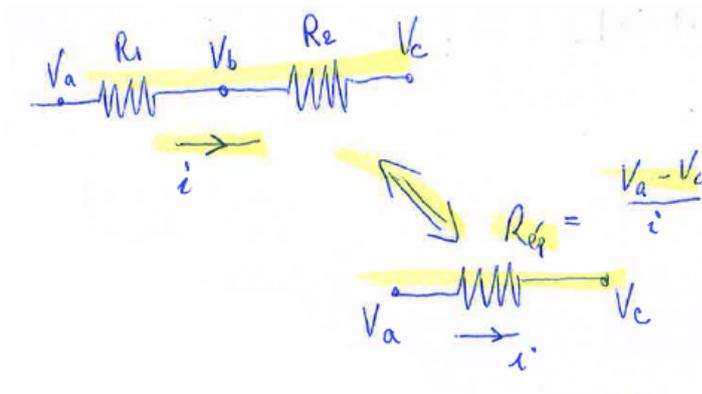
La même chose arrive à certaines batteries lorsqu'il fait très froid : r augmente dans le fluide électrolytique et on n'a plus assez de courant. Dans ces cas on mesure une grande différence entre tension à circuit ouvert (\mathcal{E}) et tension à circuit fermé ($\mathcal{E} - ir$).

5.6 Circuits électriques à courant continu (DC) et combinaisons de résistances

Courant continu : la direction du courant ne change pas.

Combinaisons de résistances

(1) Résistances en série



La charge est la même, le courant est le même

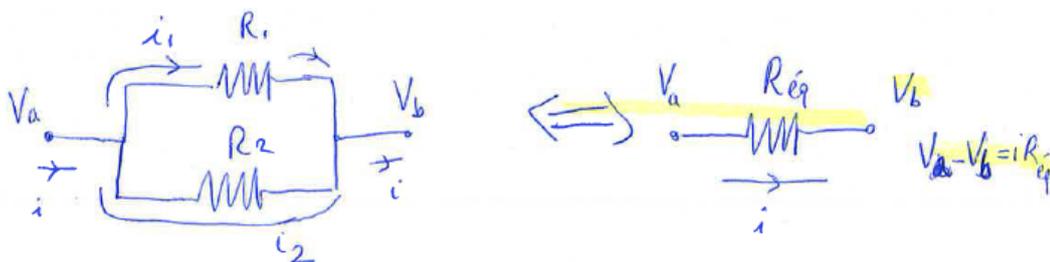
$$V_a - V_c = (V_a - V_b) + (V_b - V_c) =$$

$$= iR_1 + iR_2 = i \underbrace{(R_1 + R_2)}_{R_{\text{éq.}}} \Rightarrow \boxed{R_{\text{éq.}} = \frac{V_a - V_c}{i} = R_1 + R_2} \quad (5.23)$$

Pour plusieurs R 's :

$$\boxed{R_{\text{éq.}} = \sum_{j=1}^N R_j} \quad (5.24)$$

(2) Résistances en parallèle

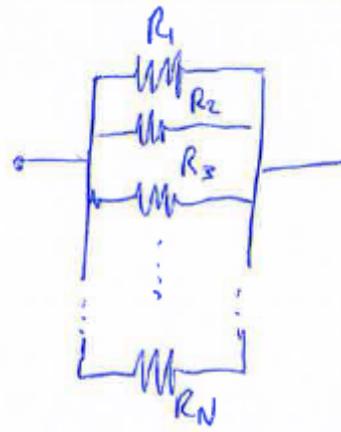


Ici la quantité commune à toutes les résistances est $V_a - V_b$.

$$\begin{cases} i_1 + i_2 = i & \text{(conservation de la charge)} \\ \frac{V_a - V_b}{R_1} + \frac{V_a - V_b}{R_2} = \frac{V_a - V_b}{R_{\text{éq.}}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{R_{\text{éq.}} = \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right]^{-1}} \quad (5.25)$$

Plusieurs résistances en parallèle

$$R_{\text{eq}} = \left[\sum_{j=1}^N \frac{1}{R_j} \right]^{-1} \quad (5.26)$$



Note 5.12. Sur chaque branche du circuit, le courant est inversement proportionnel à la résistance $i_j = \frac{V}{R_j}$; le courant “choisit” le chemin avec la moindre résistance.

5.7 Lois de Kirchhoff

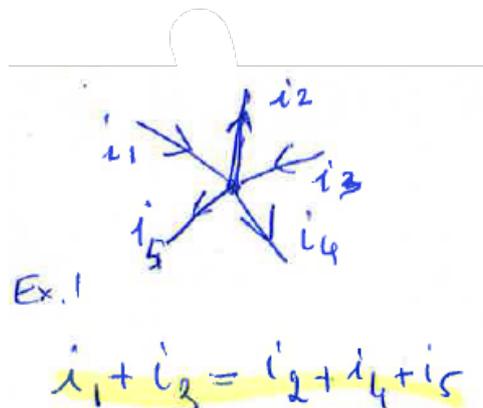
On peut résumer ces observations avec deux règles pratiques : **règles (ou lois) de Kirchhoff**

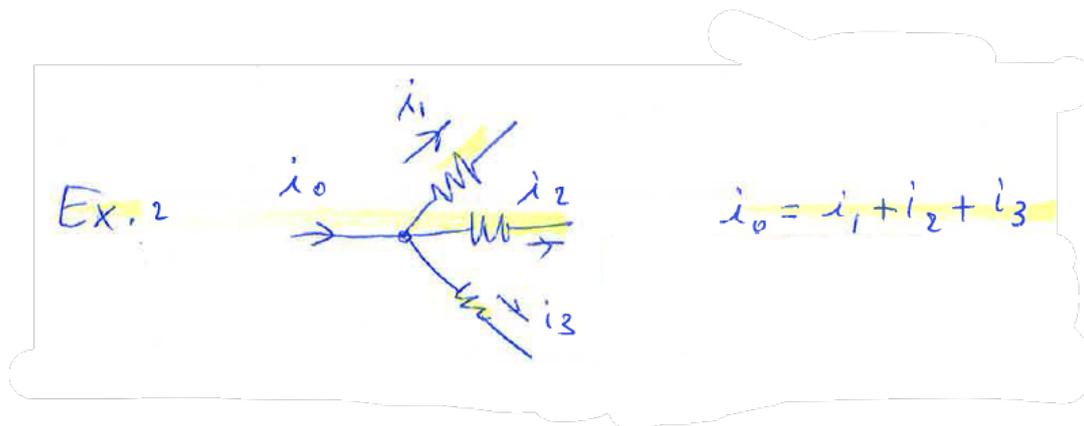
(1) “**Règle des nœuds**” (nœud \equiv intersection de fils)

conservation de la charge

La somme des intensités des courants arrivants est égale à celle des courants sortants.

$$\sum_j i_{j \text{ IN}} = \sum_h i_{h \text{ OUT}} \quad (5.27)$$



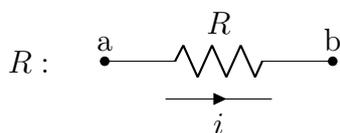


(2) “Règle des mailles”

La somme algébrique des différences de potentiel électrique sur une maille fermée est nulle, pour n’importe quel circuit composé de mailles.

$$\sum_j \Delta V_j = 0 \quad \text{autour de chaque maille fermée}$$

Note 5.13. Les ΔV_j sont toutes les emf et toutes les différences de potentiel à travers les résistances.

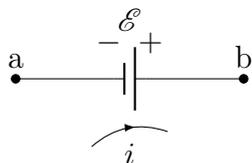


La seule difficulté... les signes !

Si on passe à travers R dans la direction du courant, la différence de potentiel est négative [c’est une “chute” à travers R] :

$$V_b - V_a = V_R = -iR; \quad (5.28)$$

le potentiel est plus bas au point b.



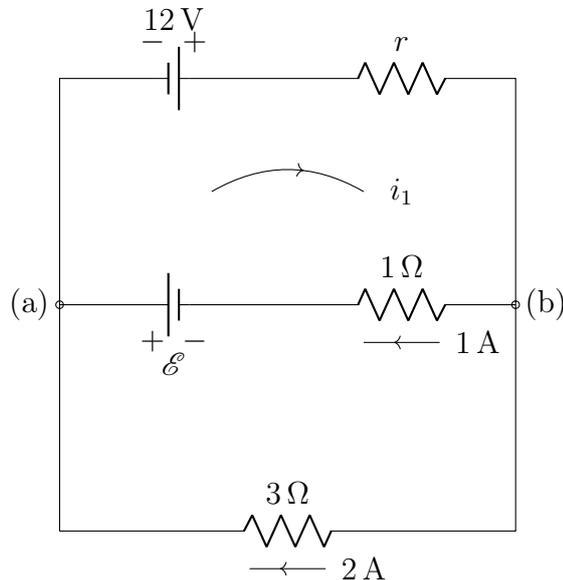
Si on passe à travers une source de emf dans la même direction que l’emf : $\Delta V = +\mathcal{E}$ (“uphill”), alors que en direction opposée : $\Delta V = -\mathcal{E}$

$$\Rightarrow V_b - V_a = +\mathcal{E}$$

Ces deux règles devraient permettre de résoudre les problèmes avec des circuits DC.

Exemples d'application des règles de Kirchhoff

Chargement d'une vieille batterie.



On cherche $r = ?$

$i_1 = ?$

$\mathcal{E} = ?$

(1) On choisit (arbitrairement) les signes pour i , \mathcal{E} (et on les change pas au milieu du calcul!)

(2) On applique la règle des noeuds à (a) et à (b)

$$(a) \quad 2 \text{ A} = i_1 - 1 \text{ A} \Rightarrow i_1 = 3 \text{ A}$$

$$(b) \quad i_1 = 1 \text{ A} + 2 \text{ A} \Rightarrow i_1 = 3 \text{ A} \quad \text{OK}$$

(3) On applique la règle des mailles

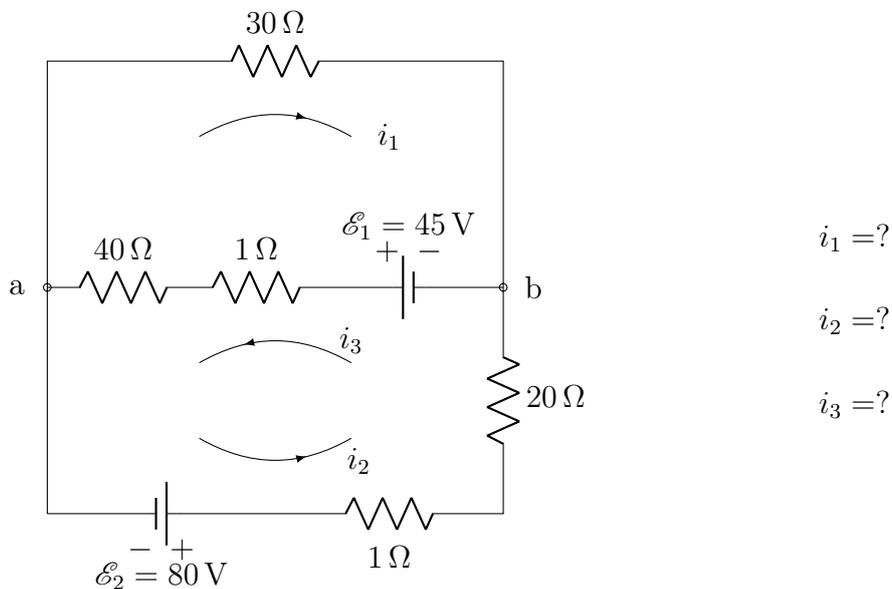
- à la maille en haut : $12 \text{ V} - \overbrace{(3 \text{ A})}^{i_1} r - (1 \text{ A})1 \Omega + \mathcal{E} = 0$

- à la maille totale : $12 - (3 \text{ A})r - (2 \text{ A})3 \Omega = 0$

$$\rightarrow r = \frac{6}{3} \Omega = 2 \Omega; \quad \mathcal{E} = (3 \times 2 + 1 - 12) \text{ V} = -5 \text{ V}$$

\Rightarrow Ceci veut dire que le dessin devrait être corrigé car la direction/polarité de l'emf et donc de la batterie est inversée.

On cherche la valeur des courants qui passent à travers tous les composants, donc i_1 , i_2 , i_3 .



- On choisit un signe pour i_1 , i_2 et i_3 et on dessine selon ce signe, puis bien entendu on calcule avec ce signe.

- Noeuds

(a) $-i_2 + i_3 = i_1$ $i_3 = i_1 + i_2$

(b) $i_1 + i_2 = i_3$

- Maille supérieure (en sens horaire)

$-i_1 \times 30 + 45 \text{ V} - i_3 \times 41 = 0 \Rightarrow 30i_1 + 41i_3 = 45$

- Maille inférieure (en sens horaire)

$+i_3 \times 41 - 45 \text{ V} + i_2 \times 20 + i_2 \times 1 - 80 \text{ V} = 0 \Rightarrow 21i_2 + 41i_3 = 125$

$$\begin{cases} i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ 30i_1 + 41i_3 = 45 \\ 21i_2 + 41i_3 = 125 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1 = -0.9 \text{ A} \\ i_2 = 2.65 \text{ A} \\ i_3 = 1.76 \text{ A} \end{cases}$$

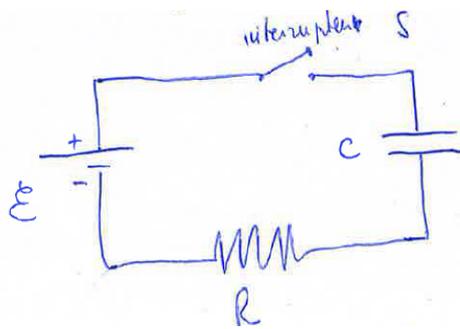
5.8 Circuits RC et applications

Pour l'instant, nous avons analysé les circuits DC, dans lesquels rien ne varie avec le temps. Les courants circulent (donc les charges à leur vitesse de dérivé terminale), mais toujours au même taux constant.

Mais nous avons aussi vu que les condensateurs sont des engins qui peuvent stocker de l'énergie. Le processus de charge/décharge est intrinsèquement dépendant du temps. Maintenant, sur la base des lois des circuits, on peut l'analyser quantitativement.

Circuits RC

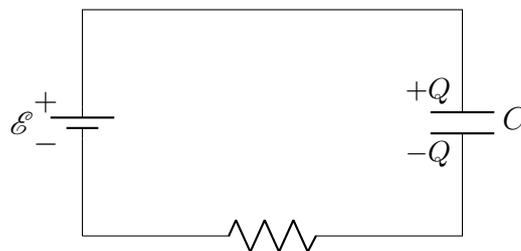
(A) chargement d'un condensateur



$t=0$
 $Q=0$ Pour charger la capacité C on a besoin de la force électromotrice \mathcal{E} .

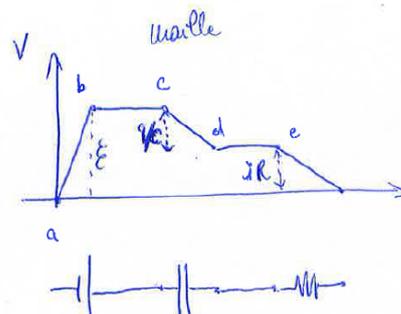
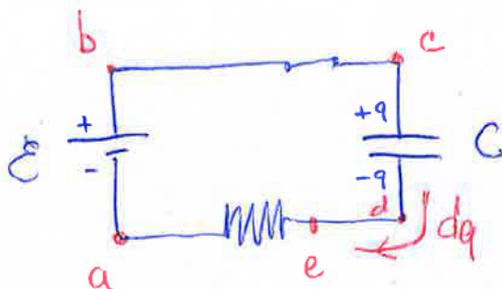
A $t = 0$, on ferme l'interrupteur S et la charge est "poussée" d'un côté à l'autre de C par \mathcal{E} .

A $t \rightarrow \infty$, le condensateur aura reçu toute la charge qu'il peut recevoir étant donnée sa capacité C : $Q = CV = C\mathcal{E}$, et il n'y aura plus de courant.



Question : qu'est - ce qu'il se passe entre $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$?

Dès qu'on ferme l'interrupteur S , la charge commence à s'écouler (\rightarrow courant)



$$\mathcal{E} - \frac{q}{C} - iR = 0 \quad ; \quad \text{mais} \quad i = \frac{dq}{dt} \quad (5.29)$$

$$\mathcal{E} - \frac{q}{C} - \frac{dq}{dt}R = 0 \quad : \quad \text{éq. différentielle pour } q = q(t), \quad (5.30)$$

avec $q(0) = 0$, et $q(\infty) = Q$

Note 5.14. À $t = 0$, $q = 0$, mais $\mathcal{E} = i(0)R \Rightarrow i(0) = \mathcal{E}/R \neq 0$

En réarrangeant :

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC} + \frac{\mathcal{E}}{R} \quad ; \quad \text{on sépare les variables} \quad (5.31)$$

$$dq = \left(\frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC} \right) dt = -(q - \mathcal{E}C) \frac{dt}{RC} \quad (5.32)$$

$$\frac{dq}{q - \mathcal{E}C} = -\frac{dt}{RC} \quad \text{on intègre} \Rightarrow \int_0^q \frac{dq'}{q' - \mathcal{E}C} = -\int_0^t \frac{dt'}{RC} \quad (5.33)$$

$$\Rightarrow \ln \left(\frac{q - \mathcal{E}C}{-\mathcal{E}C} \right) = -\frac{t}{RC} \Rightarrow \frac{\mathcal{E}C - q}{\mathcal{E}C} = \exp \left\{ -\frac{t}{RC} \right\} \quad (5.34)$$

$$\Rightarrow q(t) = \mathcal{E}C \left[1 - \exp \left\{ -\frac{t}{RC} \right\} \right] \quad (5.35)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} q(t) = \mathcal{E}C - \mathcal{E}C = 0 \quad (5.36)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = \mathcal{E}C \quad (5.37)$$

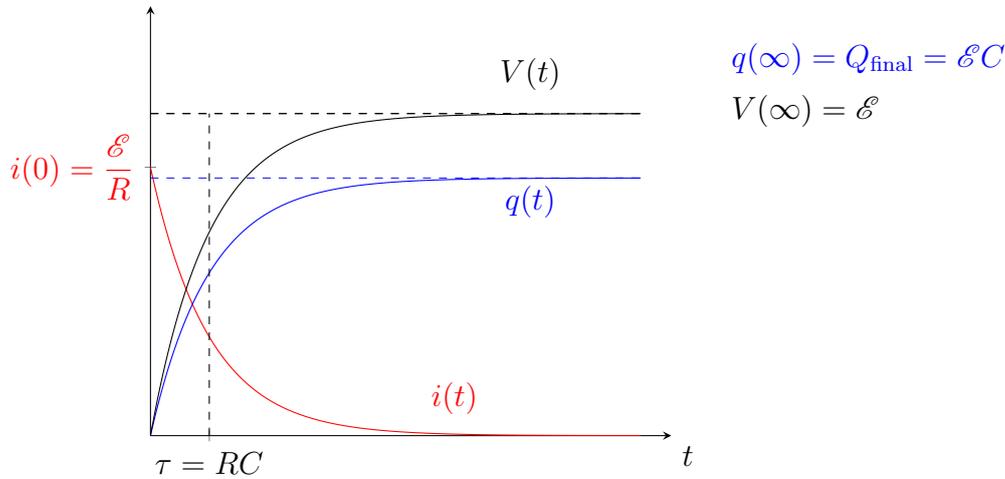
A partir de $q(t)$ on peut calculer $i(t)$ et $V(t)$:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\mathcal{E}C \exp \left\{ -\frac{t}{RC} \right\} \left(-\frac{1}{RC} \right) = \frac{\mathcal{E}}{R} \exp \left\{ -\frac{t}{RC} \right\} \quad (5.38)$$

$$\rightarrow i(0) = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad ; \quad i(\infty) = 0$$

$$V(t) = \frac{q(t)}{C} = \mathcal{E} \left[1 - \exp \left\{ -\frac{t}{RC} \right\} \right] \Rightarrow \begin{cases} V(0) = 0 \\ V(\infty) = \mathcal{E} \end{cases} \quad (5.39)$$

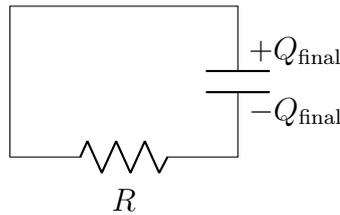
Graphiquement



$\tau = RC$ est le temps caractéristique du circuit RC , on l'appelle aussi "constante de temps", ou "temps de relaxation".

(B) Décharge d'un condensateur

Après avoir chargé, on enlève la batterie et on la remplace avec un fil (avec $R_{fil} \sim 0$)



A $t = 0$ on a
 $q(0) = Q_{final} = EC$

On s'attend à quoi? La charge revient là où elle était, c'est-à-dire le condensateur sera déchargé.

Maille (sans \mathcal{E} , ou $\mathcal{E} = 0$) :

$$-\frac{q}{C} - iR = 0 \tag{5.40}$$

$$\Rightarrow -\frac{q}{C} - \frac{dq}{dt}R = 0 \quad ; \quad \frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC} \tag{5.41}$$

$$\int_{Q_{final}}^q \frac{dq'}{q'} = -\int_0^t \frac{dt'}{RC} \Rightarrow \ln\left(\frac{q}{Q_{final}}\right) = -\frac{t}{RC} \tag{5.42}$$

et

$$q(t) = Q_{final} \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\} = EC \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\} \Rightarrow \begin{cases} q(0) = Q_{final} = EC \\ q(\infty) = 0 \end{cases} \tag{5.43}$$

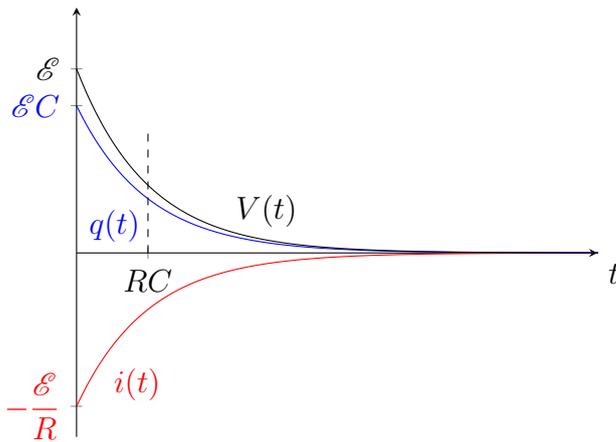
Courant

$$i(t) = EC \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\} \left(-\frac{1}{RC}\right) = -\frac{\mathcal{E}}{R} \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\} < 0 \tag{5.44}$$

$$i \text{ va "a l'envers"} \quad \begin{cases} i(0) = -\frac{\mathcal{E}}{R} \\ i(\infty) = 0 \end{cases}$$

Potentiel

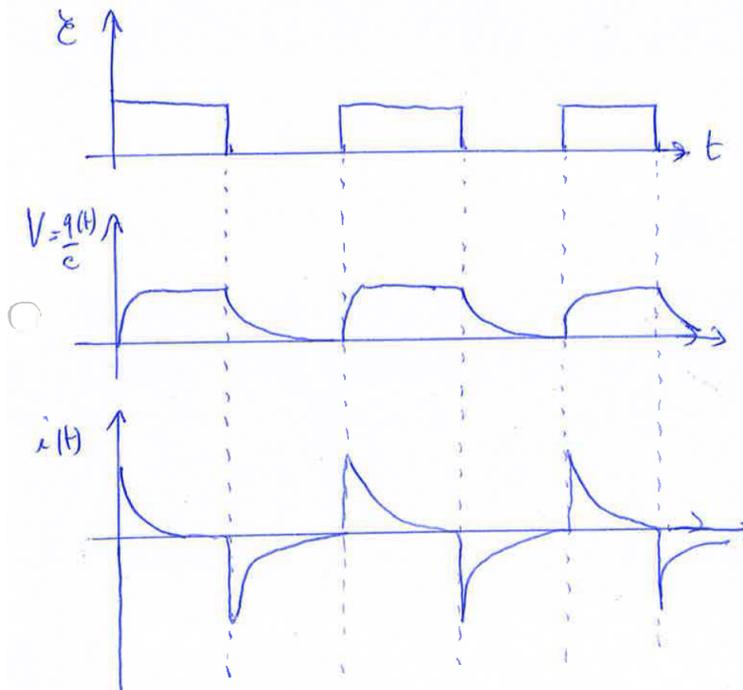
$$V(t) = \frac{q(t)}{C} = \mathcal{E} \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\} \Rightarrow \begin{cases} V(0) = \mathcal{E} \\ V(\infty) = 0 \end{cases} \quad (5.45)$$



La variation temporelle de toutes les quantités en jeu est déterminée par le facteur dans l'exposant : $\tau = RC$

Considérons maintenant d'alterner chargement/décharge, ce qui est équivalent à "allumer/éteindre" \mathcal{E} .

Que pouvons nous attendre ?



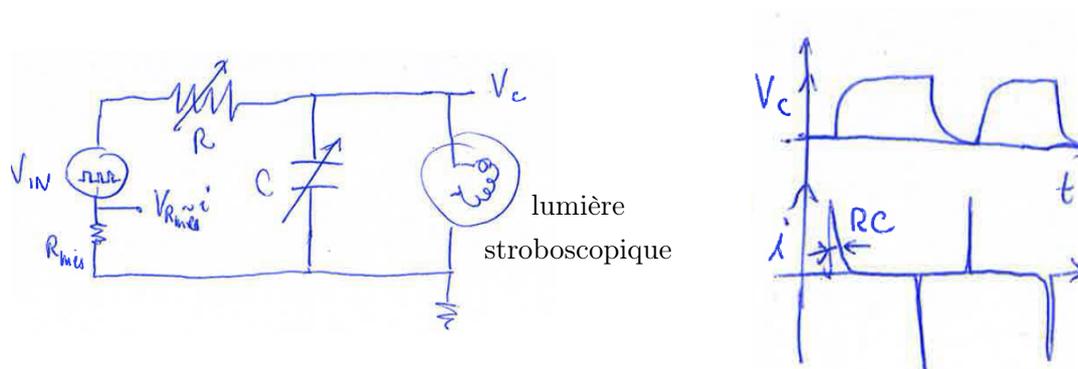
La forme de ces courbes dépend de la valeur de RC

Applications du circuits RC

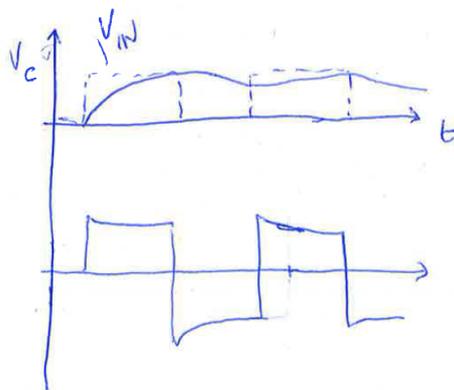
En voyant les différentes courbes et les variations avec les valeurs de R et C , on peut imaginer diverses applications.

Ex. 1 - RC très court : le courant aura des très courtes impulsions, et très intenses. On pourrait aussi choisir la fréquence des impulsions de \mathcal{E} pour “suivre” un certain phénomène, par ex. de la musique.

Ex. (démon) Stroboscope/oscillateur de relaxation



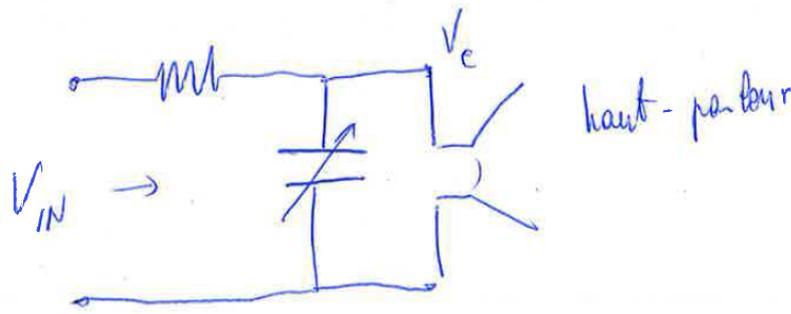
Ex. 2 - RC très long : comparé à la période Δt qui sépare les impulsions de \mathcal{E}



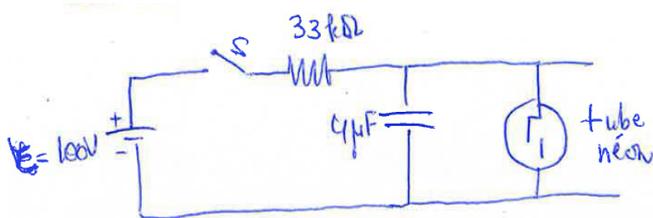
Les variations du signal de “input” sont “lisées” : filtre RC

Ce filtrage a lieu parce qu'il n'y a pas assez de temps pour charger/décharger C entre les pulses. Intuition : C est un réservoir, comme un lac de montagne. Si R est grand, c'est comme si le lac avait un émissaire (un ruisseau qui en sort pour faire descendre l'eau) trop petit.

Autre façon de voir : le signal d'entrée contient différentes fréquences. Ces fréquences sont influencées par le filtre RC de façons différentes : celles qui sont élevées, avec une période courte par rapport à RC ($\Delta t \ll RC$) ne peuvent pas vraiment “passer” jusqu'au signal de sortie et seraient coupées. Vice-versa, les basses fréquences, correspondantes à une période $\Delta t > RC$ ne seraient pas influencées par le circuit RC , donc passeraient inaltérées à la sortie. On peut donc éliminer les hautes fréquences : filtre passe-bas.



Ex. de problème avec capacité



Tube neon :

$$\begin{cases} R = \infty & \text{pour } V < \overbrace{90\text{ V}}^{=V_0} \\ R \simeq 0 & \text{pour } V \geq 90\text{ V} (*) \end{cases}$$

(*) mais une fois le tube “allumé”, la résistance reste nulle jusqu’à ce qu’on descende en dessous de 70 V.

Ensuite, pour $V < 70\text{ V}$, $R = \infty$ à nouveau (car la décharge s’éteint).

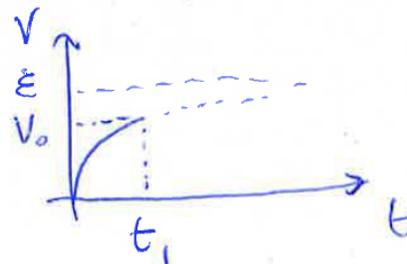
Questions :

- (a) A quel moment le tube commence à conduire ? (on applique 100 V a $t = 0$)
- (b) A quel moment le tube reprend à conduire de nouveau ?
- (c) Quel est le comportement du tube en fonction du temps ?

Solution

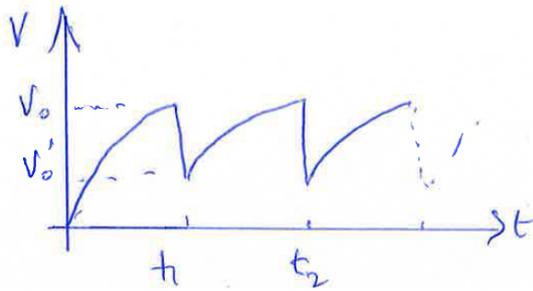
Avant d’arriver à 90 V, le tube est un circuit ouvert, donc il voit $V = \frac{q}{C}$

$$V = \mathcal{E}(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \tag{5.46}$$



(a) $V(t_1) = 90\text{ V} = V_0 \Rightarrow 100(1 - e^{-\frac{t_1}{RC}}) = 90 \Rightarrow e^{-\frac{t_1}{RC}} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ et $t_1 = RC \ln(10) \approx 0.3\text{ s}$

(b) Après t_1 , le tube néon devient un court circuit, et la tension tombe, mais quand elle arrive à 70 V, le tube redevient circuit ouvert, et on recommence comme circuit RC simple.



Maille :

$$\mathcal{E} - \frac{q}{C} - \frac{dq}{dt}R = 0 \quad (5.47)$$

Même équation que dans le cas (a), mais avec nouvelle condition initiale :

$$t = t_1 \quad V = V'_0 = 70 \text{ V}$$

$$q(t_1) = CV'_0 = q_1$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad (5.48)$$

$$\int_{q_1}^q \frac{dq'}{q' - \mathcal{E}C} = - \int_{t_1}^t \frac{dt'}{RC} \Rightarrow \frac{q - C\mathcal{E}}{q_1 - C\mathcal{E}} = e^{-\frac{t-t_1}{RC}} \quad (5.49)$$

$$q(t) = C\mathcal{E} + (q_1 - C\mathcal{E})e^{-\frac{t-t_1}{RC}} = C\mathcal{E} \left[1 - e^{-\frac{t-t_1}{RC}} \right] + q_1 e^{-\frac{t-t_1}{RC}} \quad (5.50)$$

et

$$V(t) = \mathcal{E} + (V'_0 - \mathcal{E})e^{-\frac{t-t_1}{RC}} \quad (5.51)$$

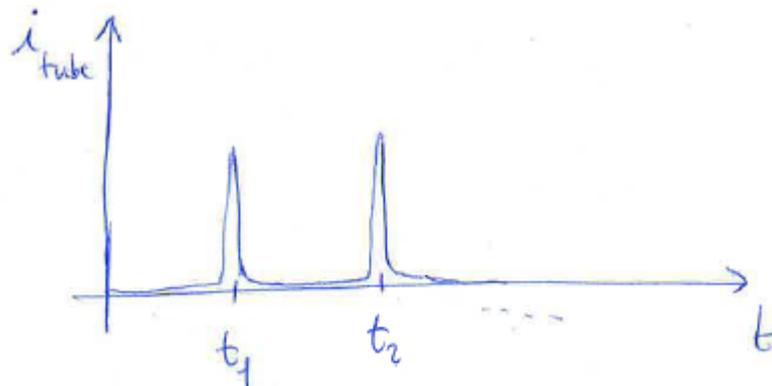
à $t = t_2$ $V(t_2) = 90 \text{ V}$, donc

$$90 = 100 + (70 - 100)e^{-\frac{t_2-t_1}{RC}} \Rightarrow 10 = 30e^{-\frac{t_2-t_1}{RC}}$$

$$\Rightarrow t_2 - t_1 = RC \ln 3 = 0.145 \text{ s}$$

Donc $t_2 - t_1 = 0.145 \text{ s}$ est la période de la lumière produite par le tube néon.

En effet, si on regarde le courant, il devrait avoir l'allure en fonction du temps représenté ci-dessous.



Appendix

5.A Discussion sur la force agissant sur diélectrique dans condensateur

Nous avons vu qu'un diélectrique est attiré dans le volume d'un condensateur. Nous avons argumenté en termes d'énergie.

Aujourd'hui on va regarder le même effet :

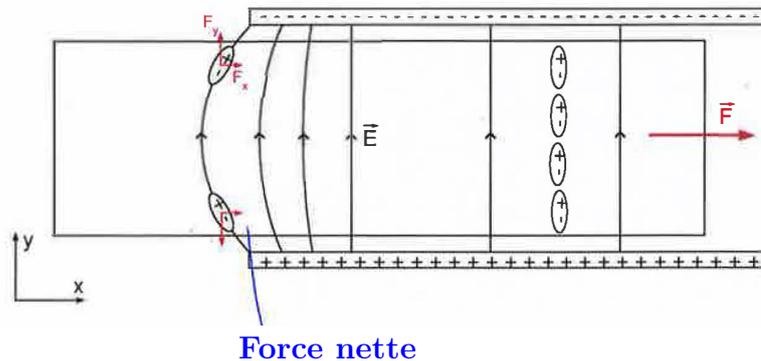
- microscopiquement
- force (quantifiable!)

Interprétation en niveau microscopique.

Attraction d'un diélectrique solide à l'intérieur d'un condensateur

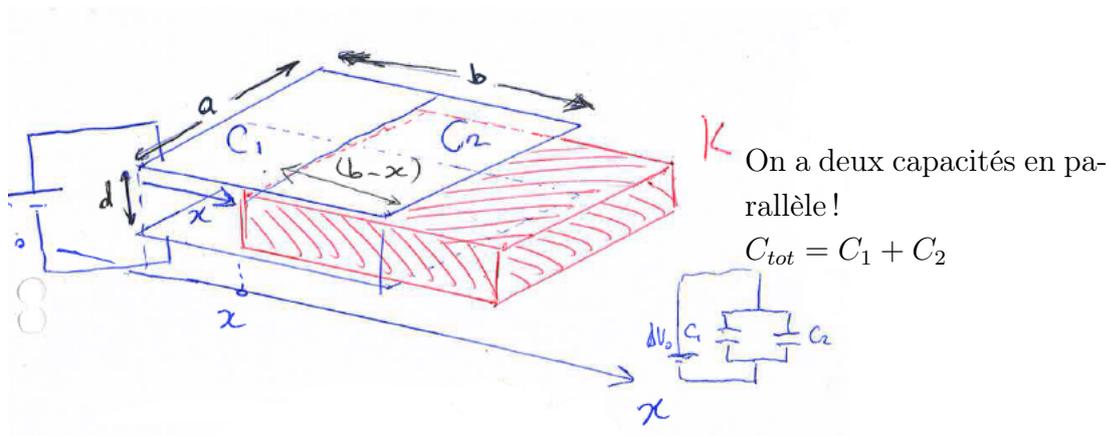
Le schéma ci-dessous représente le diélectrique situé partiellement à l'intérieur du condensateur. Ce dernier crée entre ses deux plaques un champ électrique représenté par les lignes de champ. Nous pouvons considérer l'approximation dipolaire, à savoir que le diélectrique est composé d'une grande quantité de petits dipôles qui vont chacun subir l'influence du champ électrique. Ces dipôles vont s'orienter le long des lignes de champ. Ainsi, à l'entrée du condensateur, nous voyons que les dipôles subissent également une force selon la direction x . La résultante \vec{F} des forces appliquées à tous les dipôles est également dans cette même direction. Cela a pour effet d'attirer le diélectrique à l'intérieur du condensateur.

Il est à noter que si le diélectrique est complètement à l'intérieur du condensateur, il ne subit plus de force selon la direction x , et il devient statique.



$$\begin{cases} p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} = F_x & \text{Vers la droite} \\ p_y \frac{\partial E_y}{\partial y} = F_y & \leftarrow \text{mais la moitié en haut} \\ & \text{est compensée par la moitié en bas} \end{cases}$$

On peut aussi considérer la force qui se met en place, à partir de l'énergie potentielle. On pourrait considérer deux cas : avec charge constante, ou différence de potentiel constante. Considérons uniquement $\Delta V = \text{const.} = \Delta V_0$



On a deux capacités en parallèle!

$$C_{tot} = C_1 + C_2$$

$$C_{tot}(x) = \epsilon_0 \overbrace{\frac{ax}{d}}^{\text{surface sans diélectrique}} + \epsilon_0 \overbrace{\frac{(b-x)a}{d}}^{\text{surface avec diélectrique}} K; \quad \text{comme } \Delta V_0 \text{ est fixé, la charge dépend de la position du diélectrique}$$

On pourrait tout simplement considérer que

$$Q(x) = C(x)\Delta V_0, \quad \text{et } U_c(x) = \frac{1}{2} \frac{Q^2(x)}{C(x)} = \frac{1}{2} C(x)\Delta V_0^2$$

L'énergie stockée dans le condensateur varie avec la position, donc il y aura une force F .

$$F = - \left[\frac{dU_c}{dx} \right] = - \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} C(x)\Delta V_0^2 \right] = - \left[\frac{1}{2} \Delta V_0^2 \frac{a\epsilon_0}{d} \frac{d}{dx} [x + (b-x)K] \right] = \left[\frac{1}{2} \Delta V_0^2 \frac{a\epsilon_0}{d} (1-K) \right] = \frac{K-1}{2} \frac{\epsilon_0 a}{d} \Delta V_0^2 > 0$$

Ceci est correcte, mais ... le signe ?? NON!

...si on considère le signe, on a un résultat faux!

Pourquoi ?

Parce que nous n'avons pas considéré que la batterie fait un travail pour garder $\Delta V_0 = const.$, lorsque le diélectrique bouge ; ce travail contribue à l'énergie totale.

Comme la tension (potentiel) reste constante, le travail de la batterie est simplement la charge qu'elle doit fournir $q\Delta V_0$:

$$U_{batt} = - \overbrace{\Delta V_0(C(x) - C(0))}^{\text{charge fournie par la batterie}} \times \Delta V_0 = -C(x)\Delta V_0^2 + C_0\Delta V_0^2 \tag{5.52}$$

$$(C_0 \rightarrow \text{capacité initiale, par ex. à } x=0) \tag{5.53}$$

(la batterie fait un travail > 0)

Donc :

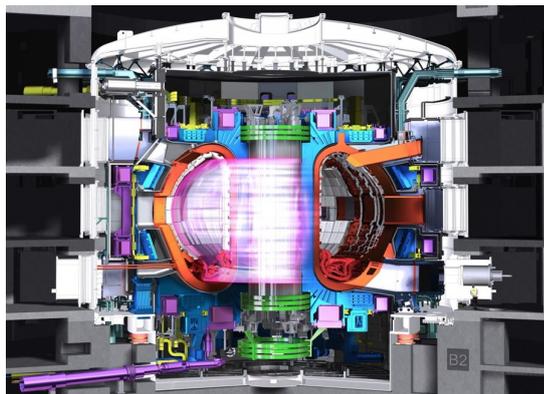
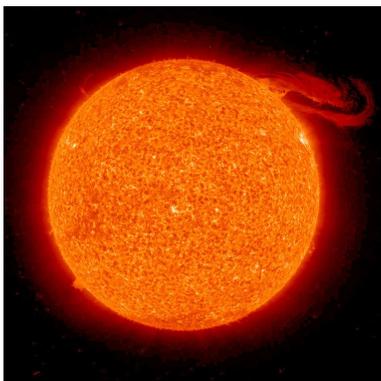
$$U_{tot} = U_C(x) + U_{batt}(x) = \frac{1}{2}C(x)\Delta V_0^2 - C(x)\Delta V_0^2 + C_0\Delta V_0^2 = -\frac{1}{2}C(x)\Delta V_0^2 + C_0\Delta V_0^2; \quad (5.54)$$

$$\text{et} \quad F_x = -\frac{dU_{tot}}{dx} = +\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2}\Delta V_0^2 C(x) \right] = \dots = -\frac{K-1}{2} \frac{\varepsilon_0 a}{d} \Delta V_0 \quad (5.55)$$

même résultat qu'avant mais avec signe opposé !

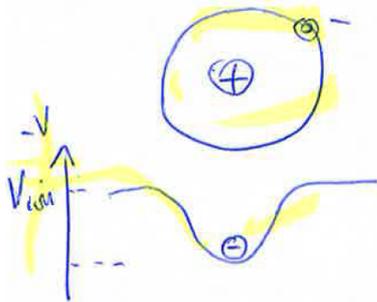
Chapitre 6

Ionisation et décharges - note de recherche : plasmas et fusion



6.1 Ionisation

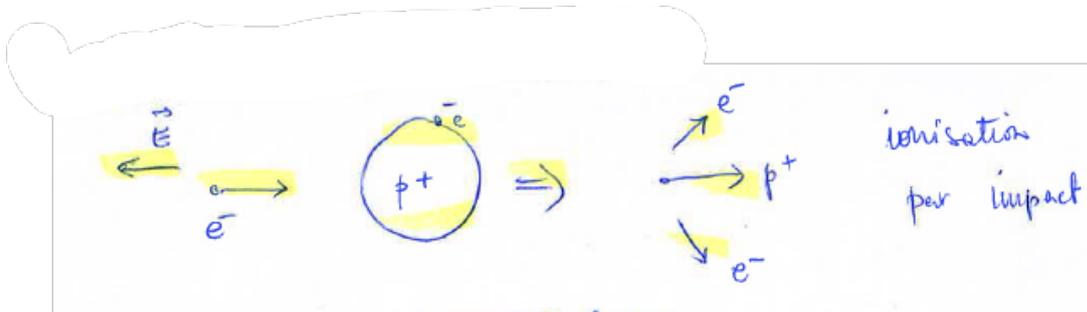
Nous avons déjà vu que les électrons sont (normalement) piégés dans le puit de potentiel de leur noyau.



...mais si l'électron acquiert assez d'énergie, il peut s'échapper.

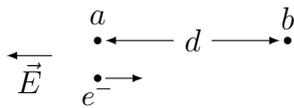
Comment est-ce qu'on donne cette énergie ?

On peut donner de l'énergie thermique en chauffant (par ex. avec une flamme), ou en accélérant avec un champ électrique et en faisant collisionner un électron contre un atome.



Accélération dans un champ électrique

Énergie donnée à l'électron entre a et b :



$$- e \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{x} = eEd \quad (6.1)$$



[on assume E uniforme]

$$\text{et } |e \int_a^b E dx| = -e[V_a - V_b] = eV \quad (6.2)$$

Note 6.1. On peut mesurer l'énergie en électronvolt $\rightarrow 1eV = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$

On a ionisation (pour un seul atome) si $eV > eV_{\text{ion}}$, où V_{ion} est le potentiel de ionisation.

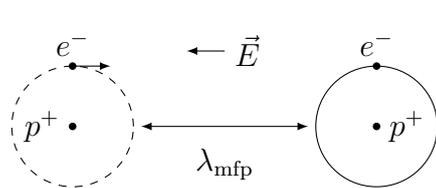
6.2 Décharges électriques

Pour un ensemble d'électrons, on doit prendre une approche statistique : décharge dans un gaz.

On veut créer un effet de décharge : les électrons sont accélérés, ionisent, puis les nouveaux électrons libres à leur tour ionisent en étant accélérés par le champ \vec{E} , et ainsi de suite.

Libre parcours moyen : λ_{mfp} (distance moyenne entre collisions)

Dans un champ électrique :



sur cette distance l'électron arrive à une énergie de

$$eV = eE\lambda_{\text{mfp}} \quad (6.3)$$

Donc on a ionisation si $eE\lambda_{\text{mfp}} \geq eV_{\text{ion}}$, ou

$$E \geq \frac{V_{\text{ion}}}{\lambda_{\text{mfp}}} \quad (6.4)$$

dépend de la structure de l'atome

de quoi dépend ce terme? → calcul

Par déf. de λ_{mfp} :

$$\text{densité} \times \underbrace{\sigma \times \lambda_{\text{mfp}}}_{\text{volume}} = 1$$

densité des cibles

Donc

$$\lambda_{\text{mfp}} = \frac{1}{n\sigma} \quad (6.5)$$

plus large est la cible, et plus il y en a, plus court est le libre parcours moyen.

Note 6.2. D'où viennent les électrons pour commencer le processus? ...il y a toujours des électrons libres dans l'air, créés par les rayons cosmiques, par ex...

Ionisation : $E \geq \frac{V_{\text{ion}}}{\lambda_{\text{mfp}}} = V_{\text{ion}}n\sigma \quad (6.6)$

Mettons quelques chiffres pour l'air

$n = ?$ $1 \text{ mole} \equiv 6 \times 10^{23} \text{ atomes/molécules pour } 22.4 \text{ litres de volume}$

$\rightarrow n \simeq \frac{6 \times 10^{23}}{22.4 \times 10^{-3}} \text{ m}^{-3} \simeq 3 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$ (conditions de p, T 'standard')

$\sigma = ?$ $\sigma \sim \pi a_0^2 = \pi \times (10^{-10})^2 \simeq 3 \times 10^{-20}$

$V_{\text{ion}} = ?$ $V_{\text{ion}} \simeq 10 \text{ V}$

Donc pour l'air on aurait :

$$E \geq 10 \times 3 \times 10^{25} \times 3 \times 10^{-20} \frac{\text{V}}{\text{m}} \simeq 9 \times 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}} \sim 10^7 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Comme $E = \frac{V}{d}$, si l'on fixe $V_0 \sim 1000 \text{ V}$, ou peut ioniser si les deux électrodes entre lesquelles on impose V_0 sont à une distance

$$d \leq \frac{V_0}{E} = \frac{1000 \text{ V}}{9 \times 10^6} \simeq 10^{-4} \text{ m} = 0.1 \text{ mm}$$

Typiquement on a donc besoin de quelques kV par mm.

Ex. foudre

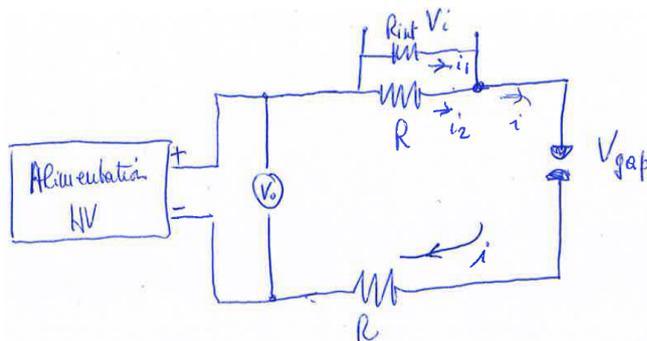
$$d \sim 1 \div 20 \text{ km} \Rightarrow \Delta V \sim ?$$

$$\left(E \geq 10^7 \frac{\text{V}}{\text{m}} \right) \quad \Delta V \geq Ed = \left[10^7 \frac{\text{V}}{\text{m}} \times (1 \div 20) \times 10^3 \text{ m} \right]$$

$$\simeq 10^{10} \div 2 \times 10^{11} \text{ V}!!$$

Note 6.3. Le diamètre du canal de courant électrique de la foudre est typiquement entre quelques cm et 10cm et le courant $\leq 1 \text{ MA}$!

Dans votre expérience (que vous allez construire vous-mêmes!), vous allez mesurer la tension à laquelle vous avez une décharge entre deux électrodes.



Note 6.4. On mesure V_i et V_0 , et on cherche la valeur de V_{gap} lorsque la décharge démarre.

Avant la décharge : pas de courant ($i = 0$), donc

$$V_0 - V_{\text{gap}} = 0 \text{ (maille)} \Rightarrow V_{\text{gap}} = V_0 \quad (6.7)$$

Après le démarrage de la décharge : courant $\neq 0$
maille :

$$V_0 - V_i - V_{\text{gap}} - iR = 0; \quad (6.8)$$

$$i = i_1 + i_2 = \frac{V_i}{R_{\text{int}}} + \frac{V_i}{R} = V_i \left(\frac{R + R_{\text{int}}}{RR_{\text{int}}} \right) \quad (6.9)$$

mesurées!

$$V_0 - V_i - V_{\text{gap}} - V_i \left(\frac{R + R_{\text{int}}}{R R_{\text{int}}} \right) \mathcal{R} = 0 \quad (6.10)$$

$$\Rightarrow V_{\text{gap}} = V_0 - V_i \left[1 + \frac{R}{R_{\text{int}}} + 1 \right] = V_0 - \left(2 + \frac{R}{R_{\text{int}}} \right) V_i \quad (6.11)$$

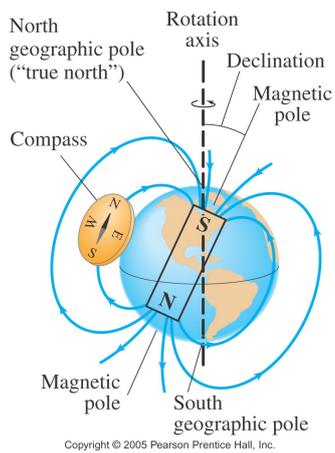
Dans votre montage $\frac{R}{R_{\text{int}}} \simeq 0.1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{\text{gap}} \cong V_0 - 2.1V_i}$

6.3 *(facultatif) Introduction aux plasmas et à l'énergie de fusion*

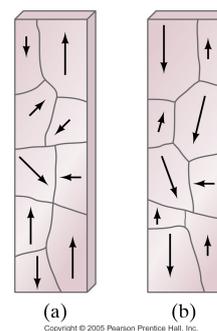
Voir viewgraph.

Chapitre 7

Magnétisme et sources de champ magnétique



Ancien stade de Magnesia, Turquie



7.1 Un nouveau type d'interaction : champ magnétique et force de Lorentz

Évidence pour une nouvelle force :

Aimants (“magnets”... de Magnesia en Turquie, où ils avaient été découverts des siècles av. J.-C. mais on ne sait pas s'ils étaient utilisés). On observe que les aimants se repoussent ou ils s'attirent, selon le côté. Ils ont deux côtés, ou “pôles”, qu'on appelle “nord” ou “sud”. Les mêmes pôles se repoussent, les pôles opposés s'attirent. Ils peuvent aussi attirer d'autres matériaux, par exemple le fer. De plus, on remarque l'action à distance, qui n'est pas perturbée par quelque chose, telle qu'une feuille de papier, qui est insérée entre l'aimant et le matériau.

- Il est clair qu'il s'agit d'une nouvelle classe de phénomènes, différente de celle liée aux phénomènes produits par les charges, ou les champs électriques (à noter que les aimants n'ont pas une charge nette).
- Ces phénomènes 'magnétiques' ont eu besoin de plus que 2000 ans pour être expliqués ! Par contre, ils ont été utilisés bien avant d'être compris, notamment dans le cas de la boussole.

L'homme a cherché à expliquer les phénomènes magnétiques pendant beaucoup de siècles, mais les premières idées “concluantes” sont arrivées en remarquant la connexion avec d'électricité.

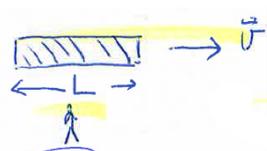
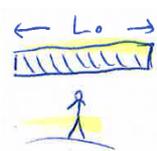
Résumé :	aimant-aimant aimant-fer aimant-courant courant-aimant courant-courant	}	force observée
----------	--	---	----------------

Première explication avec théorie de la relativité : en effet les charges sont à la base de tout ça ... mais seulement si elles bougent.

7.2 Interprétation avec la théorie de la relativité

Relativité et force magnétique

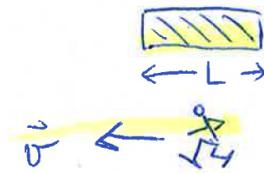
Rappel : contraction des distances/longueurs



$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}; \quad c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}; \quad (7.1)$$

effet très faible si $v \ll c$, mais non-nul !

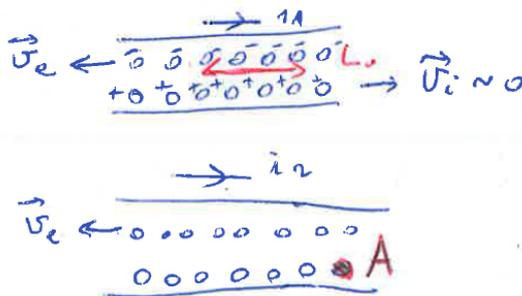
La même chose a lieu si c'est l'observateur qui bouge, et on continue à observer l'objet.



$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (7.2)$$

Quelle est la relation avec la force magnétique ?

⇒ Deux fils avec courant (dans la même direction).



Considérons le ion "A" comme notre observateur : qu'est-ce qu'il voit ?

"A" 'voit' les électrons de l'autre fil aller vers la gauche.

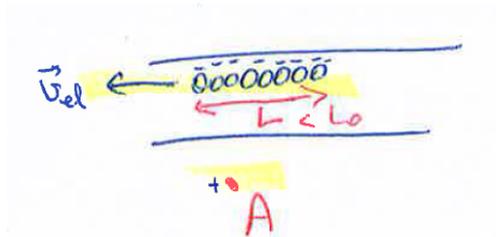
Au repos la densité de charge linéaire est :

$$|\lambda_0^+| = |\lambda_0^-| = \lambda_0 = \frac{|Q_0|}{L_0}$$

$$\lambda_{\text{total}} = \lambda_0^+ - \lambda_0^- = 0$$

Note 7.1. La charge n'est pas influencée par la relativité, contrairement à la masse

Mais, vue par "A", la longueur L_0 est contractée, et devient $L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < L_0$; et ceci uniquement pour les électrons, car les ions sont pratiquement immobiles.



$$\begin{aligned} \lambda_{\text{vue par A}} &= \lambda_{\text{vue par A}}^+ - \lambda_{\text{vue par A}}^- = \\ &\cong \underbrace{\lambda_0}_{\text{les ions sont immobiles}} - \frac{Q_0}{L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \\ &= \lambda_0 \underbrace{\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]}_{< 0} < 0! \quad (7.3) \end{aligned}$$

Donc "A" voit une charge négative non-nulle sur l'autre fil et ressent une attraction ⇒ voici la connexion entre \vec{E} et le magnétisme, motivée théoriquement en termes simples.

7.3 Mouvement des particules chargées dans un champ magnétique

Pour construire la théorie quantitative, commençons avec l'effet d'un champ magnétique sur des particules chargées libres .

Résumé des observations (celles faites ensemble, et d'autres du même type)

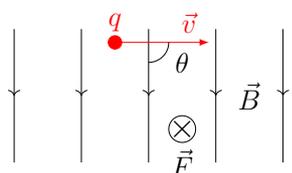
- La force courbe les trajectoires : $\vec{F} \perp \vec{v}$
- La force $\propto q$ (et dépend aussi du signe de q)
- La force $\propto v$ ($F = 0$ si $v = 0$)

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} : \quad \text{cette expression ("force de Lorentz")} \quad (7.4)$$

en effet définit \vec{B} "champ magnétique".

- \vec{B} est un champ vectoriel, et, tout comme \vec{E} , décrit une propriété de l'espace, par ex. autour d'un aimant, telle que nous pouvons calculer une force qui agit lorsqu'une charge (avec vitesse \vec{v}) est présente.

- Forme explicite de la force magnétique sur une charge :



$$\vec{F} = q|\vec{v}||\vec{B}| \sin \theta = qv_{\perp}B \quad (7.5)$$

$$v_{\perp} = |\vec{v}| \sin \theta \quad \text{composante de la vitesse } \perp \text{ à } \vec{B} \quad (7.6)$$

Unités : $[F] = [q][v][B] = \text{N}$

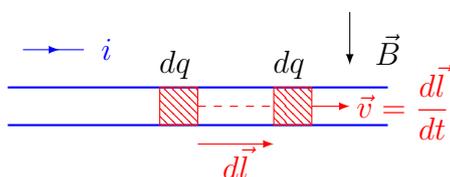
$$\rightarrow [B] = \frac{\text{Ns}}{\text{Cm}} = \frac{\text{N}}{\text{Am}} \equiv \text{T 'Tesla'}$$

Note 7.2. $1 \text{ T} = 10^4 \text{ Gauss}$

$B_{\text{terre}} \sim 10^{-4} \text{ T} = 1 \text{ G}$

Max B obtenu en laboratoire en conditions stationnaires : $B_{\text{max}} \sim 100 \text{ T}$

Force sur un fil parcouru par un courant



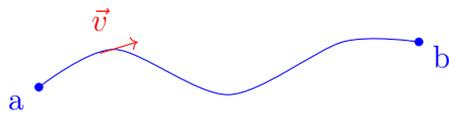
Sur une charge dq :

$$d\vec{F} = dq\vec{v} \times \vec{B} \quad (7.7)$$

$d\vec{F} = dq \frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B} = id\vec{l} \times \vec{B}$: la force est \perp aux fil (car $d\vec{l}$ est forcément le long du fil)

Force de Lorentz et travail

$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ (on assume ici $\vec{E} = 0$)

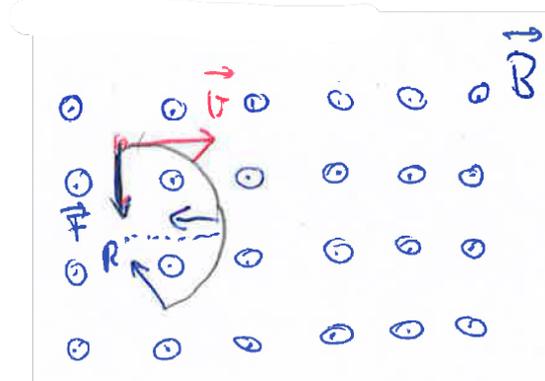


La force est toujours \perp à la vitesse, donc ne fait pas de travail!

$$W_{a \rightarrow b} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_a^b q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = q \int_a^b \underbrace{\left(\frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B} \right)}_{\text{toujours } \perp \text{ à } d\vec{l}} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (7.8)$$

Donc la force magnétique peut changer la direction de \vec{v} , mais pas $|\vec{v}|$ (ou l'énergie) de la particule chargée.

Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme, avec $\vec{v} \perp \vec{B}$



$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ (dans le dessin, $q > 0$)

la force est toujours dirigée vers le centre de la trajectoire, qui devient circulaire.

Quel est le rayon de cette trajectoire circulaire ?

Note 7.3. $|\vec{v}| = \text{const.}$

On calcule l'équilibre entre la force magnétique et la force centrifuge

$$|\vec{F}_B| = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow |q|vB = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow \boxed{R = \frac{mv}{|q|B}} \quad \text{rayon de cyclotron} \quad (7.9)$$

$$R = \frac{mv}{|q|B} \begin{cases} \nearrow \text{si grandes } m, v ; \text{ difficile de 'courber' l'orbite} \\ \searrow \text{si grands } q, B : \text{ force plus intense ; facile de 'courber' l'orbite} \end{cases} \quad (7.10)$$

Donc les particules tournent autour des lignes de champ \vec{B} : à quelle fréquence ?

pour un 'tour' (une orbite) : $T = \text{période} = \frac{2\pi R}{v}$

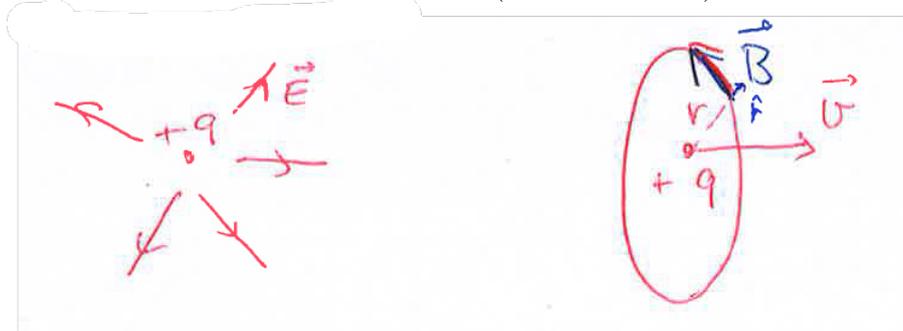
$$\Rightarrow \text{fréquence} = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi R} = \frac{v|q|B}{2\pi m v} = \frac{1}{2\pi} \frac{|q|B}{m} \quad \text{fréquence cyclotronique} \quad (7.11)$$

→ ex. sources μ -ondes $\left\{ \begin{array}{l} \text{four} \\ \text{gyrotrons} \\ \dots\dots \end{array} \right.$

7.4 Sources de champ magnétique : loi de Biot-Savart

On a observé que les charges en mouvement sont à la fois sujettes à \vec{B} et sources de \vec{B} .

Charge individuelle comme source de \vec{B} (avec $\vec{v} = \text{const.}$)



Expérimentalement, on observe

	E	B
intensité	$\begin{cases} \propto q \\ \propto \frac{1}{r^2} \\ - \end{cases}$	$\begin{cases} \propto q \\ \propto \frac{1}{r^2} \\ \propto v \sin \theta \end{cases}$
direction	radiale	azymuthale

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (7.12)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} \quad (7.13)$$

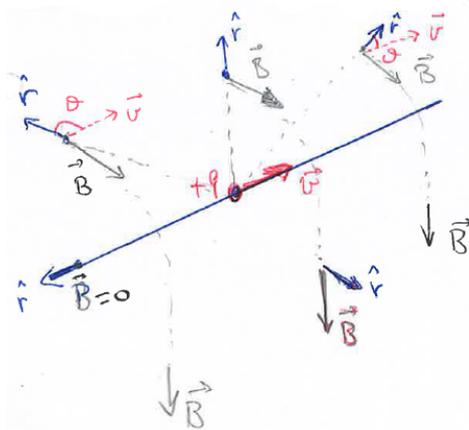
Note 7.4.

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} \quad (7.14)$$

$$\frac{1}{\epsilon_0\mu_0} = \frac{1}{8.8 \times 10^{-12} \times 4 \times \pi \times 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = \frac{10^{19}}{4\pi \times 8.8 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \simeq \left[3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]^2 = c^2 \quad ! \quad (7.15)$$

...pas une coincidence...

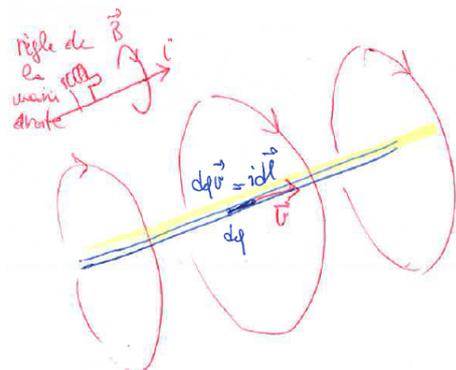
Clarification : que signifie \hat{r} dans le cas du champ \vec{B} ?



\hat{r} est le vecteur unitaire décrivant la direction et le sens entre la charge-source qui bouge à vitesse \vec{v} et le point auquel on calcule le champ \vec{B} .

Note 7.5. Dans la plupart des cas, la source de \vec{B} n'est pas une seule charge en mouvement, mais en ensemble, donc un courant.

$$i = \frac{dq}{dt}; dq\vec{v} = dq\frac{d\vec{l}}{dt} = i d\vec{l} \quad (7.16)$$



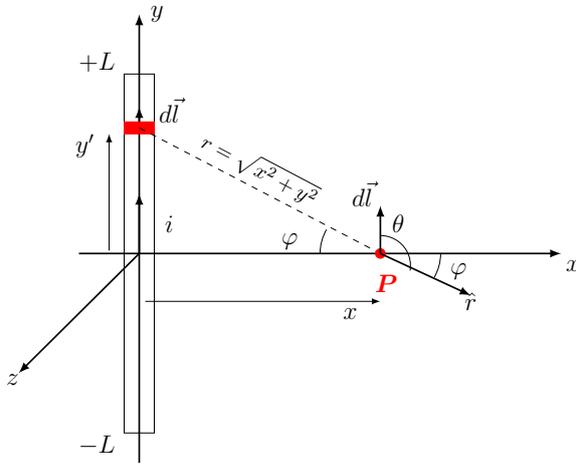
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dq\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad (7.17)$$

Loi de Biot-Savart

$$\Rightarrow \text{superposition } \vec{B} = \int_{fil} \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad (7.18)$$

Ex. d'application (simple) de la loi de Biot-Savart : champ magnétique créé par un fil parcouru par un courant i , de longueur $2L$.

\vec{B} au point P ?



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad (7.19)$$

- Direction de \vec{B} ? : $d\vec{l} \times \hat{r} \equiv \hat{y} \times \hat{r} = -\hat{z}$

- Amplitude de $|\vec{B}|$?

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dl \sin \theta}{x^2 + y^2}; \quad \theta = \varphi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \theta = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \varphi \quad (7.20)$$

$$(dl = dy')$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dy'}{x^2 + y'^2} \cos \varphi \quad (7.21)$$

(on utilise y' et dy' , car y' est la variable sur laquelle on intégrera)

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dy'}{x^2 + y'^2} \frac{x}{(x^2 + y'^2)^{1/2}} \quad (7.22)$$

On applique le principe de superposition et on intègre :

$$B = \int dB = \int_{-L}^L \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dy' x}{(x^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} x \int_{-L}^L \frac{dy'}{(x^2 + y'^2)^{3/2}} \quad (7.23)$$

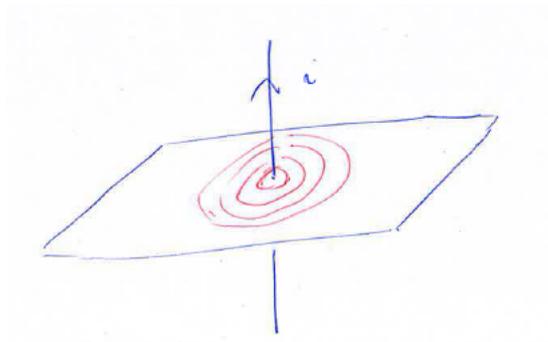
On se rappelle l'intégrale : $\int \frac{d\xi}{(a^2 + \xi^2)^{3/2}} = \frac{\xi}{a^2 \sqrt{a^2 + \xi^2}}$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} x \left[\frac{y'}{x^2(x^2 + y'^2)^{1/2}} \right]_{-L}^L = \frac{\mu_0 i}{4\pi x} \left[\frac{L}{\sqrt{x^2 + L^2}} - \frac{(-L)}{\sqrt{x^2 + L^2}} \right] = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} \frac{L}{\sqrt{x^2 + L^2}} \quad (7.24)$$

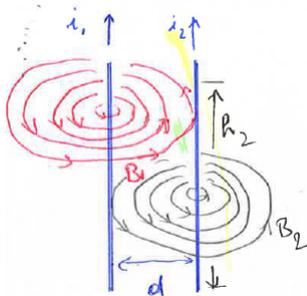
Limite du fil 'infini' : $L \gg x$

$$B \underset{L \gg x}{\sim} \frac{\mu_0 i}{2\pi x} \frac{L}{L} = \frac{\mu_0}{2\pi x} i \quad (7.25)$$

On s'attend donc la forme des lignes de champ suivante :



On peut aussi revenir à la **DEMO** d'attraction/répulsion entre deux fils parcourus par un courant, et calculer la force (dans l'approximation de fils 'longs').



chaque fil produit un champ magnétique qui est senti par l'autre fil/courant.

$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi d} i_1$; champ produit par i_1 à l'endroit de i_2

La force ressentie par le fil '2' sur la longueur h_2 est :

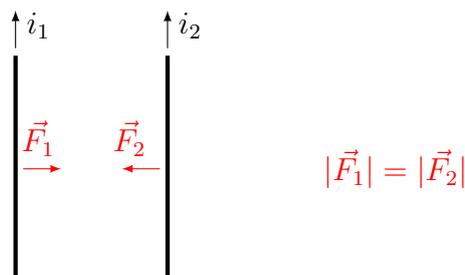
$$F_2 = i_2 B_1 h_2 \quad (7.26)$$

Note 7.6. Le fil '2' avec son courant i_2 produit un champ B_2 mais n'exerce pas de force sur lui-même !

En remplaçant l'expression pour B_1 , on a $F_2 = i_2 \underbrace{\frac{\mu_0}{2\pi d}}_{B_1} i_1 h_2$ ou $F_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2}{d} h_2$

On applique la règle de la main droite ($d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1$) et on a que la force F_2 est attractive.

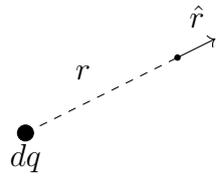
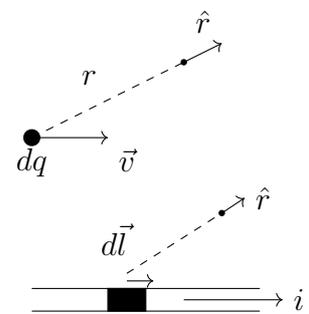
Naturellement, \vec{F} serait dans l'autre sens (répulsive) si un des deux courant changeait de signe.



Le même raisonnement s'applique à la force \vec{F}_1 exercée sur le fil '1' par le champ magnétique produit par le courant i_2 . Aussi, on pouvait simplement argumenter sur la base du principe d'action et réaction... (3^{ème} loi de Newton).

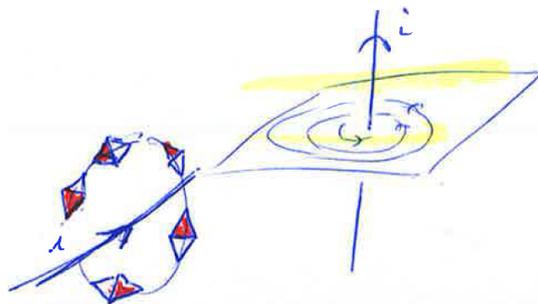
7.5 Sources de champ magnétique : loi d'Ampère

Rappel :

\vec{E} charge	\vec{B} courant (charge en mouvement)	
$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} dq \frac{\hat{r}}{r^2}$	$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} dq \frac{\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$ ou $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$	 <p style="text-align: center;">[Biot-Savart]</p>
$\vec{E} = \int_{\text{distribution des charges}} d\vec{E} \quad \vec{B} = \int_{\text{distribution de courant}} d\vec{B}$		

Note 7.7. Ces définitions et formules donnent lieu à des calculs compliqués : on cherche une façon plus simple de calculer \vec{B} à partir de sa source.

Nous avons déjà calculé le champ \vec{B} pour un fil fini parcouru par un courant.



Avant de faire un autre ex. de calcul, visualisons la structure du champ.

DEMO

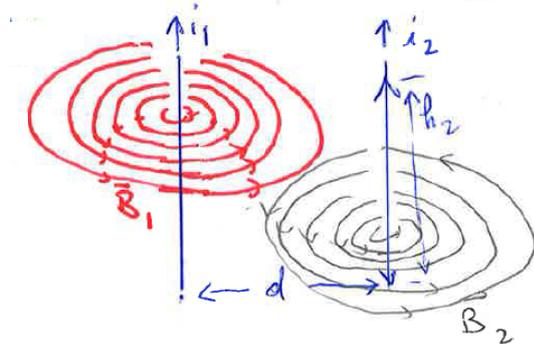
Lignes de champ : on utilise beaucoup de petites “boussoles” pour visualiser les lignes de champ \vec{B}



En effet nous avons vu et calculé le champ \vec{B} créé par un fil, mais avons observé la force entre deux fils : attraction/répulsion entre deux fils. Explication : chaque fil produit un champ qui est ressenti par l'autre fil.

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi d} i_1 \quad (7.27)$$

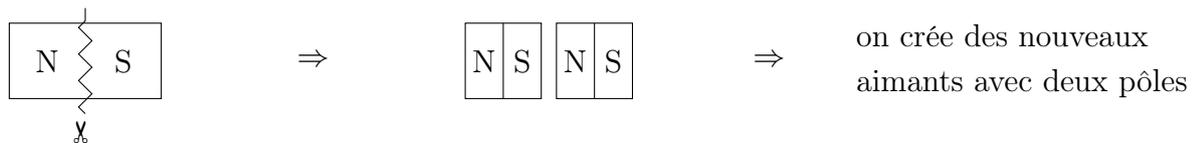
(champ produit par i_1 a l'endroit de i_2)



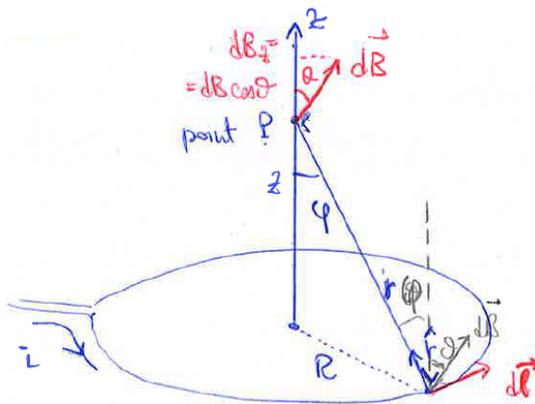
Force ressentie par fil "2" sur longueur h_2

$$F_2 = i_2 B_1 h_2 \quad (7.28)$$

En général, en regardant la structure des lignes de champ \vec{B} , on remarque que les lignes de champ n'ont pas de début ni de fin nulle part (car il n'y a pas des "charges", ou monopoles magnétiques). Question : que se passe-t-il si on casse un aimant ?



Regardons maintenant une autre application de la loi de Biot-Savart \Rightarrow Bobine circulaire
Calculons théoriquement le champ produit par une bobine circulaire, sur son axe, en utilisant la loi de Biot-Savart



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad \text{Biot - Savart} \quad (7.29)$$

Par symétrie, on n'aura que la composante de \vec{B} le long de \hat{z} : B_z .

Note 7.8. $d\vec{l} \perp \hat{r} : |d\vec{l} \times \hat{r}| = dl$

$$|d\vec{B}| = \left| \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \right| = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dl}{z^2 + R^2} \quad ; \quad \text{note} \quad d\vec{B} \perp \begin{cases} d\vec{l} \\ \hat{r} \end{cases} \quad (7.30)$$

$$dB_z = |d\vec{B}| \cos \vartheta = |d\vec{B}| \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = |d\vec{B}| \sin \varphi = |d\vec{B}| \frac{R}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \quad (7.31)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \text{superposition } \vec{B}_{tot} &= B\hat{z} = \int_{\text{cercle}} dB_z \hat{z} = \\
&= \left[\int_{\text{cercle}} \underbrace{\frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl}{z^2 + R^2} \cdot \frac{R}{(z^2 + R^2)^{1/2}}}_{\substack{\text{term à l'intérieur de l'intégrale ne} \\ \text{dépend de la position le long du cercle!}}} \right] \hat{z} = \left[\frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{R}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \underbrace{\int_{\text{cercle}} dl}_{2\pi R} \right] \hat{z} \\
&= \left[\frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{R}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \cancel{2\pi R} \right] \hat{z} = \boxed{\frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{z}} \quad (7.32)
\end{aligned}$$

Au centre de la bobine : $z = 0$

$$B_{\text{centre}} = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R}{R} \begin{cases} \propto i \\ \propto \frac{1}{R} \end{cases} \quad (7.33)$$

Naturellement, si on a N tours, le principe de superposition nous dit simplement que le résultat est $|\vec{B}| = N \frac{\mu_0 i}{2R}$.

Note 7.9. À des très grandes distances, $z \gg R$

$$B \underset{z \gg R}{\simeq} \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{z^3} \quad : \quad \text{le champ diminue très rapidement avec } z$$

Nous avons vu à quel point les calculs deviennent rapidement compliqués en utilisant la loi de Biot-Savart, même pour des géométries relativement simples. On doit trouver une meilleure méthode!

Loi d'Ampère (~1800)

Nous avons un problème similaire pour le champ électrique \vec{E} . Pour simplifier les calculs, nous avons trouvé la loi de Gauss :

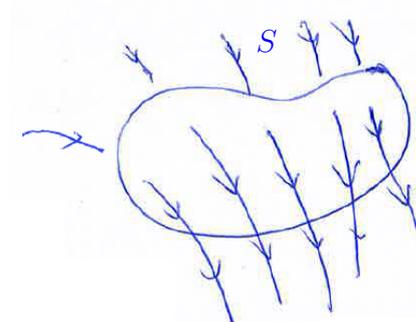
$$\Phi_E^S = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{en\ S}}{\epsilon_0} \quad (7.34)$$

L'idée a été de remplacer l'intégrale sur la 'vraie' distribution des charges avec une intégrale sur une surface mathématique S .

Où est-ce qu'on gagne? Dans le fait que si S est choisie de manière intelligente, on peut simplifier l'intégrale! Essayons la même idée pour le champ magnétique, en partant de son flux :

$$\Phi_B^S = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} =? \quad (7.35)$$

en effet, $\Phi_B^S = 0$ toujours, pour toute surface fermée S



surface fermée

La raison est qu'il n'y a pas de charges magnétiques isolées (mono-pôles) \Rightarrow les lignes de champ de \vec{B} n'ont pas de début ni de fin. Chaque contribution au flux rentrant dans la surface est compensée par le même flux qui sort de la surface.

Donc

$$\begin{cases} \Phi_E^S = \frac{Q_{en\ S}}{\epsilon_0} \\ \Phi_B^S = 0 \quad \leftarrow \text{pas de charge magnétique} \end{cases} \quad (\text{S est une surface fermée})$$

Malgré son importance, l'équation $\Phi_B^S = 0$ ne nous aide pas pour le calcul de \vec{B} , car il n'y a pas de lien entre le champ et sa source.

Comme le flux, donc l'intégrale de surface, ne nous aide pas, essayons avec une intégrale de ligne.

$$\int_{\text{circuit fermé}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{entouré}}$$

loi d'Ampère,
lien entre \vec{B}
et sa source, i (7.36)

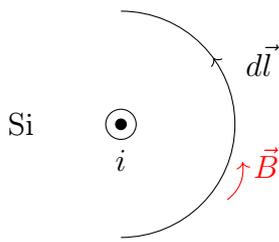
Comme dans la loi de Gauss, l'idée est que nous pouvons choisir le parcours fermé, pour que l'intégrale soit simple.

Notamment, on peut choisir le parcours tel que :

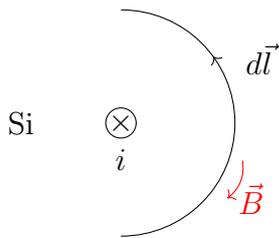
$$\vec{B} \perp d\vec{l} \Rightarrow \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (7.37)$$

$$\vec{B} \parallel d\vec{l} \Rightarrow \vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl \quad (7.38)$$

Signe de $i_{\text{entouré}}$? On suit la règle de la main droite pour le parcours d'intégration et i .



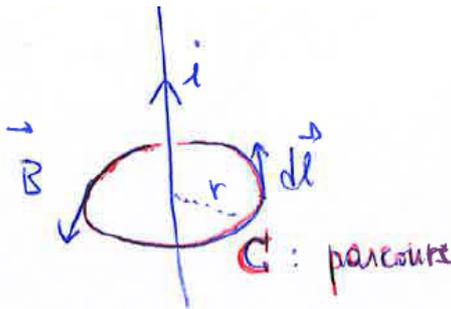
Si la règle de la main droite est satisfaite : $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} > 0$, et \vec{B} est dirigé comme le parcours d'intégration.



Si la règle n'est pas satisfaite, alors $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} < 0$, et \vec{B} est dirigé dans le sens opposé au parcours d'intégration.

Voyons un ex. d'application tout simple, avant de démontrer la loi d'Ampère : fil rectiligne.

Ex. 1 fil rectiligne



On sait que \vec{B} est dirigé azymuthalement : on choisit le parcours fermé C selon la même symétrie

Ampère :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i \tag{7.39}$$

par symétrie, \vec{B} est le même le long C , et dirigé selon $d\vec{l}$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \int_C dl = B 2\pi r = \mu_0 i \Rightarrow \boxed{B = \mu_0 \frac{i}{2\pi r}} \tag{7.40}$$

Ampère,

avec signe positif, car la

règle de la main droite est respectée

Démonstration de la loi d'Ampère

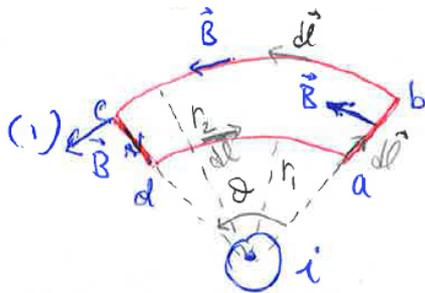
$$\oint_{\text{parcours fermé}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{entouré}} \tag{7.41}$$

Deux pas

(1) si $i_{\text{entouré}} = 0 \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$

(2) $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{entouré}}$

(1) $i_{\text{entouré}} = 0$



(a) Considérons le parcours.

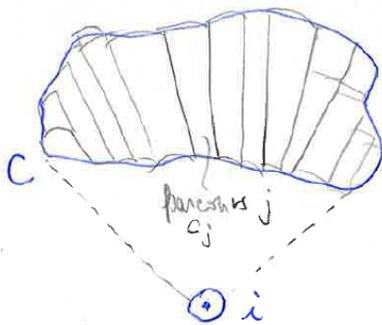
$$\text{Biot-Savart : } B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad (\text{azymuthal}) \quad (7.42)$$

$$\begin{aligned} \oint_{abcd} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \underbrace{\int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{\substack{=0 \\ \text{car } \vec{B} \perp d\vec{l}}} + \underbrace{\int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{B(r_2) \times \text{longueur}(\widehat{bc})} + \underbrace{\int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{\substack{=0 \\ \text{car } \vec{B} \perp d\vec{l}}} + \underbrace{\int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{-B(r_1) \times \text{longueur}(\widehat{da})} = \\ &= B(r_2)\text{longueur}(\widehat{bc}) - B(r_1)\text{longueur}(\widehat{da}) \quad (7.43) \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \text{longueur}(\widehat{bc}) = \vartheta r_2 \\ \text{longueur}(\widehat{da}) = \vartheta r_1 \end{cases}, \text{ et } B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \\ \Rightarrow \oint_{abcd} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \frac{\mu_0}{2\pi r_2} i(\vartheta r_2) - \frac{\mu_0}{2\pi r_1} i(\vartheta r_1) = 0 \quad \text{OK!} \quad (7.44) \end{aligned}$$

(b) Parcours de forme arbitraire (mais fermé!), qui n'entoure pas de courant

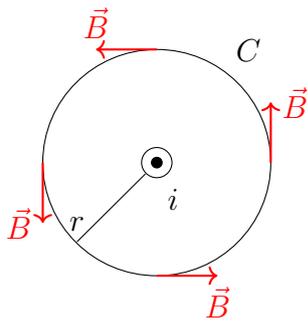


on peut le partager en N parcours fermés de la même forme que le cas (a). Pour chaque parcours C_j :

$$\oint_{C_j} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \sum_{j=1}^N \oint_{C_j} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (7.45)$$

(2) $i_{\text{entouré}} \neq 0$

(2a) cercle centré autour du conducteur qui amène le courant

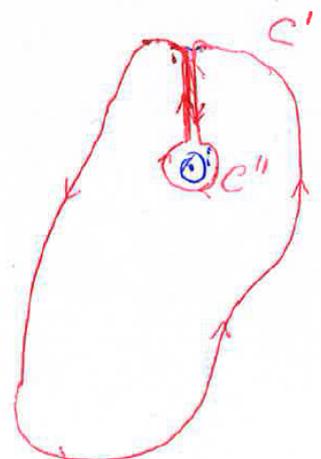


$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r) \oint_C dl = B(r)2\pi r \stackrel{\text{(Biot-Savart)}}{=} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} 2\pi r = \mu_0 i \tag{7.46}$$

(2b) forme arbitraire entourant i



\Rightarrow
parcours similaire,
mais qui n'entoure aucun courant



Comme C' n'entoure aucun courant, on sait du point précédent que $\oint_{C'} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$; mais C' peut être vu comme "somme" de C , plus C'' , et les allers-retours $\uparrow\downarrow$ pour arriver à C'' .
Donc

$$0 = \oint_{C'} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{\uparrow\downarrow} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \oint_{C''} \vec{B} \cdot d\vec{l} \tag{7.47}$$

Or, $\int_{\uparrow\downarrow} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$, car si on les prend assez proches, sur les deux segments \vec{B} sera la même, et les deux contributions s'annuleront (le signe est opposé, car $d\vec{l}$ est opposé).

Et C'' est un cercle centré autour du courant : on sait comment calculer l'intégrale!

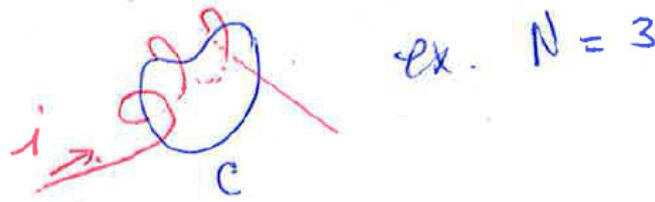
$$0 = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} + \oint_{C''} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} - \mu_0 i \tag{7.48}$$

signe "-" car nous ne respectons pas avec C'' la règle de la main droite!

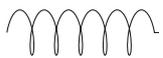
$$\Rightarrow \boxed{\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{entouré}}} \quad \square \tag{7.49}$$

pour n'importe quelle forme de C .

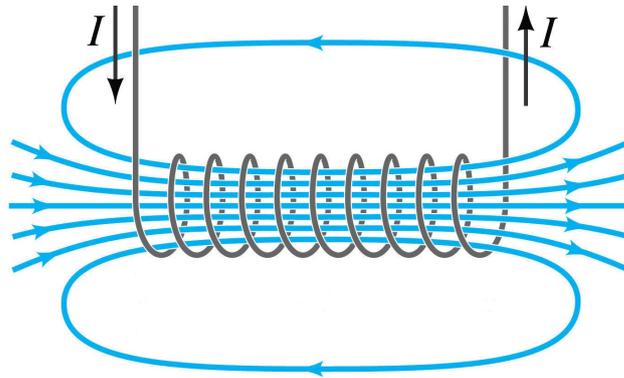
Note 7.10. Si C entoure N fils parcourus par un courant i , $i_{\text{entouré}} = Ni$



7.6 Applications de la loi d'Ampère

Ex. 2. Solénoïde  cas très utilisé dans les applications pratiques. Avant d'appliquer la loi d'Ampère pour calculer \vec{B} , faisons-nous une idée de la forme de \vec{B} .

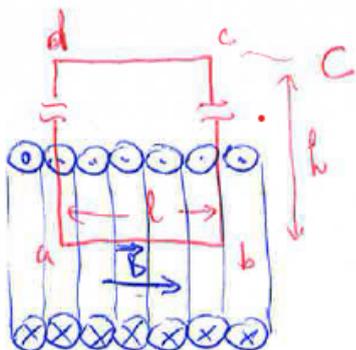
Lignes de champ, solénoïdes



Note 7.11.

- Les lignes de champ sont uniformes et parallèles à l'axe dans la région centrale
- Faible à l'extérieur
- Le champ semble concentré dans un volume défini (d'où l'utilité pratique) ... un peu comme le condensateur pour le champ électrique ...

Calcul de \vec{B} :



$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{entouré}} \quad (7.50)$$

Section du solénoïde.

Sur le parcours C :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \underbrace{\int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{=Bl \text{ car } \approx \text{const pour sol. infinie}} + \underbrace{\int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{=0 (\vec{B} \perp d\vec{l})} + \underbrace{\int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{=0 \text{ car } B \approx 0 \text{ si } h \text{ est assez grand}} + \underbrace{\int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{=0 (\vec{B} \perp d\vec{l})} \quad (7.51)$$

donc

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = Bl \underset{\text{Ampère}}{=} \mu_0 i \times nl, \quad \text{avec } n = \frac{\# \text{ tours}}{\text{unité de longueur}} \quad (7.52)$$

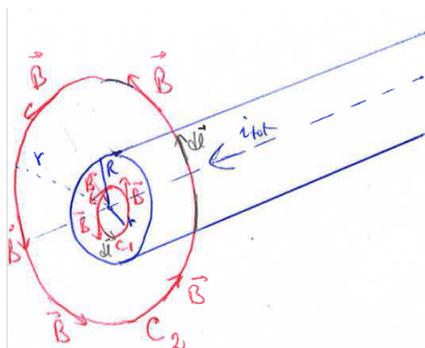
$$\Rightarrow B l = \mu_0 i n l \Rightarrow \boxed{B = \mu_0 i n = \mu_0 i \frac{N_{tot}}{L_{tot}}} \quad (7.53)$$

Note 7.12. Nous avons supposé que \vec{B} est dirigé selon l'axe du solénoïde, et $B \rightarrow 0$ à l'extérieur. Cette approximation est de plus en plus valable au fur et à mesure que la longueur du solénoïde augmente, comparée à son diamètre.

Note 7.13. La partie du parcours ab n'est pas forcément le long de l'axe : B a la même valeur partout, à l'intérieur.

On peut aussi appliquer la loi d'Ampère dans des cas qui sont caractérisés par une distribution continue de courant (pas juste un fil infiniment fin).

Ex. 3 Conducteur cylindrique (câble) avec courant distribué uniformément sur sa section



$$B(r) = ?$$

Point crucial : choisir le parcours C .

Densité de courant $J = \frac{i}{\text{surface}} = J_0 = \text{const.}$

$$J_0 = \frac{i_{tot}}{\pi R^2}$$

(1) $r < R$ (à l'intérieur du câble)

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{entouré}} \Rightarrow B(r) 2\pi r = \mu_0 \overbrace{J_0 \times \text{surface}(r)}^{i_{\text{entouré}}} = \mu_0 J_0 \pi r^2 = \mu_0 i_{tot} \frac{r^2}{R^2} \quad (7.54)$$

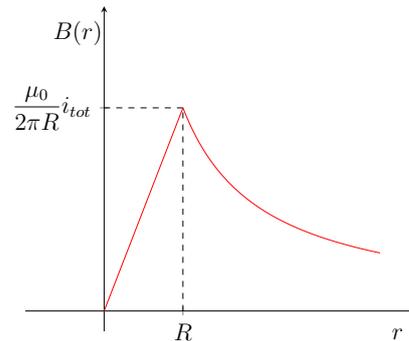
$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 i_{tot}}{2\pi r} \frac{r^2}{R^2} = \frac{\mu_0 i_{tot}}{2\pi R^2} r \quad (7.55)$$

(2) $r \geq R$

$$\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r) 2\pi r = \mu_0 i_{\text{entouré}} = \mu_0 i_{tot} \quad (7.56)$$

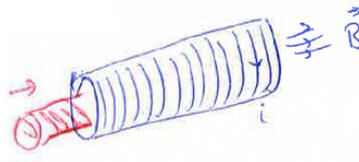
$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} i_{tot} \quad (7.57)$$

Graphiquement



7.7 Dipôles magnétiques et moment magnétique

Nous avons vu qu'un élément "de base" simple pour les circuits est le solénoïde, source de champ \vec{B} localisé dans un volume.

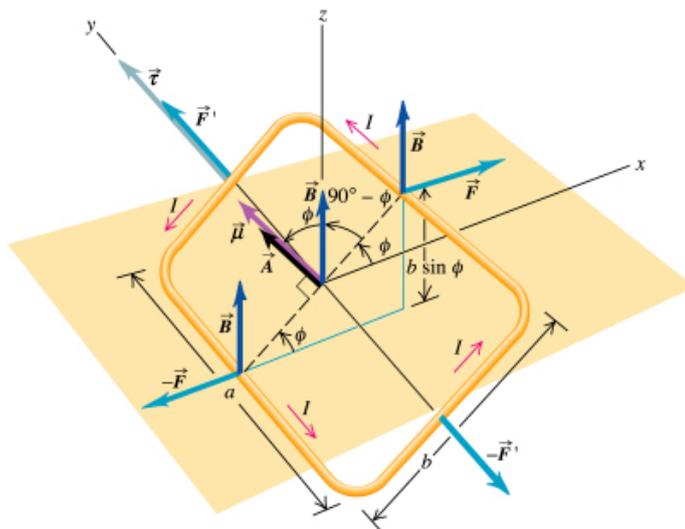


Si on insère un matériau dans le volume où le champ \vec{B} est présent, on peut voir une augmentation de la valeur de \vec{B} : pourquoi ?

Avant de discuter des effets du champ magnétique dans la matière, et de comment $|\vec{B}|$ peut être augmenté (ou diminué), nous devons nous rappeler des effets de \vec{B} sur un circuit fermé, et introduire le concept de dipôle magnétique.

Force et couple sur un dipôle magnétique

Nous avons étudié la force exercée par un champ magnétique sur un fil parcouru par un courant, mais en effet le cas le plus commun est que le courant passe dans un circuit fermé. Prenons une géométrie simple, avec champ magnétique uniforme, et un circuit de forme rectangulaire.
fil infiniment fin.



La force totale sur le circuit fermé est nulle, car \vec{F} et $-\vec{F}$, \vec{F}' et $-\vec{F}'$ s'équilibrent (rappel : B est uniforme).

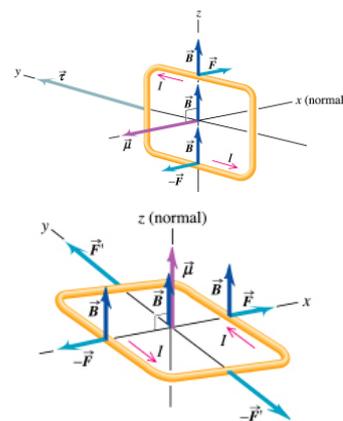
Mais le couple, ou moment de force, n'est pas nul en général! Il l'est pour \vec{F}' et $-\vec{F}'$, car ces deux forces agissent le long du même axe (l'axe y).

Mais il n'est pas nul pour \vec{F} et $-\vec{F}$, car elles agissent le long des axes différents!

Comme le bras de la force de chaque côté est $\frac{b}{2} \sin \phi$, le moment de force totale, ou couple, est la somme des deux (les deux forces "font tourner" dans le même sens) :

$$\tau = 2F \left(\frac{b}{2} \sin \phi \right) = Fb \sin \phi = iBab \sin \phi \tag{7.58}$$

Le couple est max. pour $\phi = \frac{\pi}{2}$
 ($\tau = iBab$)



Le couple est min. pour $\phi = 0$
 ($\tau = 0$)

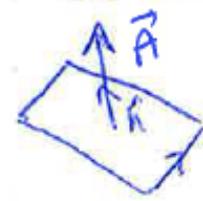
Note 7.14. $ab = A$, surface du circuit

Définition 1. $\boxed{\mu = iA}$ "moment de dipôle magnétique" ou "moment magnétique".
 Donc $\tau = \mu B \sin \phi$.

Le fait qu'il y ait "sin ϕ " suggère le résultat d'un produit vectoriel. En effet μ peut être défini comme un vecteur :

$$\vec{\mu} = i\vec{A}, \quad \text{avec } \vec{A} = A\hat{n}$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$



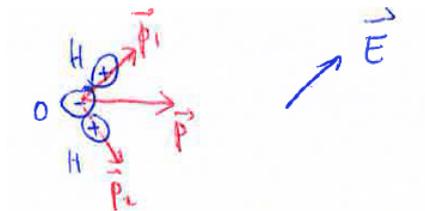
(direction/sens donné par la règle de la main droite)

Note 7.15. Analogie avec champ électrique/dipôle électrique $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$

Le couple impose une rotation qui tend à aligner $\vec{\mu}$ avec \vec{B}

Analogie 1 :

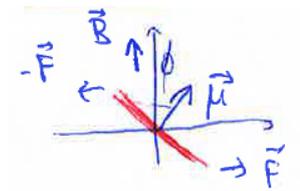
champ \vec{E} uniforme



$$\vec{F} = 0 \quad ; \quad \vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E};$$

énergie potentielle $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$

champ \vec{B} uniforme

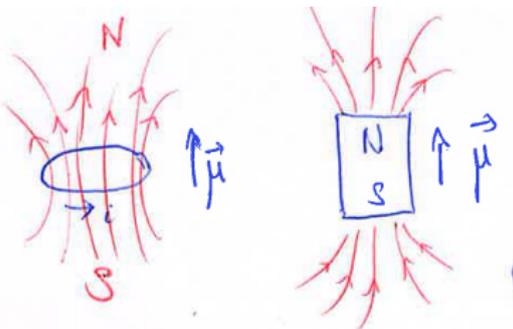


$$\vec{F} = 0 \quad ; \quad \vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B};$$

$$\Rightarrow E_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

Analogie 2 :

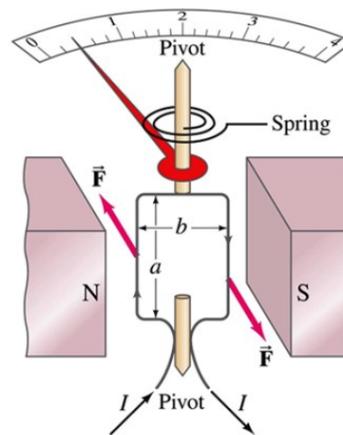
Équivalence entre boucle de courant et petit aimant



pourra-t-on décrire le petit aimant aussi en termes de $\vec{\mu}$? Oui! Les deux créent le même type de champ et se comportent de la même façon dans un champ magnétique externe ...

Regardons deux applications macroscopiques de ce couple.

- (1) Galvanomètre (mesure de courant électrique)

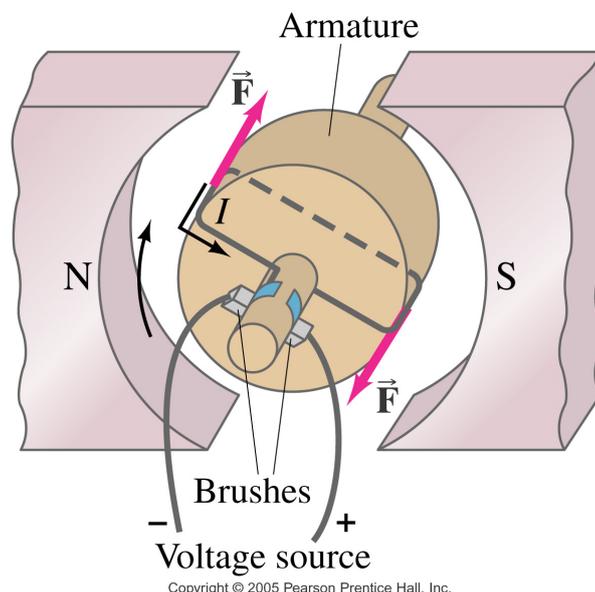


Comme le couple $\tau = NiAB \sin \phi$ (N est le nombre de tours dans la bobine, et ϕ l'angle entre la surface de la bobine et le champ magnétique) et le couple du ressort est $\tau_r = k\vartheta$, où ϑ est l'angle de torsion, on a un équilibre qui est déterminé par $\tau = \tau_r \Rightarrow NiAB \sin \phi = k\vartheta$, et si on mesure ϑ on a une mesure de i : $\vartheta = \frac{NiAB \sin \phi}{k}$ et $i = \frac{k\vartheta}{NiAB \sin \phi}$.

(2) Moteur électrique

On aimerait transformer l'énergie électrique en énergie mécanique. Le principe est le même du galvanomètre, mais sans ressort, donc la boucle est libre de tourner dans une direction. En effet on utilise une bobine (pas une seule spire), avec plusieurs tours, montée sur un cylindre, appelé 'rotor'. Dans la pratique, il y a même plusieurs bobines... mais le principe est le même.

L'idée est la suivante : la bobine tourne dans un sens, mais passée la position verticale, aurait la tendance à revenir en arrière, si le courant reste le même, car la direction du couple est inversée. Mais, si on construit des contacts tels que la direction du courant est inversée quand la bobine passe par la position d'équilibre (verticale), alors le sens de la rotation reste le même ! Les contacts ou 'brosses' ('brushes') agissent en commutateurs.



Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

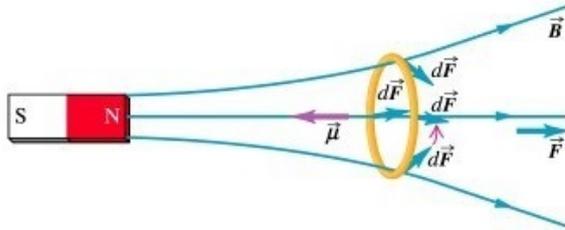
Note 7.16. *Pour maximiser la puissance, et la 'contrôlabilité', l'aimant est remplacé par des électro-aimants, et il y a un nombre assez élevé de bobines sur le rotor.*

Note 7.17. *Une alternative à l'idée des commutateurs est d'utiliser une source de courant alterné - Dans ce cas, l'inversion du signe du courant se fait naturellement à la fréquence du courant AC.*

Note 7.18. *Vous allez construire vous-mêmes un petit moteur électrique, basé sur l'action de la force générée par un champ magnétique sur un fil parcouru par un courant*

Dipôles magnétiques dans un champ \vec{B} non-uniforme

Un circuit parcouru par un courant ressent un couple ($\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$), mais pas de force nette dans un champ magnétique uniforme. Par contre, si \vec{B} n'est pas uniforme :

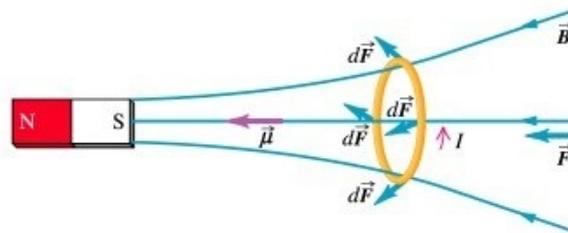


comme \vec{B} n'est pas parfaitement horizontal, la force, en plus d'une composante radiale (qui s'annule sur toute la boucle) a une petite composante horizontale vers la droite .

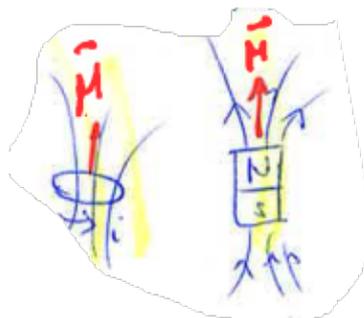
$$d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B}$$

Donc la boucle est repoussée par l'aimant.

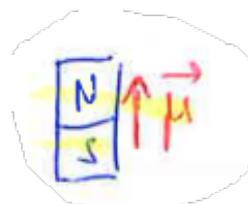
Si on inverse la polarité de l'aimant, $\vec{\mu}$ et \vec{B} deviennent parallèles (orientés dans la même direction), et le circuit est attiré par l'aimant



Ou peut maintenant reprendre notre analogie entre boucle de courant et aimant



et attribuer un moment magnétique $\vec{\mu}$ à l'aimant aussi :

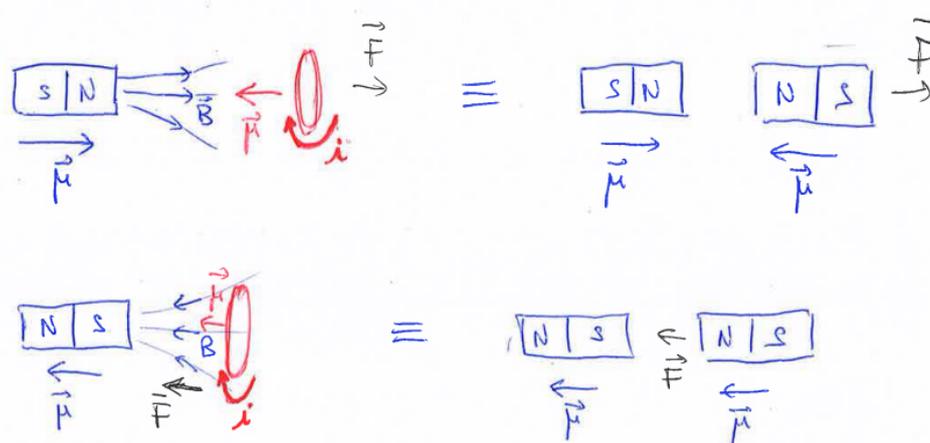


L'effet est le même : $\vec{\mu}$ de l'aimant a la tendance à s'aligner avec \vec{B} .

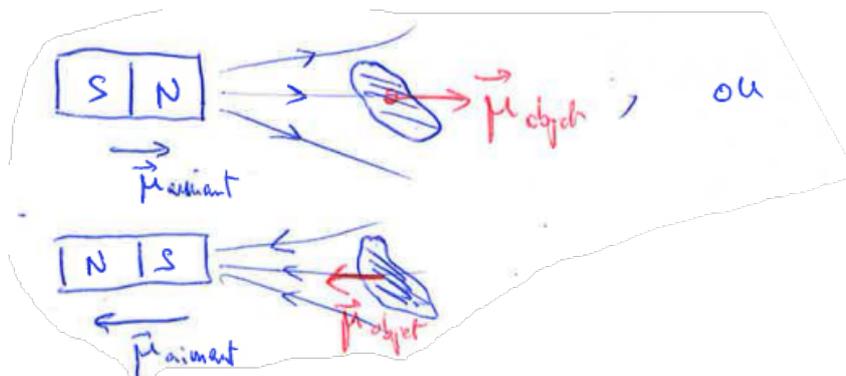


'south to north' : direction de \vec{B}

De plus, la représentation de l'aimant à travers $\vec{\mu}$ explique, par analogie avec la boucle de courant, pourquoi deux aimants avec le même pôle l'un devant l'autre se repoussent, et vice-versa.



Question "challenge" : pourquoi un objet de fer est attiré par un aimant de tous les côtés ?
 Réponse : un objet contenant du fer contient des 'domaines' de $\vec{\mu} \neq 0$, qui sont alignés par le champ de l'aimant



Dans le deux cas, $\vec{\mu}_{\text{objet}}$ est aligné comme $\vec{\mu}_{\text{aimant}}$, donc il y a attraction !
 Ceci est un 'avant-goût' de la discussion du champ \vec{B} dans le matière.

7.8 Champs magnétiques dans la matière

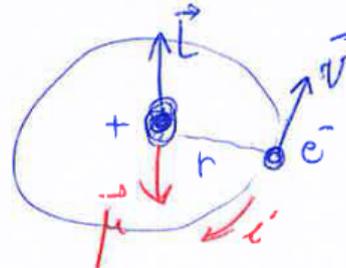
Dans la réalité de la plupart des applications, nous avons affaire à des matériaux, dont les propriétés magnétiques sont très importantes et exploitées, par ex. pour augmenter B , pour créer des mémoires magnétiques, pour confiner du plasma etc.

Origine atomique du magnétisme de la matière

courants \rightarrow champs \vec{B}

Le courant le plus élémentaire est celui produit par un électron qui orbite autour de son noyau

$$i = \frac{e}{\text{période}} = \frac{e}{\frac{2\pi r}{v}} = \frac{ev}{2\pi r} \quad (7.59)$$



moment magnétique :

$$\mu = iA = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{evr}{2} \quad (7.60)$$

moment cinétique

$$L = mvr \quad (7.61)$$

On peut donc exprimer μ en fonction de L :

$$\mu = \frac{evr}{2} = \frac{eL}{2m} \quad (7.62)$$

mais $\vec{\mu}$ et \vec{L} sont toujours opposés, à cause du signe de la charge.

Ceci vous sera utile pour la physique quantique, car L est 'quantisé', multiple de $\frac{h}{2\pi}$, avec $h = \text{const. de Planck}$.

Si L est quantisé en $\frac{h}{2\pi}$, alors μ est quantisé en

$$\frac{e}{2m} \left(\frac{h}{2\pi} \right) \Rightarrow \mu = n \left[\frac{e}{2m} \cdot \frac{h}{2\pi} \right] = n\mu_B \quad \text{"magneton de Bohr"} \quad (7.63)$$

mais $n = 1, 2, 3, \dots$ et $\mu_B \sim 9.3 \times 10^{-24} \text{ J/T}$

Question : comme toutes les substances contiennent des électrons pourquoi en général elles ne sont pas magnétiques (avec $\mu \neq 0$) ? Parce que les moments magnétiques s'annulent réciproquement, presque parfaitement.

Note 7.19. *En plus de son moment magnétique orbital, l'électron a une propriété intrinsèque appelée "spin", qui contribue à son moment magnétique total. C'est "comme si" l'électron avec sa charge tournait autour de son axe... même si cette idée classique n'est pas très appropriée...*

En général les spins des électrons se compensent, mais les atomes avec un nombre impair d'électrons doivent avoir au moins un électron dont le spin n'est pas compensé par un autre (de son "couple"), et donc un moment magnétique de spin non-nul. Le moment magnétique total est la somme (vectorielle) des moments magnétiques orbitaux et de spin.

Note 7.20. Le noyau a aussi un moment magnétique (issu des protons et neutrons qui le composent), mais celui-ci est en général négligeable par rapport à celui des électrons (à cause des masses beaucoup plus grandes).

Magnétisation \vec{M} (ou "aimantation")

Définition 2.

$$\vec{M} = \frac{\sum_{\text{volume}} \vec{\mu}_i}{\text{volume}} \quad (7.64)$$

Le valeur de \vec{B} dans la matière dépend de \vec{B}_0 (externe) et de \vec{M} .

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M} \quad (7.65)$$

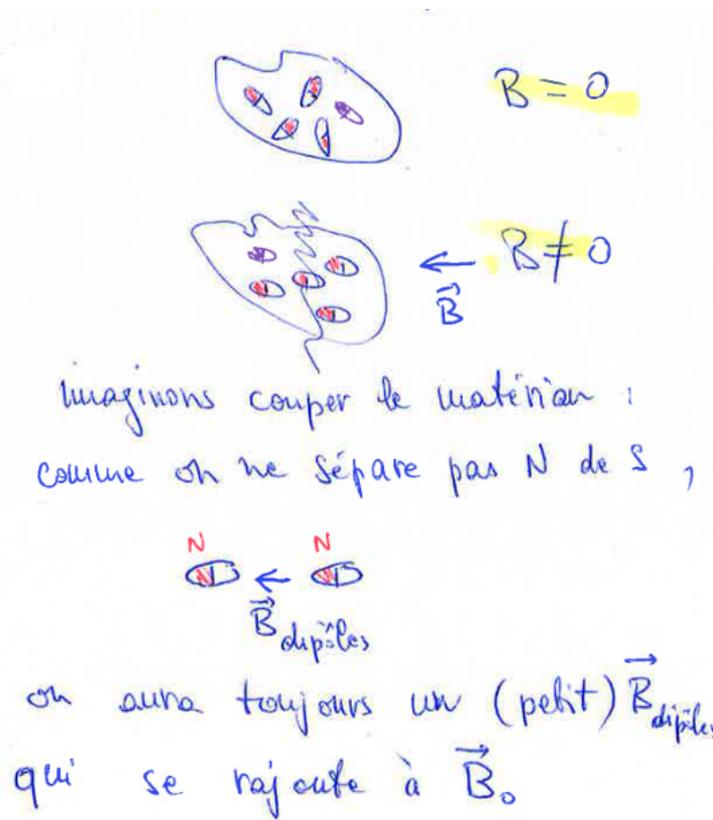
\uparrow \uparrow dans la matière,
 appliqué généré microscopiquement
 extérieurement

Classification de la matière par rapport à son comportement magnétique.

(a) $|\vec{B}|$ est plus grand dans la matière : para-magnétisme.

Dans les matériaux paramagnétiques les dipôles magnétiques ne sont pas tous compensés.

Les μ résiduels sont alignés par le champ appliqué extérieurement.



$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M} = K_m \vec{B}_0 \quad K_m = \frac{|B|}{|B_0|} > 1 \quad (7.66)$$

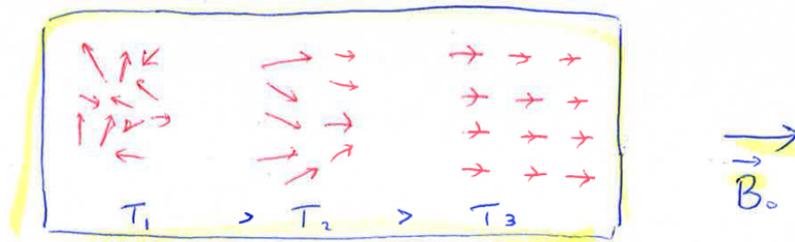
K_m “perméabilité relative”, typiquement $\simeq 1.00001 - 1.003$.

\vec{M} sera proportionnel au champ magnétique présent dans la matière, mais dépendra aussi de la température, car la tendance des moments magnétique à s’aligner le long de \vec{B} est contrastée par l’agitation thermique qui tend à “randomiser” leur orientation.

Modèle (simple) de Curie :

$$\vec{M} = \frac{const.}{T} \vec{B}_0 \quad \text{“loi de Curie”} \quad (7.67)$$

Comme discuté auparavant, un corps avec des moments magnétiques est attiré par un aimant (par les deux pôles en effet). Mais dans la plupart des substances paramagnétiques cet effet d’attraction est très faible à cause de la randomisation thermique. Par ex. l’Aluminium (qui est paramagnétique) n’est pas attiré par un aimant, sauf si on va à très basse T ...



(b) $|\vec{B}|$ est plus faible dans la matière : diamagnétisme

Dans certains matériaux le moment magnétique total est nul (tous les circuits “microscopiques” se compensent parfaitement).

Mais l’effet de \vec{B}_0 sur les orbites microscopiques (les électrons qui tournent sur leur orbite autour des noyaux) est tel que le champ microscopique s’oppose au champ appliqué.

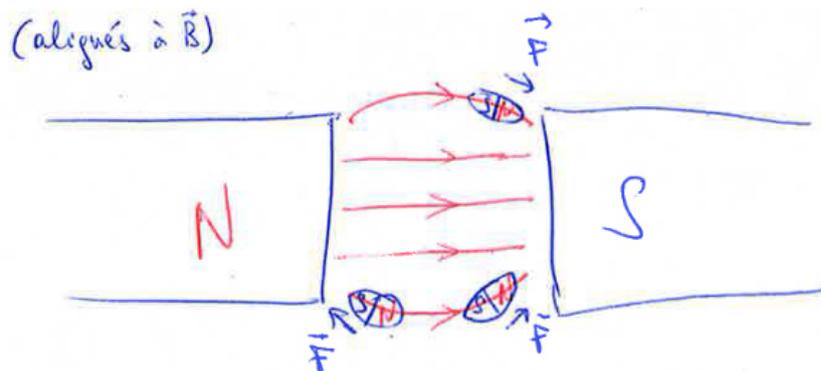
Donc $|\vec{B}| < |\vec{B}_0|$, avec $K_m = \frac{|B|}{|B_0|} < 1$.

Typiquement, $K_m \simeq 0.9999 - 0.99999$.

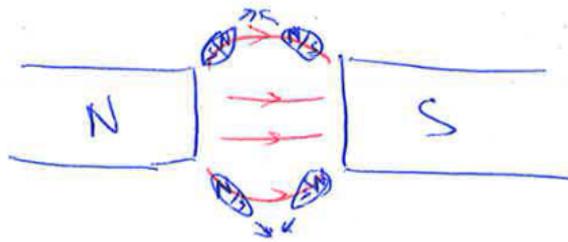
Cette différence est très petite, mais suffisante à produire des effets très visibles!

DEMO Paramagnétisme de l’O₂ liquide, diamagnétisme de l’N₂ liquide

L’O₂ liquide est paramagnétique, donc contient des “petits aimants”. Ceux-ci ressentent une force qui les attire vers la région de champ plus intense (composante verticale).



L' N_2 liquide est diamagnétique, donc pas fait de “petits aimants” \vec{B}_0 en effet crée des “nouveaux aimants” qui lui sont opposés.



ces “aimants” opposés à \vec{B}_0 sont “expulsés” de la région avec forte intensité de champ.

Extrême cas de diamagnétisme : supra-conducteurs

En dessous d’une température critique T_c , on a pour certains matériaux, $R = 0 \Omega$, et le champ magnétique est “expulsé” du matériaux : $B = 0$. Le champ est en effet complètement compensé par un champ produit par des courants microscopiques (sans aucun frottement).

Il y a donc une forte répulsion entre le matériau dans un état de supra-conducteur, qui est un diamagnétique avec $K_m \rightarrow 0$, et toute source de champ magnétique, par ex. un aimant.

Le champ \vec{B} ne peut pas “pénétrer” à l’intérieur du s.c.

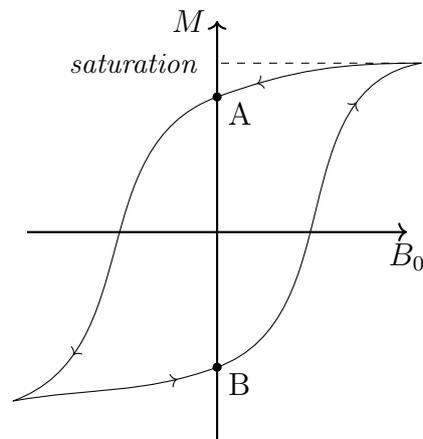
Classe spéciale de matériaux paramagnétiques

Matériaux ferromagnétiques (ex. fer, nickel, cobalte, alliages ...) $\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M}$, mais \vec{M} est présent même sans \vec{B}_0 . La relation entre \vec{M} et \vec{B} est compliquée, et dépend de l’“histoire” de \vec{B}_0 , de la température, etc. ...

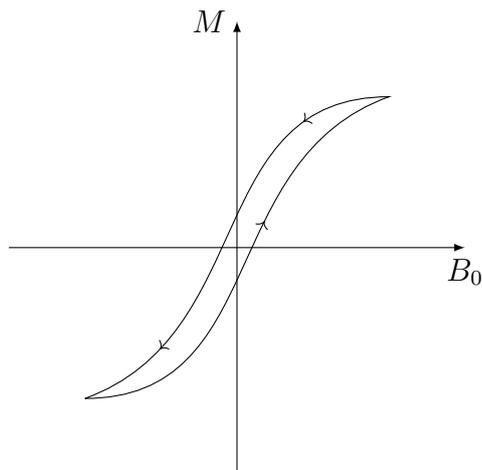
Dans le matériaux ferromagnétique il existe des “domaines” magnétiques (taille < 1 mm), dans lesquels des fortes interactions entre moments magnétiques font que ces moments sont alignés. Dans l’absence de \vec{B}_0 , les magnétisations des domaines sont orientées au hasard. Quand \vec{B}_0 est appliqué, les domaines tendent à s’orienter (eu termes de \vec{M}) tous le long de \vec{B}_0 . Les domaines orientés le long de \vec{B}_0 s’élargissent, les autres deviennent plus petits. Eu augmentant B_0 , on arrive à un point (saturation), auquel pratiquement tous les moments magnétiques sont alignés. Au-delà de ce point, on n’augmente plus \vec{M} , ni \vec{B} . $K_m = \frac{B}{B_0} \sim 1\,000 - 100\,000$! Si, après, on enlève B_0 , les domaines peuvent rester alignés. Comment pourrait-on penser de ‘démagnétiser’ le ferromagnétique ?

- choc thermique : on peut chauffer à très haute T , et re-‘randomiser’ le domaines (au-dessus d’une certaine valeur de T , T_{curie} , on ne peut pas avoir d’aimant du tout)
- choc mécanique : on peut mécaniquement ‘secouer’ les domaines, et re-distribuer les orientations.

La dépendance de M de B_0 est donc non-linéaire, et 'dépend' de l'histoire : courbe d'hystérèse (dépendance différente si on augmente ou si on diminue B_0)

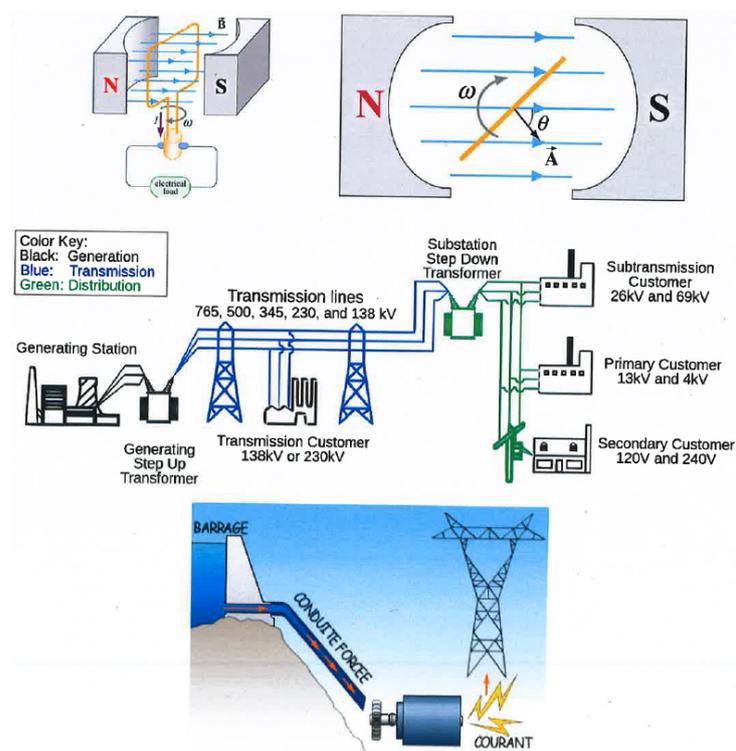
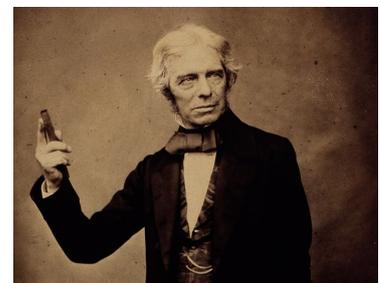


Note 7.21. *Au point A et B nous avons créé un aimant permanent.*



Chapitre 8

Induction électromagnétique et loi de Faraday

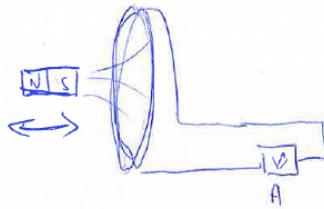


8.1 Découverte de l'induction magnétique

Si les courants électriques (générés par \vec{E} , V) donnent lieu à des champs magnétiques ($\vec{E} \Rightarrow \vec{B}$), est-ce que \vec{B} peut donner lieu à des courants ? ($\vec{B} \stackrel{?}{\Rightarrow} \vec{E}$) ?

Les gens ont cherché cette relation dans les deux sens pendant ~ 10 ans, sans succès. Helmholtz, par ex., avait entouré sa ville d'un très long fil électrique pour voir si le champ magnétique de la terre y générerait un courant... mais sans succès.

L'erreur était de ne considérer que des boucles fixes et des champs magnétiques constants. C'est Faraday qu'en 1831 réalise que "quelque chose" doit varier dans le temps.



Si on bouge l'aimant, on observe un courant !

i_{ind} : courant "induit"

Note 8.1.

- plus vite on bouge, plus de courant est induit
- le signe du courant change selon la direction du mouvement
- le signe change si on inverse l'aimant
- si on change l'orientation de la bobine, i_{ind} change

Histoire ou légende de Faraday

Il a montré ce nouvel effet devant de grands politiciens anglais (à la Royal Society). Les gens n'étaient pas impressionnés, et demandaient quelle était l'utilité de l'effet. Faraday répondit : "c'est juste un bébé qui vient de naître ... quelle est l'utilité d'un bébé ?" Puis rajouta : "... mais un jour vous allez mettre des impôts dessus."

En effet, il s'agissait d'un pas fondamental vers l'application de l'électricité pour notre vie de tous les jours.

8.2 Lois de Faraday et de Lenz

Pour créer un courant, on doit avoir une force électromotrice

$$\mathcal{E}_{ind} = \oint_{\text{boucle}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\text{Travail}_{\text{boucle}}}{\text{charge}}$$

comme on a "induit" \mathcal{E} , on a aussi "induit" \vec{E} .



Maintenant, on peut essayer de bouger le circuit dans un champ magnétique, dans le champ magnétique terrestre, ou dans le champ d'un aimant permanent.

On peut aussi augmenter le nombre de spires (tours), et voir que l'effet augmente ... mais aussi l'effort "mécanique" qu'on doit faire.

Cette dernière observation nous rend attentifs au fait que la source d'énergie est dans le travail qu'on doit faire pour déplacer le fil.

Résumé des observations :

- "quelque chose" doit varier dans le temps : $|\vec{B}|$, ou la surface du circuit "vue" par \vec{B}
- ε est proportionnel à $\begin{cases} \text{vitesse de la variation de } |\vec{B}| \\ \text{" " " de la surface "vue" par } \vec{B} \end{cases}$

Qu'elle est la quantité physique qui mesure $|\vec{B}|$ et la surface "vue" par \vec{B} ? \Rightarrow le flux magnétique à travers la surface S : $\Phi_B^S = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$

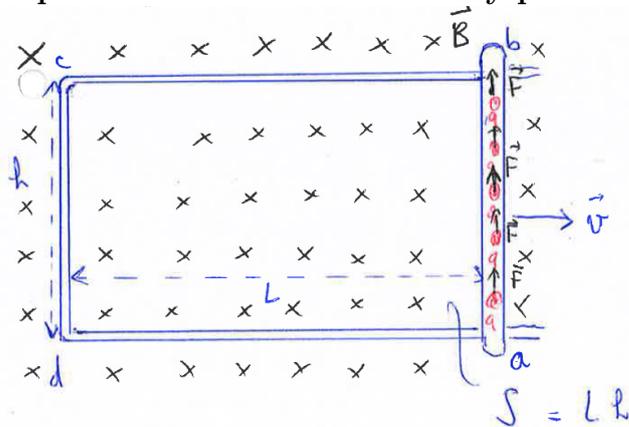
Donc

$$|\mathcal{E}| = \left| \frac{d\Phi_B^S}{dt} \right| \quad \text{loi de Faraday} \quad (8.1)$$

S : surface contenue dans le circuit.

Note 8.2. $\Phi_B^S = 0$ pour toute surface fermée, mais la surface contenue dans un circuit (fermé) n'est pas elle-même fermée !

Interprétation de la loi de Faraday pour un circuit en mouvement



le circuit est fermé par une tige conductrice qui bouge horizontalement

$$|\vec{v}| = \frac{dL}{dt} = \text{const.} \quad (8.2)$$

Les charges sur la tige ressentent une force $|\vec{F}| = |q\vec{v} \times \vec{B}| = q \frac{dL}{dt} B$. Sur les autres parties du circuit il n'y a pas de force, car il n'y a pas de mouvement.

Travail par unité de charge le long du circuit (c'est la force électromotrice)

$$\mathcal{E} = \frac{\text{travail}}{\text{charge}} = \frac{1}{q} \oint_{abcd} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{q} \int_a^b q \frac{dL}{dt} B = \frac{dL}{dt} Bh \quad (8.3)$$

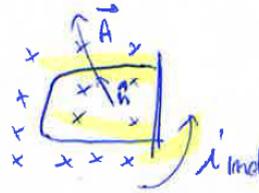
Sur les parties du circuit autres que ab il n'y a pas de force, car rien ne bouge.

Mais B et h sont constants :

$$\frac{dL}{dt} Bh = \frac{d}{dt} (B \overbrace{Lh}^{\text{surface } S}) = \frac{d}{dt} (BS) = \frac{d}{dt} |\Phi_B^S| \Rightarrow |\mathcal{E}| = \left| \frac{d\Phi_B^S}{dt} \right| \quad (8.4)$$

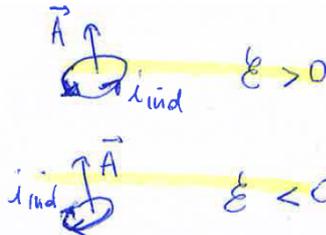
Signes ?

- signe pour $\vec{A} = A\hat{n}$



- signe pour Φ_B^S et $\frac{d}{dt}(\Phi_B^S)$ [les deux peuvent être différents!]

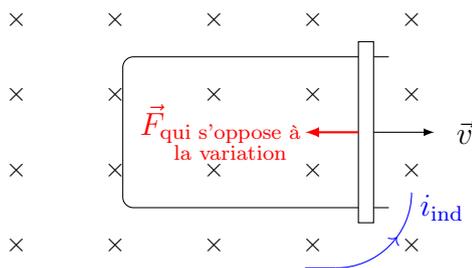
- règle de la main droite



Trois ans après la loi de Faraday, Lenz a établi la règle pour déterminer le signe :

“le signe de i_{ind} est tel que le système s’oppose à la variation (du flux) qui l’a généré”

Ex. circuit avec tige qui bouge



(\vec{v} est la cause de la variation du flux)

$\vec{F}_{ind} = i_{ind}d\vec{l} \times \vec{B}$ est vers la gauche !

Donc, justement, \vec{F}_{ind} tend à “freiner” la tige qui coulisse vers la droite, cause primaire de la variation du flux qui induit un courant.

Note 8.3. La loi de Lenz s’écrit

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B^S}{dt} \tag{8.5}$$

et elle correspond à une loi de conservation (de l’énergie)

Si le signe était opposé, toute variation du flux serait amplifiée [“positive feedback”]. On pourrait générer de l’énergie électrique sans investir de l’énergie mécanique.

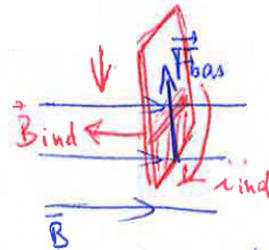
La loi de Lenz décrit une sorte d’inertie ou “frottement” efficace pour tout mouvement qui tend à changer la valeur du flux magnétique.

8.3 Courants de Foucault

Freinage dans un champ magnétique.

Considérons un circuit métallique qui tombe à travers une région qui a un champ magnétique (par exemple créée par un gros aimant permanent)

(a) le circuit rentre dans la zone avec $\vec{B} \neq 0$

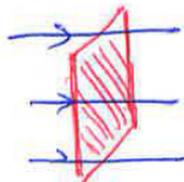


Φ_B est en train d'augmenter
 $\frac{d\Phi_B}{dt} > 0 \Rightarrow \varepsilon$ donne i_{ind} t.q. ça tend à opposer l'augmentation de Φ_B

La force sur les deux côtés s'annule.

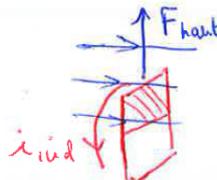
Sur le côté bas, immergé dans \vec{B} , est $\vec{F}_{bas} = i_{ind} d\vec{l} \times \vec{B}$, vers le haut.

(b) le circuit est exactement dans la zone avec $\vec{B} \neq 0$



En ce moment exact il n'y a pas de variation de Φ_B : pas de ε , i_{ind} , pas de freinage.

(c) le circuit sort de la zone avec $\vec{B} \neq 0$



Là, Φ_B est en train de diminuer.
 $\frac{d\Phi_B}{dt} < 0 \Rightarrow \varepsilon$ donne i_{ind} t.q. ça oppose cette diminution

La direction de i_{ind} est donc inversée, et la force sur le côté haut (immergé dans \vec{B}) est vers le haut. Naturellement, comme dans le cas (a), celle sur les deux côtés s'annule.

Qu'est qu'il se passe si on utilise une plaque sans "circuits fermés" ?



→ il ne peut pas y avoir du courant induit, donc il n'y a pas de force de freinage! et une plaque "pleine" ? Même une plaque pleine est freinée, car il n'y a pas de parcours spécifique pour le courant, mais le courant peut quand même circuler sur la surface.



ce sont les "courants de Foucault", ou "eddy currents". Ces courants suivent, comme tous les courants induits, la règle de Lenz, donc s'opposent à la variation du flux. → freinage

Question : où va l'énergie mécanique dissipée dans le freinage ?

→ dans l'énergie dissipée par la résistivité de la matière dans laquelle le courant induit circule.

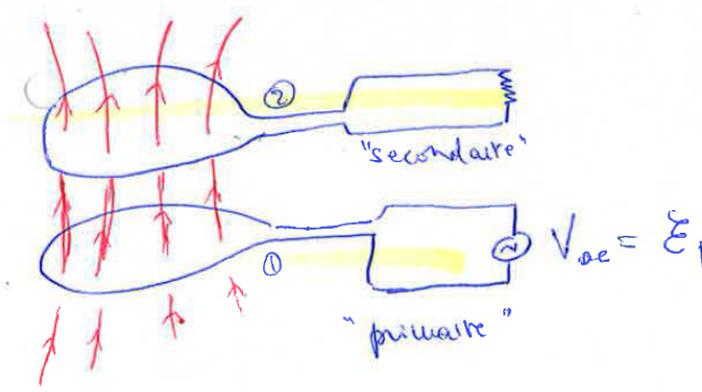
Parfois on veut minimiser cette dissipation, d'autres fois, selon les applications, on veut la maximiser.

Une situation dans laquelle on veut maximiser la dissipation de l'énergie associée au courant induit sous forme de chaleur, pour cuire la nourriture, est celle des plaques à induction.

8.4 Transformateurs et générateurs

Grace à l'induction, l'électricité peut être générée, transportée, transformée sans contact électrique direct, pour autant qu'il y ait une variation de flux. C'est pour ça que les réseaux électriques dans le monde sont en courant alternatif (AC).

Un exemple de comment l'“électricité” peut être manipulée est celui du transformateur



- En variant \mathcal{E}_p , on produit une variation du flux dans le circuit “secondaire” → induit \mathcal{E}_s
- \mathcal{E}_s aura la même fréquence de variation que \mathcal{E}_p [c'est pour ça que la fréquence des réseaux dans le monde est fixe, 50 Hz en Europe, 60 Hz aux US]

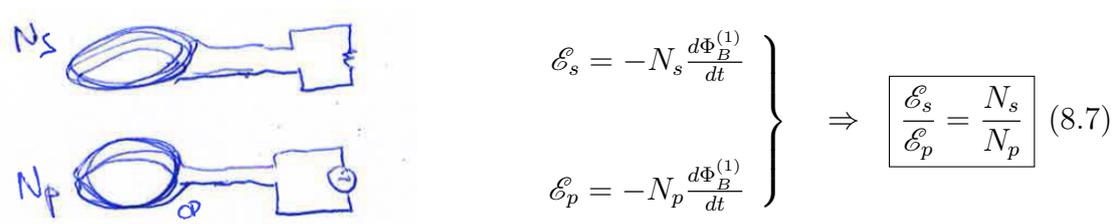
Note 8.4. Le circuit primaire voit aussi la variation du flux qu'il génère.

On peut assumer que le primaire et secondaire “encerclent” les mêmes lignes de champ : la variation du flux est la même si les circuits sont identiques :

$$\mathcal{E}_p(t) = \mathcal{E}_s(t) = -\frac{d\Phi_B^{(1)}}{dt} , \tag{8.6}$$

ou $\frac{d\Phi_B^{(1)}}{dt}$ est la variation du flux à travers la surface du circuit primaire (1).

Idée : on utilise un nombre de tours différent entre primaire et secondaire



On peut donc augmenter ou réduire l'emf, donc la tension électrique.

⇒ c'est comme ça qu'on "transforme" la tension sur les systèmes de distribution, en particulier, on transforme la source en haute tension pour minimiser les pertes résistives à longues distances.

Note 8.5. Naturellement, on ne peut pas augmenter la tension au-delà de valeurs auxquelles on commence à avoir des "arcages" (donc des ionisations de l'air), qui donnent lieu aussi à des pertes et à d'autres problèmes.

Note 8.6. Si on néglige les pertes résistives dans les bobines qui forment les transformateurs, on peut considérer que la puissance est conservée :

$$P_s = \mathcal{E}_s i_s = P_p = \mathcal{E}_p i_p$$

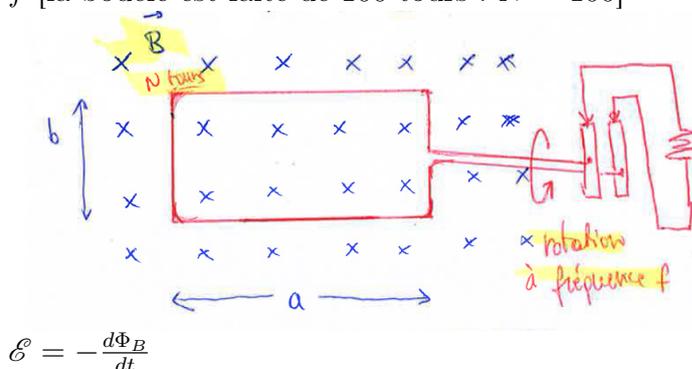
$$\Rightarrow \left[\frac{i_s}{i_p} = \frac{\mathcal{E}_p}{\mathcal{E}_s} = \frac{N_p}{N_s} \right] \tag{8.8}$$

on peut augmenter ou diminuer le courant.

Comment est-ce qu'on génère l'électricité (AC) ?

→ ceci est un joli exercice d'application de la loi de Faraday ... avec une énorme portée pratique!

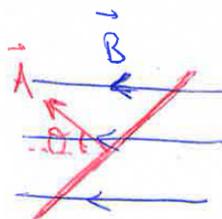
Considérons une boucle rectangulaire dans un champ \vec{B} uniforme, qui tourne à fréquence f [la boucle est faite de 100 tours : $N = 100$]



On aimerait :

- (a) calculer $\mathcal{E}(t)$
- (b) concevoir boucle pour produire $\mathcal{E}_0 = 220 \text{ V}$ avec $N = 100$, $B = 0.5 \text{ T}$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin(2\pi ft)$

$\Phi_B(t)$: vue de côté



$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA \cos \vartheta = NabB \cos \vartheta \quad ; \quad \text{note } \vartheta = \vartheta(t) \tag{8.9}$$

Mais $\frac{d\vartheta}{dt} \equiv$ fréquence angulaire de rotation $= 2\pi f$ ($= \frac{2\pi}{\text{période}} = \omega$), donc (en assumant $f = \text{const.}$)

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 2\pi f \quad ; \quad \vartheta(t) = 2\pi ft \quad [\text{on prend } \vartheta(t=0) = 0] \tag{8.10}$$

$$\Rightarrow \frac{d\Phi_B}{dt} = -NabB \sin(\overbrace{2\pi ft}^{\vartheta(t)}) \overbrace{2\pi f}^{d\vartheta/dt} \quad (8.11)$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = Nab \sin(2\pi ft) 2\pi f = \mathcal{E}_0 \sin(2\pi ft) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t) \quad (8.12)$$

avec $\mathcal{E}_0 = NabB2\pi f$

(b) Comme on veut $\mathcal{E}_0 = 220 \text{ V}$, et $f = 50 \text{ Hz}$, $B = 0.5 \text{ T}$, $N = 100$

$$\Rightarrow ab = \frac{220}{100 \times 0.5 \times 2\pi \times 50} \text{m}^2 = 0.014 \text{m}^2 = 140 \text{cm}^2$$

Ex. $a = 14 \text{ cm}$; $b = 10 \text{ cm}$

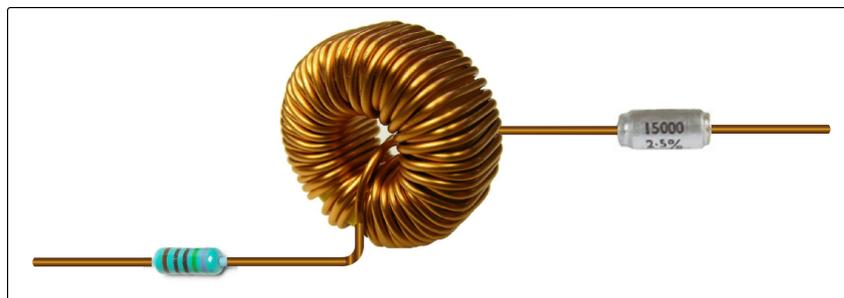
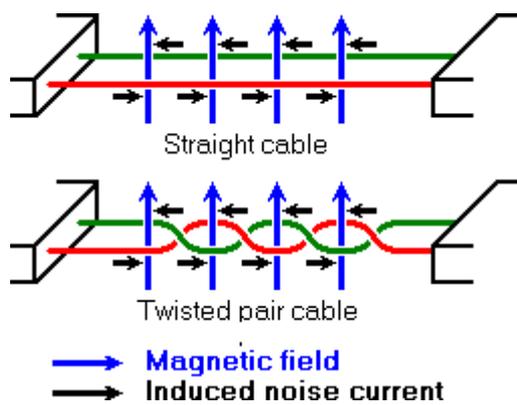
[grandeurs tout à fait raisonnables !]

Dans la pratique, la boucle est faite pour tourner par différentes méthodes, telles que l'eau qui tombe par gravité (hydro-électrique), ou des turbines actionnées par de la chaleur générée (hélas) par combustion, ou par réactions nucléaires.

... et on revient à la vision de Faraday ... "un jour vous y mettrez un impôt ..."

Chapitre 9

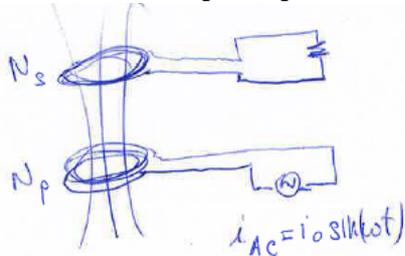
Inductance et circuits AC



9.1 Inductance mutuelle et ‘self’

Inductance mutuelle

Nous avons vu le principe du transformateur



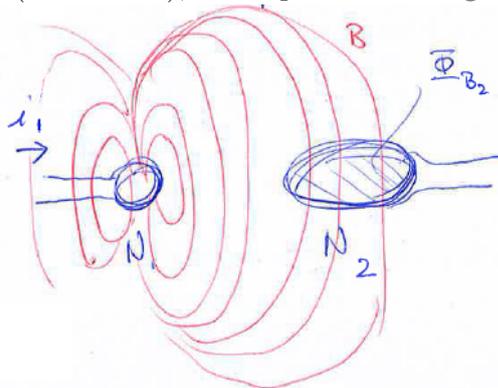
Nous avons considéré que les deux bobines ‘voient’ les mêmes lignes de champ, et ont la même surface (à part qu’elles peuvent avoir un nombre de tours différent)

Dans ce cas $\frac{\mathcal{E}_s}{\mathcal{E}_p} = \frac{N_s}{N_p}$ et, en négligeant les pertes $\frac{i_s}{i_p} = \frac{N_p}{N_s}$. Ceci est le cas d’un transformateur ‘idéal’.

En général, la situation n’est pas si simple, et pas tout le flux du primaire est ‘capturé’ par le secondaire.

Traitions le cas plus général.

L’objet ‘1’ (primaire) a un courant i_1 , qui produit un champ magnétique vu par l’objet ‘2’ (secondaire), ainsi qu’un flux magnétique.



Définition 3. Inductance mutuelle

$$M_{12} = \frac{\Phi_{B_2}}{i_1} = \frac{N_2 \Phi_{B_2}^{\text{un tour}}}{i_1} \quad (9.1)$$

ou, plus en général : $\frac{d\Phi_{B_2}}{di_1}$.

Note 9.1. Pas tout le flux ‘vu’ par la bobine ‘1’ est ‘vu’ par la bobine ‘2’.

Note 9.2. $M_{21} = M_{12} = M$: c’est une propriété (constante) de la géométrie du système et des matériaux.

Force électromotrice (emf)

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_{B_2}}{dt} = -\frac{d}{dt}(Mi_1) = -M\frac{di_1}{dt}; \text{ et } \mathcal{E}_1 = -M\frac{di_2}{dt} \quad (9.2)$$

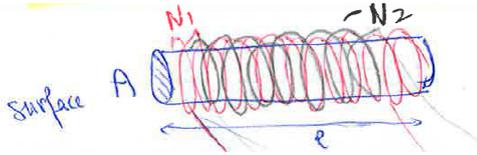
Donc M met en relation \mathcal{E}_2 et i_1 , les deux quantités d’intérêt.

Unités :

$$[M] = \frac{V}{A/s} = \frac{Vs}{A} = \frac{[\text{flux magnétique}]}{A} = \frac{Wb}{A} = \text{‘Henry’ } H$$

où Wb=‘Weber’, avec $1 \text{ Wb} \equiv 1 \text{ Vs}$.

Ex. de calcul de M : solénoïde avec deux enroulements



Dans ce cas on ne ‘perd’ pas de flux entre ‘1’ et ‘2’ : ce serait un excellent transformateur

$$M = \frac{\Phi_{B_2}}{i_1} = \frac{N_2 \Phi_{B_2}^{\text{un tour}}}{i_1} = \frac{N_2 A B_{i_1}}{i_1} \tag{9.3}$$

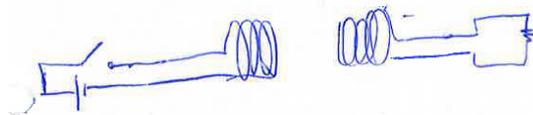
B_{i_1} est le champ généré par le courant i_1 : $B_{i_1} = \frac{\mu_0 N_1}{l} i_1$. Donc

$$M = \frac{N_2 A B_{i_1}}{i_1} = \frac{N_2 A}{l_1} \mu_0 \frac{N_1}{l} l_1 i_1 = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} A \tag{9.4}$$

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{di_1}{dt} \quad ; \quad \mathcal{E}_1 = -M \frac{di_2}{dt}$$

Note 9.3. *L’inductance mutuelle est utile pour ‘coupler’ deux circuits, faire passer un signal de l’un à l’autre sans contact, pour autant qu’il y ait une variation temporelle dans le courant.*

DEMO



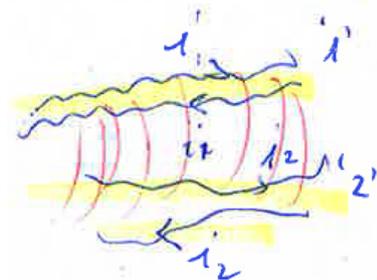
on induit un signal seulement à l’enclenchement ou au déclenchement (ou si un bouge les bobines ... ceci équivaut à changer M , ou si on a un signal, donc un courant, oscillant.)

A haute fréquence, $\frac{d}{dt}$ est grand, donc on peut transmettre les signaux de manière efficace.

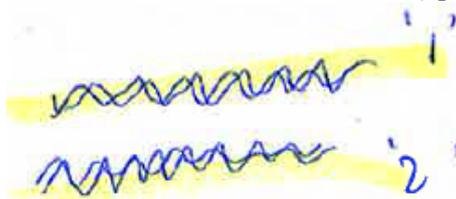
Note 9.4. *Dans d’autres cas, on veut minimiser l’inductance mutuelle. Par ex. quand on veut éviter de coupler des signaux.*

Ex. lignes téléphoniques analogiques

le signal dans la ligne ‘1’ serait couplé avec celui de la ligne ‘2’ : “cross-talk”. A éviter !



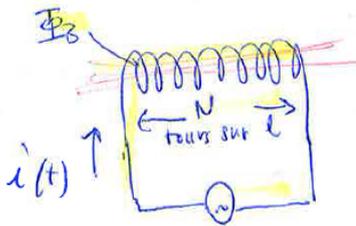
→ en réduisant M entre les câbles, par ex. en les ‘twistant’



les surfaces sont réduites, et en plus le peu de flux qui arrive à être capté se moyenne à 0 sur toutes les petites boucles qui ont différentes orientations.

Auto- ou ‘self’ -inductance

On considère un seul circuit. Un courant variable dans le circuit crée un flux variable dans des portions du même circuit : on a donc une ‘auto-induction’, et une auto-emf. Naturellement, combien de flux généré par le circuit est vu par le circuit même dépend de la géométrie.



Définition 4. L : auto- ou self inductance

$$L = \frac{\Phi_B}{i} = \frac{N\Phi_B^{un\ tour}}{i} \tag{9.5}$$

en général $L = \frac{d\Phi_B}{di}$ (on utilise la lettre ‘L’ à l’honneur de M. Lenz).

Comme M , L est utile car ça contient les propriétés géométriques (et des matériaux) du système, et met en relation flux et courant.

Pour un solénoïde :

$$L = \frac{N\Phi^{un\ tour}}{i} = \frac{NBA}{i} = \frac{N}{l} \underbrace{\left(\mu_0 \frac{Nl}{l} \right)}_B A = \mu_0 \frac{N^2}{l} A \tag{9.6}$$

Note 9.5. $[L] = [M] = \text{Henry } H$

Note 9.6. Si le solénoïde a un noyau magnétique

$$L = \mu_0 \underbrace{K_m}_{\substack{\text{ce facteur} \\ \text{peut être } \gg 1}} \frac{N^2}{l} A$$

avec $K_m = \text{perméabilité magnétique}$.

Note aussi analogie avec la capacité :

$$C = \epsilon_0 \underbrace{K}_{\text{constante diélectrique}} \frac{A}{d}$$

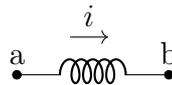
emf (ou tension) à travers un élément avec une self L (‘inducteur’) :

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(iL) = -L\frac{di}{dt} \tag{9.7}$$

Note 9.7. La loi de Lenz impose toujours le signe ‘-’ : L produit une sorte d’inertie qui s’oppose à toute variation de i .

Autrement dit, L cause un délai entre courant et tension, que ce soit pour des variations irrégulières (enclenchement/déclenchement) ou pour des variations périodiques (circuits AC).

Note 9.8. Comme L est souvent sous forme d’un solénoïde, son symbole est $\bullet \text{---} \underbrace{\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---}}_L \text{---} \bullet$



Rappel

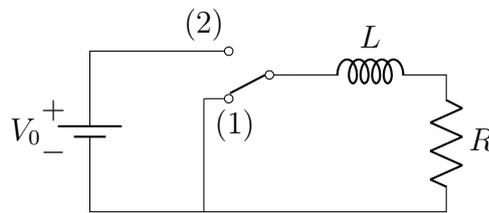
V_L :

$$V_L \equiv -\mathcal{E}_{ind} = V_a - V_b = +L \frac{di}{dt} > 0 \tag{9.8}$$

L ‘essaye’ de réduire i quand i augmente. C’est pour ça qu’on appelle \mathcal{E}_{ind} ‘back emf’. Si i diminue, $L \frac{di}{dt} < 0$, et $V_L < 0$.

Note 9.9. Dans la pratique, une résistance R est toujours associée à L (il est difficile d’avoir un fil en forme solénoïdale sans aucune résistance).

9.2 Circuits RL



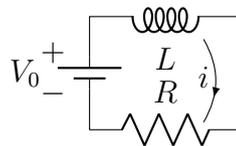
on cherche

$$i(t) = ?$$

$$V_L(t) = ?$$

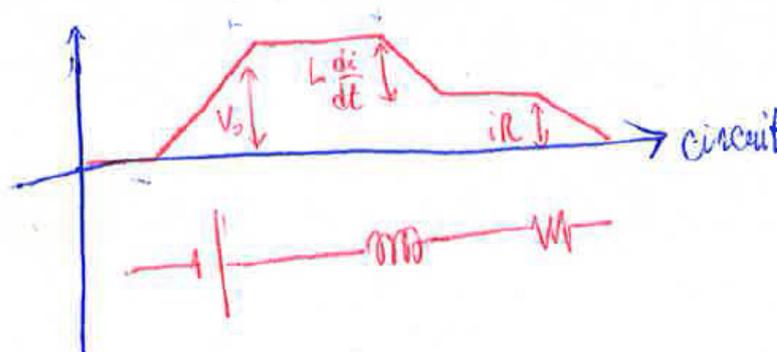
A $t = 0$, $i(t = 0) = 0$

(a) On passe l’interrupteur de la position (1) à la position (2) : on connecte la batterie.



Kirchhoff :

$$V_0 + \mathcal{E}_{ind} = iR \quad ; \quad \mathcal{E}_{ind} = -L \frac{di}{dt} \tag{9.9}$$



$$V_0 = L \frac{di}{dt} + iR \tag{9.10}$$

ou

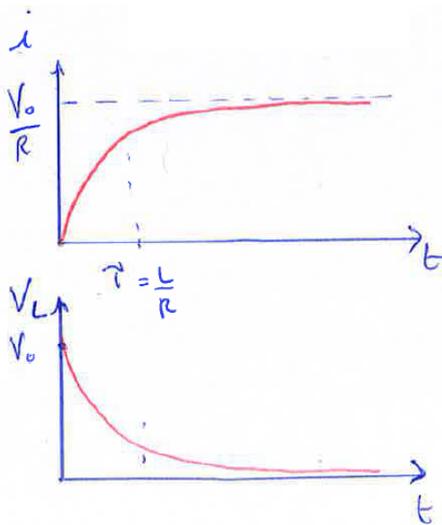
$$\frac{di}{dt} = \frac{V_0 - iR}{L} = -\frac{i - V_0/R}{L/R} \quad ; \quad \text{séparation des variables}$$

$$\frac{di}{i - V_0/R} = -\frac{dt}{L/R} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \ln\left[i(t) - \frac{V_0}{R}\right] \right\}_0^t = -\frac{t}{L/R}$$

$$\frac{i(t) - V_0/R}{i(0) - V_0/R} = e^{-\frac{t}{L/R}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{i(t) = \frac{V_0}{R} \left\{ 1 - e^{-\frac{t}{L/R}} \right\}} \quad (9.11)$$

Le temps caractéristique du problème est donc le paramètre dans l'exponentielle : $\tau = \frac{L}{R}$.
Tension à travers L :

$$V_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{d}{dt} \left[\frac{V_0}{R} \left\{ 1 - e^{-\frac{t}{L/R}} \right\} \right] = -L \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{L/R}} \left(-\frac{R}{L} \right) = V_0 e^{-\frac{t}{L/R}} \quad (9.12)$$



V est grande au début, lorsque la variation de i est grande, et tend à 0 quand le courant ne varie plus.

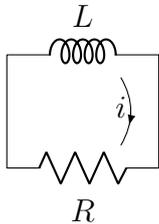
Le courant a 'besoin de temps' pour monter lorsqu'on applique soudainement la tension, et le fait sur l'échelle de temps : $\tau = \frac{L}{R}$.

Note 9.10. R , par contre, donne lieu à dissipation, mais pas à un délai.

On peut imaginer ce qu'il se passe quand on coupe un courant : le circuit essaye de contrer la réduction de courant en générant la 'back emf', donc une grande (si on coupe très rapidement) tension à travers L .

Note 9.11. C'est la 'back emf' qui cause des étincelles [et, par conséquent, même des feux parfois !] quand on retire une prise électrique très rapidement lorsque l'appareil connecté est en fonction. C'est un défi technologique significatif de construire des interrupteurs qui résistent à des variations très rapides sur des gros courants, donc des grandes emf.

Revenons à notre circuit LR , et considérons l'étape (b) : on met l'interrupteur en position (1) : on déconnecte la batterie



$$i(t=0) = \frac{V_0}{R} \quad ; \quad V_L(t=0) = 0 \text{ (juste avant de fermer l'interrupteur)}$$

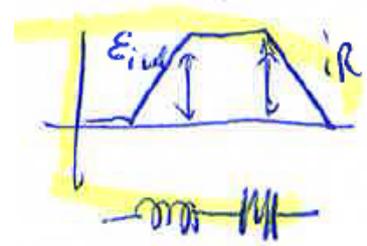
Kirchhoff :

$$\mathcal{E}_{ind} = iR$$

$$-L \frac{di}{dt} = iR$$

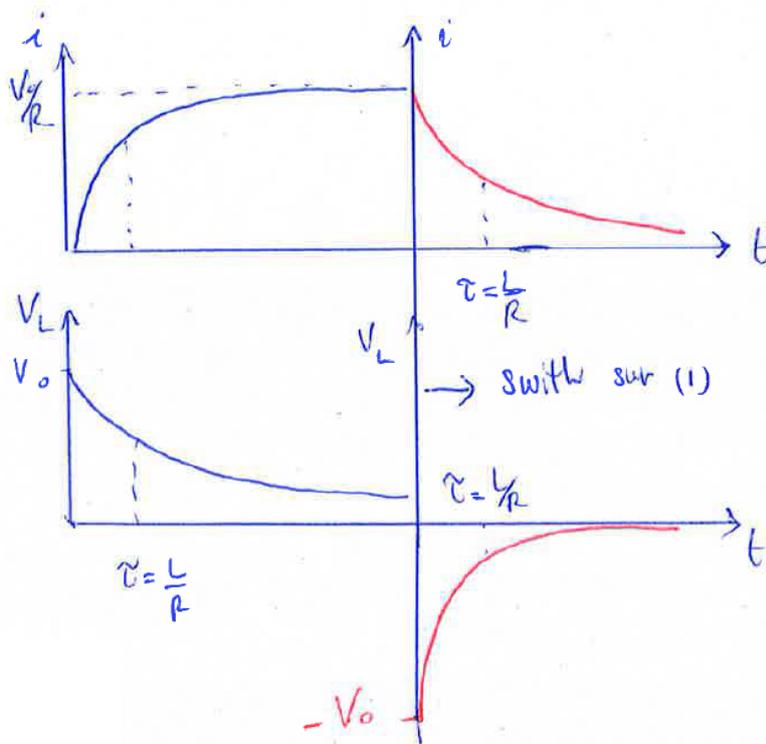
$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i \quad \Rightarrow \quad \text{séparation des variables} \quad \frac{di}{i} = -\frac{dt}{L/R}$$

$$\Rightarrow \quad i(t) = i(0)e^{-\frac{t}{L/R}} = \frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{L/R}} \quad (9.13)$$



Tension à travers L :

$$V_L(t)L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{L/R}} \cdot \left(-\frac{R}{L}\right) = -V_0 e^{-\frac{t}{L/R}} \quad (9.14)$$



A la place de 'switcher' à la main entre (1) et (2), on peut donner une tension carrée (ON/OFF), avec une certaine fréquence.

Naturellement, on peut varier la constante de temps $\tau = L/R$ en variant R et/ou L .

Question : qu'est-ce qu'il se passe si la constante de temps τ devient comparable avec la période de la fonction carrée de la tension ?

→ le courant devient plus 'lisse', et de même pour V_L . Si on augmente la fréquence de la forme d'onde d'entrée (V_0), le circuit n'arrive plus à 'répondre' : les variations rapides de V_0 seront coupées : filtrage passe-bas.

9.3 Énergie magnétique

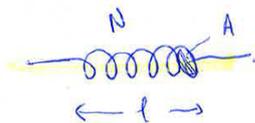
Note 9.12. Cet effet de filtrage est similaire à celui qu'on a déjà vu pour un circuit RC. Dans le cas de C, on a vu qu'il s'agit d'un 'stockage' de charge, et surtout d'énergie dans la forme d'énergie du champ électrique.

C'est justement ce 'stockage' d'énergie qui produit un effet de filtrage (passe-bas).

Est-ce que quelque chose de similaire se passe pour L ?

	C		L	
stocke		q/champ \vec{E}		courant/champ \vec{B}
énergie		$\frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$?
densité d'énergie		$\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$?

← essayons de trouver ces éléments, en partant du cas paradigme : solénoïde



$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} A$$

Puissance dans L :

$$P_L = \frac{dU_L}{dt} = |\mathcal{E}i| = L \frac{di}{dt} i = \frac{1}{2} L \frac{d}{dt} (i^2) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) \tag{9.15}$$

$$\Rightarrow \boxed{U_L = \frac{1}{2} Li^2} \tag{9.16}$$

Dans notre solénoïde :

$$U_L = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \overbrace{\left(\mu_0 \frac{N^2}{l} A \right)}^L i^2 \tag{9.17}$$

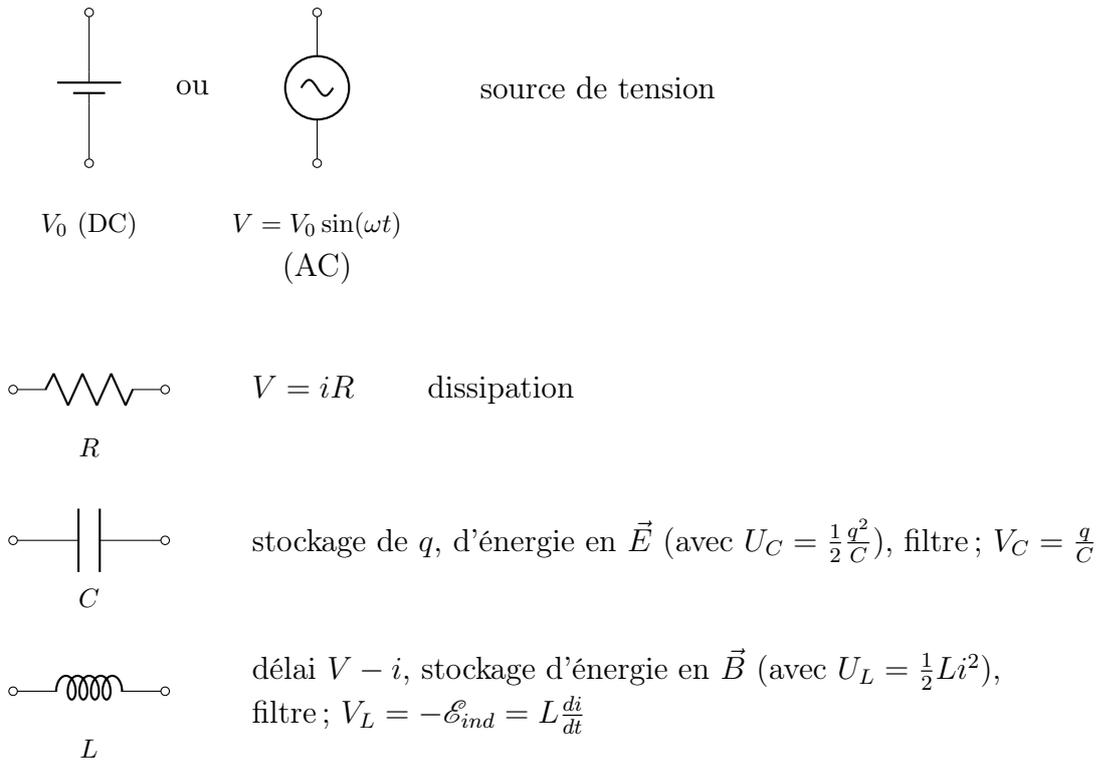
mais $B = \mu_0 \frac{N}{l} i$, donc $i = \frac{Bl}{\mu_0 N}$

$$\Rightarrow U_L = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2}{l} A \underbrace{\left(\frac{B^2 l^2}{\mu_0^2 N^2} \right)}_{i^2} = \frac{1}{2} Al \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0} (\text{volume}) B^2$$

Densité d'énergie

$$\boxed{\frac{dU_L}{d(\text{volume})} = \frac{1}{2\mu_0} B^2} \quad (9.18)$$

Résumé des composants des circuits que nous avons vus jusque là



Note 9.13. C : $V_C = \frac{Q}{C} = \frac{\int idt}{C}$: la tension à travers C est l'intégrale du courant \rightarrow intégrateur.

L : $V_L = -L \frac{di}{dt}$: la tension à travers L est la dérivée du courant \rightarrow différentiateur

Ces deux propriétés sont très utiles pour les circuits électroniques.

9.4 Circuits AC et impédance complexe

Circuits à courant alternatif (AC)

Représentation complexe

$$V(t) = V_0 e^{i\omega t} = V_0 \cos \omega t + iV_0 \sin \omega t \quad (9.19)$$

On peut considérer la tension "vraie", ou "**physique**", comme la partie imaginaire de la tension complexe (on pourrait aussi choisir la partie réelle, selon notre choix de convention pour la phase).

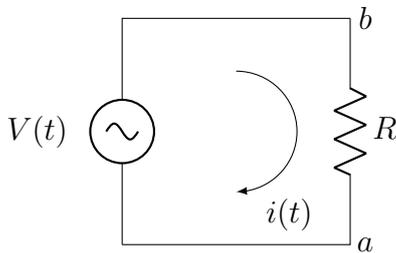
Cette représentation simplifie énormément les calculs, parce que les équations différentielles deviennent de facto des équations algébriques.

Dans ce contexte, on définit l'impédance d'un élément

$$Z = \frac{V(t)}{i(t)} \quad (Z \in \mathbb{C}) \tag{9.20}$$

(c'est une généralisation du concept de résistance).

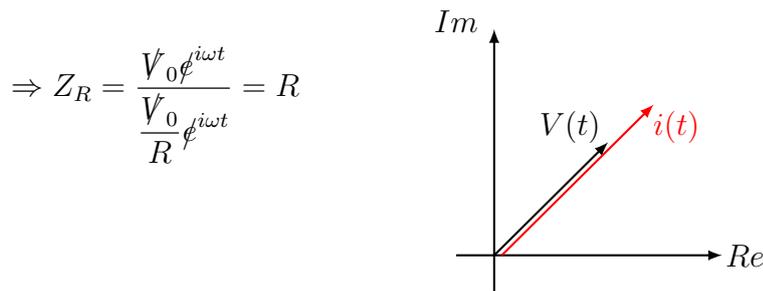
1. Pour une **résistance R** :  (dissipation)



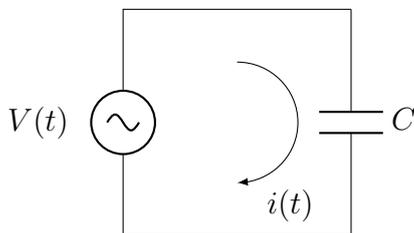
$$V(t) - Ri(t) = 0 \tag{9.21}$$

$$V_0 e^{i\omega t} - Ri(t) = 0 \tag{9.22}$$

$$i(t) = \frac{V_0}{R} e^{i\omega t} \tag{9.23}$$



2. **Condensateur C** :  (stockage charge et énergie électrique)

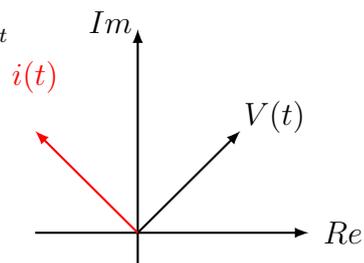


$$V(t) - \frac{Q(t)}{C} = 0 \tag{9.24}$$

$$Q(t) = CV(t) \tag{9.25}$$

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C \frac{dV(t)}{dt} = C \frac{d}{dt}(V_0 e^{i\omega t}) = CV_0 i\omega e^{i\omega t} \tag{9.26}$$

$$\Rightarrow \left[Z_C \equiv \frac{V_0 e^{i\omega t}}{CV_0 i\omega e^{i\omega t}} = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C} \right] \tag{9.27}$$



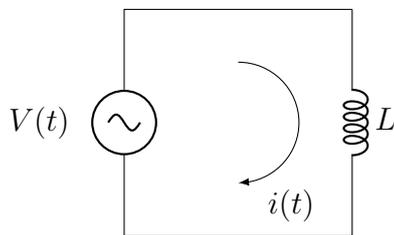
Note 9.14. Attention à ne pas confondre le courant $i(t)$ avec l'unité imaginaire i .

On peut écrire $i(t) = i\omega CV_0 e^{i\omega t} = e^{i\frac{\pi}{2}} \omega CV_0 e^{i\omega t} = \omega CV_0 e^{i\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}$

↑
le courant a une avance de phase de $\frac{\pi}{2}$ (90°)

[Il faut d'abord un courant pour charger la capacité et créer une tension.]

3. **Inducteur L** :  (stockage énergie magnétique)



$$V(t) - L \frac{di(t)}{dt} = 0 \quad (9.28)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{V}{L} = \frac{V_0}{L} e^{i\omega t} \quad (9.29)$$

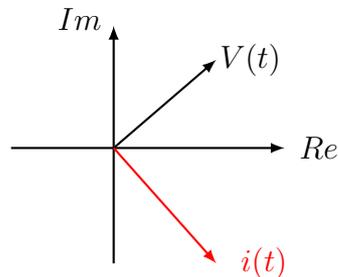
$$\Rightarrow i(t) = \int di = \int \frac{di}{dt} dt = \frac{V_0}{i\omega L} e^{i\omega t} = -\frac{iV_0}{\omega L} e^{i\omega t} = \frac{V_0}{\omega L} e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{i\omega t} = \frac{V_0}{\omega L} e^{i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

↑
le courant a un retard de phase de $\frac{\pi}{2}$ (90°)

(9.30)

[Loi de Lenz : “inertie” par rapport aux variations...]

$$\text{Impédance } Z_L = \frac{V_0 e^{i\omega t}}{\frac{V_0}{i\omega L} e^{i\omega t}} = i\omega L \quad (9.31)$$



Note 9.15. Un des grands avantages de cette représentation avec nombres complexes et impédances est que les impédances se combinent comme des résistances ($\sum Z_i = Z_{tot}$ en série, et $\left[\sum \frac{1}{Z_i}\right]^{-1} = Z_{tot}$ en ||).

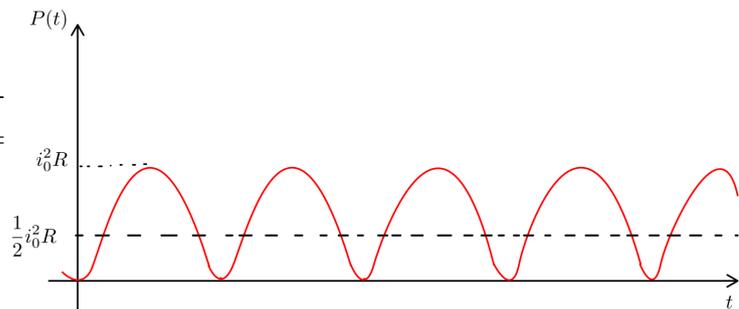
9.5 Puissance dans circuits AC

$$V = V_0 \sin \omega t \quad (\sim), \text{ ou } \boxed{V_0 e^{i\omega t}}$$

Naturellement, la tension oscille entre $+V_0$ et $-V_0$, et le courant entre $+i_0$ et $-i_0$. Ces valeurs sont appelées ‘valeurs de pic’.

$$\text{Considérons } R : \quad \text{---}\text{---}\text{---} \left\{ \begin{array}{l} V = V_0 \sin \omega t \\ i = i_0 \sin \omega t \end{array} \right.$$

A travers une résistance R , la puissance instantanée sera $P = i^2 R = i_0^2 R \sin^2 \omega t$.



Dans la plupart des applications, ce qui compte est la puissance moyenne sur le temps.

$$\text{puissance moyenne} \quad \bar{P} = \text{moyenne de } (i_0^2 R \sin^2 \omega t) = \overline{i_0^2 R \sin^2 \omega t} = i_0^2 R \overline{\sin^2 \omega t}$$

$$\text{Comme } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \forall \alpha \Rightarrow 1 = \overline{\sin^2 \omega t} + \overline{\cos^2 \omega t} = 2 \overline{\sin^2 \omega t}$$

(car la moyenne de \sin^2 et de \cos^2 sont identiques, vu que les deux courbes sont juste décalées)

$$\overline{\sin^2 \omega t} = \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2}, \text{ et}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{P} = \frac{1}{2} i_0^2 R} \quad (9.32)$$

Comme

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{V_0^2}{R} \sin^2 \omega t \Rightarrow \boxed{\bar{P} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R}} \quad (9.33)$$

Donc, ce qui est important pour calculer la puissance est la moyenne de i^2 et V^2 .

En considérant les valeurs quadratiques moyennes (‘root mean square’ en anglais)

$$i_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{i^2}} = \frac{i_0}{\sqrt{2}}; \quad V_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{V^2}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}; \quad (9.34)$$

$$\Rightarrow \bar{P} = i_{\text{rms}}^2 R = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R} \quad (9.35)$$

Donc, en AC, les valeurs ‘rms’ correspondent aux ‘vraies’ valeurs en DC, et c’est pour ça qu’elle sont spécifiées dans les applications pratiques.

Par ex., lorsqu’on on dit que la tension de notre réseau électrique suisse (ou dans les pays autour) est de 230 V, ce qu’on entend est que $V_{\text{rms}} = 230 \text{ V} \Rightarrow V_0 = \sqrt{2}V_{\text{rms}} \cong 325 \text{ V}$.

Note : il y a le choix entre bi-phase, mono-phase, tri-phase... En Europe : 230V est la tension entre ‘phase’ et ‘neutre’ ; dans le réseau triphase, entre phases il y a 400 V.

Note 9.16. Dans une résistance, V et i sont en phase, donc on doit faire la moyenne de $\sin^2 \omega t$ (ou $\cos^2 \omega t$). Dans le cas de C et L , V et i ont un déphasage de $\pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \bar{P} \propto \overline{\sin \omega t \cos \omega t} = 0$. Il n’y a pas de dissipation dans les condensateurs et dans les inducteurs (idéaux) !

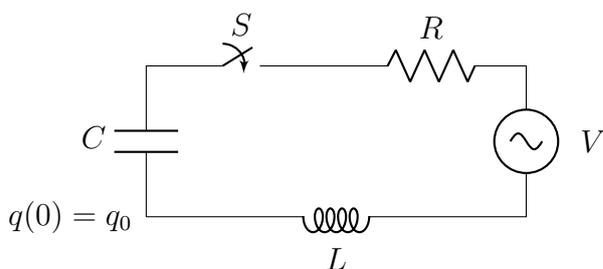
9.6 Circuits RLC et introduction aux oscillations électromagnétiques

Combinons maintenant les éléments de base des circuits dans un circuit complet : **circuit RLC**.

On analysera d’abord les cas dépendant du temps (évolution temporelle à partir d’une condition initiale donnée), puis celui d’un courant et d’une tension AC.

Circuit RLC : évolution temporelle

On charge un condensateur et on ferme le circuit.



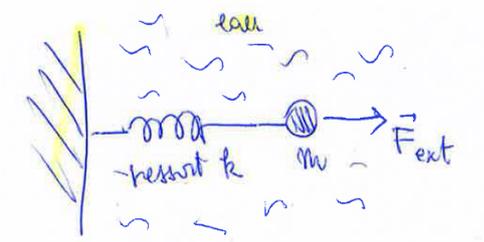
At $t = 0$, $q(t = 0) = q_0$, et on ferme l’interrupteur S .

$$\text{Loi de Kirchhoff :} \quad V - \frac{q(t)}{C} - Ri(t) - L \frac{di}{dt} = 0 \quad (9.36)$$

$$\text{Comme } i = \frac{dq}{dt} : \quad V - \frac{q(t)}{C} - R \frac{dq}{dt} - L \frac{d^2q}{dt^2} = 0, \text{ ou} \quad (9.37)$$

$$L \frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{1}{C}q - R \frac{dq}{dt} + V \quad \begin{array}{l} \text{équation différentielle} \\ \text{de 2}^{\text{ème}} \text{ degré} \end{array} \quad (9.38)$$

Analogie mécanique : ressort dans liquide visqueux (ex. eau), avec une force externe, F_{ext}



$$m \underbrace{\frac{d^2x}{dt^2}}_{\text{inertie}} = \underbrace{-kx}_{\text{ressort}} - \underbrace{f \frac{dx}{dt}}_{\text{frottement}} + \underbrace{F_{\text{ext}}}_{\text{forçage}} \quad (9.39)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ L \frac{d^2q}{dt^2} & = & -\frac{1}{C}q & - & R \frac{dq}{dt} & + & V \quad (9.40) \end{array}$$

Pour résoudre l'équation différentielle, on réarrange les termes (en prenant $V = 0$)

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0, \quad (9.41)$$

et on fait l'hypothèse que la solution ait la forme $q(t) = Ae^{at}$

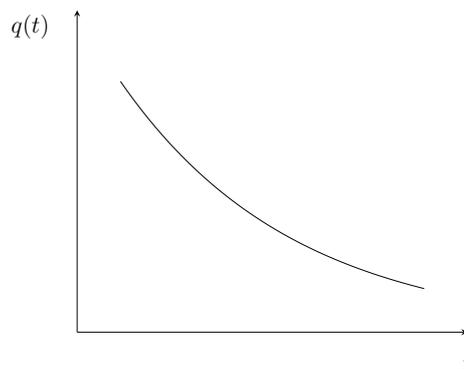
$$\Rightarrow Aa^2 e^{at} + \frac{R}{L} Aa e^{at} + \frac{1}{LC} A e^{at} = 0 \quad (9.42)$$

$$\Rightarrow a^2 + \frac{R}{L}a + \frac{1}{LC} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{1,2} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}}{2} \quad (9.43)$$

La solution aura la forme $q(t) = A_1 e^{a_1 t} + A_2 e^{a_2 t}$. Le comportement est déterminé par le signe du terme $\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}$

1. Cas "sur-amorti" $\boxed{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} > 0} \Rightarrow a_1 \text{ et } a_2 \text{ sont négatifs}$

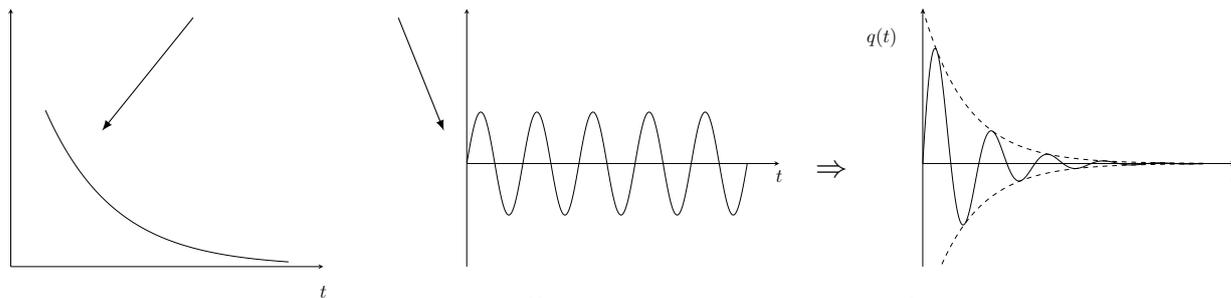
$$a_1 = -\frac{R}{2L} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}} < 0 \quad \text{et} \quad a_2 = -\frac{R}{2L} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}} \quad (9.44)$$



Donc on a une décroissance exponentielle (deux exponentielles décroissantes combinées).

2. Cas “sous-amorti” $\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} < 0$ $a_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{i}{2} \sqrt{\left| \frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} \right|}$

$$\Rightarrow q(t) = q_0 \underbrace{e^{-\frac{R}{2L}t}}_{\text{amortissement}} \underbrace{e^{\pm \frac{i}{2} \sqrt{\left| \frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} \right|} t}}_{\text{oscillation, avec fréquence angulaire}} \tag{9.45}$$



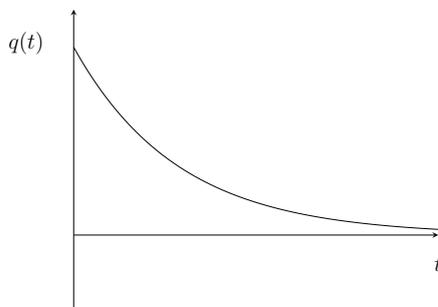
amortissement

oscillation, avec fréquence angulaire

$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\left| \frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} \right|}; \text{ période } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

3. Cas limite “amortissement critique” $\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = -\frac{R}{2L}$

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \tag{9.46}$$



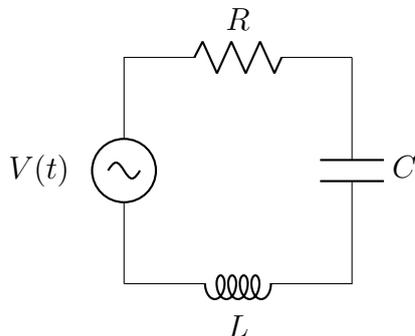
Considérons maintenant le cas AC (en état stationnaire).

Nous pouvons donc utiliser le formalisme complexe et les impédances (complexes) des différents éléments. On se rappelle du fait que les impédances se somment comme des résistances.

Circuit RLC en AC

$V(t)$ est imposé : $V(t) = V_0 \sin(\omega t) = \text{Im}(V_0 e^{i\omega t})$, ou, en notation complexe, $V_0 e^{i\omega t}$

Les éléments sont en série, donc :

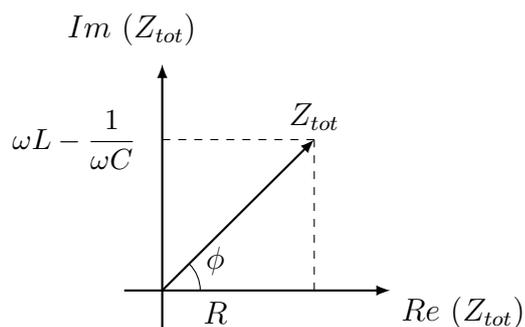


$$\begin{aligned} Z_{\text{tot}} &= Z_R + Z_C + Z_L = \\ &= R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L = \\ &= R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \end{aligned}$$

$$i(t) = \frac{V(t)}{Z_{\text{tot}}} = \frac{V(t)}{R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} \quad (9.47)$$

$$Z_{\text{tot}} = |Z_{\text{tot}}| e^{i\phi} \text{ avec } \begin{cases} |Z_{\text{tot}}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \\ \phi = \arctan \left[\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right] \end{cases} \quad (9.48)$$

Graphiquement



$$\tan(\phi) = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

On peut écrire $i(t)$ comme

$$i(t) = \frac{V_0 e^{i\omega t}}{|Z_{\text{tot}}|} e^{-i\phi} = \frac{V_0 e^{i\omega t} e^{-i \arctan \left[\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right]}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} = i_0(\omega) e^{i\omega t} e^{-i\phi} \quad (9.49)$$

Trois points limites sont particulièrement intéressants :

$$(1) \quad \omega \rightarrow 0 \Rightarrow i(t) \sim \frac{V_0 e^{i\omega t} e^{-i \arctan(-\frac{1}{\omega RC})}}{\sqrt{\frac{1}{(\omega C)^2}}} = V_0 e^{i\omega t} \omega C e^{-i \overbrace{\arctan(-\infty)}^{-\frac{\pi}{2}}} = V_0 e^{i\omega t} \omega C e^{i\frac{\pi}{2}} \tag{9.50}$$

le condensateur domine le comportement du circuit

$$(2) \quad \omega \rightarrow \infty \Rightarrow i(t) \sim \frac{V_0 e^{i\omega t} e^{-i \arctan(+\infty)}}{\omega L} = V_0 e^{i\omega t} \frac{1}{\omega L} e^{-i\frac{\pi}{2}} \tag{9.51}$$

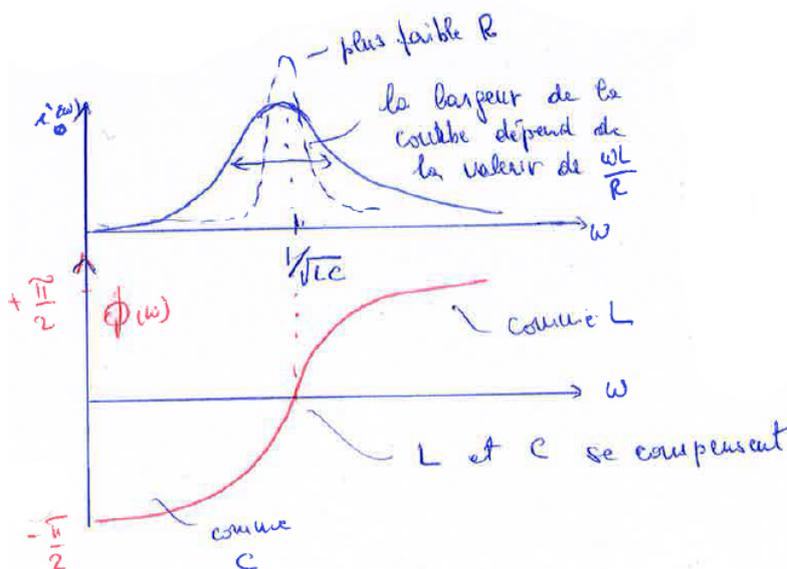
l'inducteur domine le comportement du circuit

$$(3) \quad \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad \text{“résonance”} \tag{9.52}$$

$$i(t) = \frac{V_0 e^{i\omega t} e^{-i \arctan(0)}}{R} = \frac{V_0 e^{i\omega t}}{R} \tag{9.53}$$

la résistance domine le comportement du circuit

Graphiquement



La réponse maximale (max. courant pour tension donnée) est obtenue pour

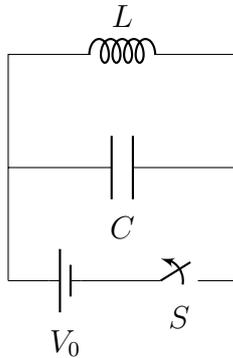
$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

“fréquence de résonance”

Ces circuits RLC, avec leur comportement dynamique (oscillations, changement de caractéristiques entre capacitatives, inductives et résistives selon la fréquence, déphasages etc.) ont beaucoup d’applications pratiques. Mais ils ont aussi un rôle fondamental dans l’avancement de notre connaissance des phénomènes électromagnétiques.

Oscillations électromagnétiques

Considérons la dépendance du temps dans un circuit simple LC, sans dissipation ($R = 0$).



$$\text{Conditions initiales } \begin{cases} q(t=0) = CV_0 = q_0 \\ i(t=0) = 0 \end{cases}$$

on charge le condensateur, puis on déconnecte la source de tension V_0 [on ouvre le interrupteur S].

$$\text{Kirchhoff : } \boxed{L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0} \quad \text{c'est un oscillateur harmonique! } \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \right) \quad (9.54)$$

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0} \quad \text{la fréquence propre de l'oscillateur est } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (9.55)$$

comme déjà trouvé.

ω_0 est la fréquence d'oscillation naturelle du système. C'est une propriété intrinsèque du circuit, pas imposée de l'extérieur. Naturellement quand on a une force externe qui varie avec la même fréquence, on obtient une réponse maximale (résonance).

Question : qu'est-ce qui oscille dans le circuit ?

Solution générale

$$q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t - \phi) \quad (9.56)$$

[Note : on n'a pas imposé une source AC!]

$$\text{conditions initiales } \begin{cases} q(0) = q_0 \cos(-\phi) = CV_0 = q_0 \\ \frac{dq}{dt}(0) = -q_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t - \phi) = 0 \Rightarrow \phi = 0 \end{cases} \quad (9.57)$$

$$\Rightarrow \text{solution spécifique } \boxed{q(t) = CV_0 \cos(\omega_0 t)} \quad (9.58)$$

$$i(t) = -CV_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) \quad (9.59)$$

$$\text{Énergie (instantanée)} \quad U_C(t) = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C^2 V_0^2 \cos^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2} C V_0^2 \cos^2(\omega_0 t) \quad (9.60)$$

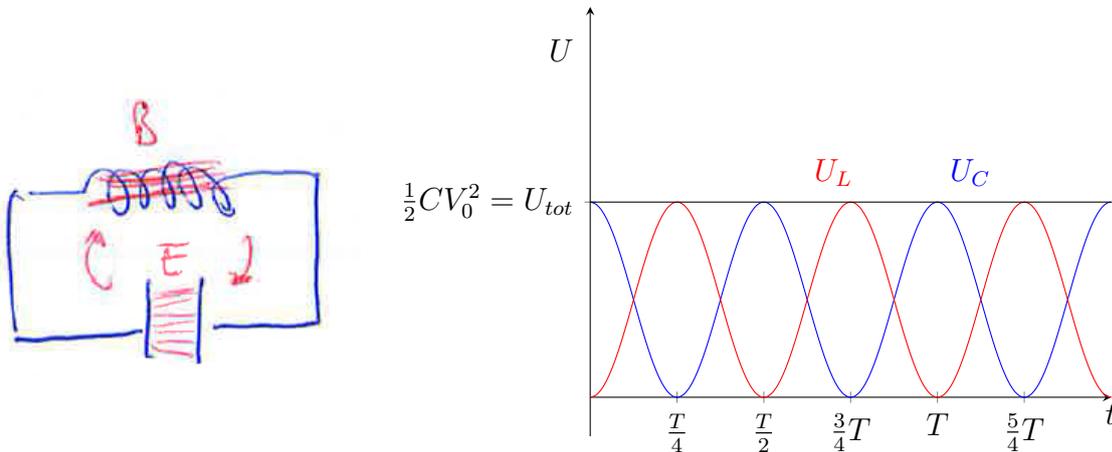
$$U_L(t) = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L C^2 V_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t) = \left(\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \right)$$

$$= \frac{1}{2} L C^2 V_0^2 \frac{1}{LC} \sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2} C V_0^2 \sin^2(\omega_0 t) \quad (9.61)$$

A tout instant t :

$$U_{\text{tot}}(t) = U_C(t) + U_L(t) = \frac{1}{2} C V_0^2 \cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2} C V_0^2 \sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2} C V_0^2 = \underline{\underline{\text{const.}}} \quad (9.62)$$

Donc $U_{\text{tot}}(t)$ est toujours égale à l'énergie stockée au début dans C . Naturellement, comme on a supposé $R = 0$, aucune énergie n'est dissipée. L'énergie 'rebondit' entre L et C , donc entre \vec{B} et \vec{E} . Ce sont les champs \vec{B} et \vec{E} qui oscillent.

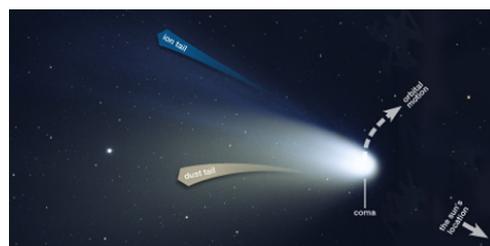
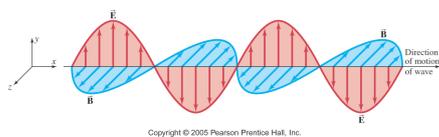
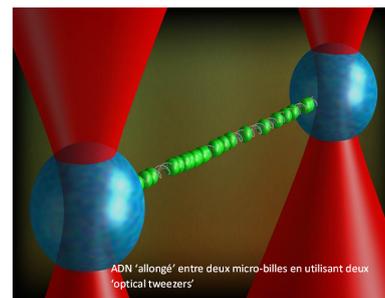
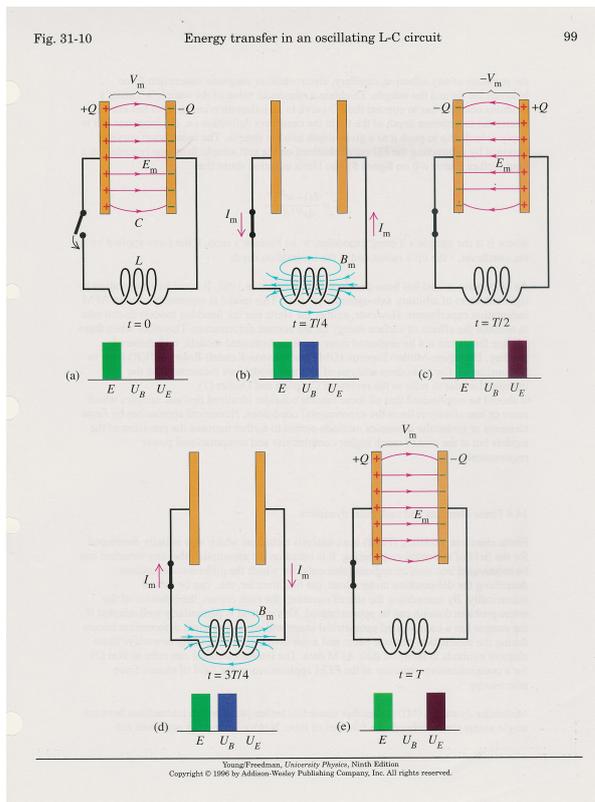


Cette idée de l'échange continu d'énergie entre \vec{E} et \vec{B} est fondamentale. En effet, la question est : avons-nous besoin d'un circuit réel (matériel) pour avoir cette oscillation et cet échange continu d'énergie entre \vec{E} et \vec{B} ?

La réponse est 'non' ! On peut l'avoir dans l'espace, même dans le vide \rightarrow oscillations et ondes électromagnétiques.

Chapitre 10

Equations de Maxwell et ondes électromagnétiques



10.1 Oscillations électromagnétiques

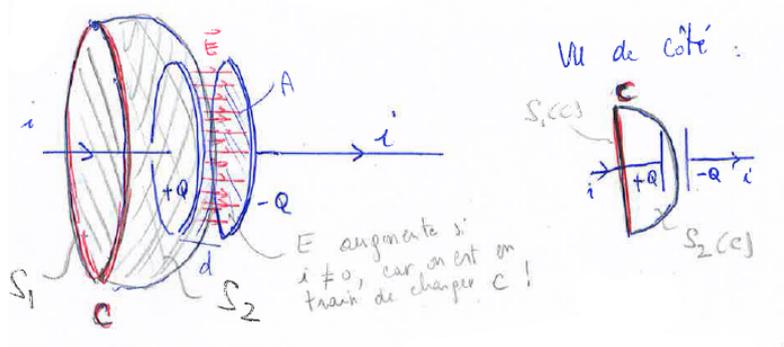
Nous sommes prêts pour mettre ensemble ce que nous avons appris sur l'électromagnétisme et voir comment un modèle complet peut nous amener à la découverte des ondes... donc à la lumière.

Rappel sur ce que nous savons de \vec{E}, \vec{B} :

\vec{E}	\vec{B}	
$\vec{F} = q\vec{E}$	$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$	← effet produit par le champ
$\oint_{S \text{ fermé}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{en S}}{\epsilon_0}$	$\oint_{S \text{ fermé}} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$	← pas des charges magnétique libres
Relation $\vec{E} \Leftrightarrow \vec{B}$		
$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = ?$	$-\frac{d}{dt} \oint_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{A}$	← 'manque' le 'courant' de charges magnétiques [car il n'y a pas de charges magnétiques libres]
$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{entouré en } C}$	$+ ?$	← manque le flux de \vec{E} pour avoir une symétrie
\uparrow i qui perce la surface $S(C)$		

Cette idée de chercher une symétrie entre \vec{E} et \vec{B} est venue du génie de Maxwell (~ 1860– 70). En plus de remarquer un manque de symétrie pour les flux de \vec{E} et \vec{B} , Maxwell remarque un paradoxe avec la charge d'un condensateur, apparemment incohérent avec la loi d'Ampère.

Problème de la charge d'un condensateur ($i = const.$; mais la charge, donc E , augmente)



les surfaces (ouvertes) S_1 et S_2 'reposent' sur la même boucle fermée C .

$$\begin{aligned} \text{Ampère :} \quad & \text{avec } S_1 : \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{entouré en } S_1} = \mu_0 i \Rightarrow B \neq 0 \text{ sur } C \\ & \text{avec } S_2 : \oint_C \underbrace{\vec{B} \cdot d\vec{l}}_{=B2\pi r} = \mu_0 i_{\text{entouré en } S_2} = 0 \Rightarrow B = 0 \text{ sur } C \end{aligned}$$

Les deux donnent deux résultats différents ! Comment est-ce possible ? Qu'est-ce qu'il y a de spécial entre les plaques de C ?? \Rightarrow un champ électrique qui change (même si $i = \text{const.}$).

10.2 Courant de déplacement

Idée de Maxwell : il doit y avoir un autre type de courant, et pour respecter les symétries $\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$, ça devrait être lié au flux de \vec{E} (en particulier, à sa variation - dans ce cas, son augmentation). Il ne s'agit pas d'un courant dans le sens qu'il y a un mouvement 'physique' de charges qui se déplacent sur un conducteur, mais c'est un courant dans le sens qu'il y a une variation de q dans le temps, $i_D = \frac{dq}{dt}$. Calculons i_D

$$i_D = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(CV) = C \frac{dV}{dt} \quad (i_D : \text{"courant de déplacement"}) \quad (10.1)$$

mais $\frac{V}{d} = E$, et, pour un condensateur à deux faces parallèles, comme dans le dessin, $C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$

$$\Rightarrow i_D = C \frac{dV}{dt} = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \frac{d}{dt}(E d) = \varepsilon_0 A \frac{dE}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt}(EA) = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (10.2)$$

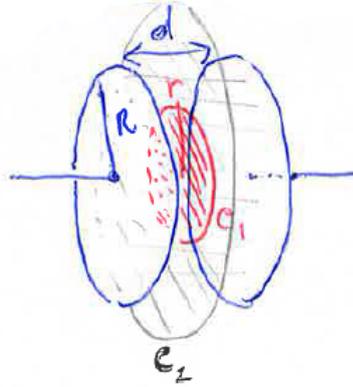
Voilà ce qui manquait ! Donc

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{entouré}} + \mu_0 i_D = \mu_0 i_{\text{entouré}} + \underbrace{\mu_0 \varepsilon_0}_{\text{const.} = \frac{1}{c^2}} \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (10.3)$$

Cette construction a l'air purement mathématique. Comment peut-on se convaincre de l'existence de i_D ?

\rightarrow en mesurant les conséquences de i_D , notamment le champ magnétique créée par i_D , et le comparant avec la valeur calculée.

Calcul de B produit par le courant de déplacement i_D



$B = ?$

Ampère (avec i_D)

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \underbrace{i_{\text{entouré}}}_{=0} + \mu_0 i_D = \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi_E}{dt}$$

(a) $r < R$

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= B 2\pi r = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} (E \pi r^2) = \frac{\pi r^2}{c^2} \frac{dE}{dt} \\ &= \frac{\pi r^2}{c^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{V}{d} \right) = \frac{\pi r^2}{c^2 d} \frac{dV}{dt} \end{aligned} \tag{10.4}$$

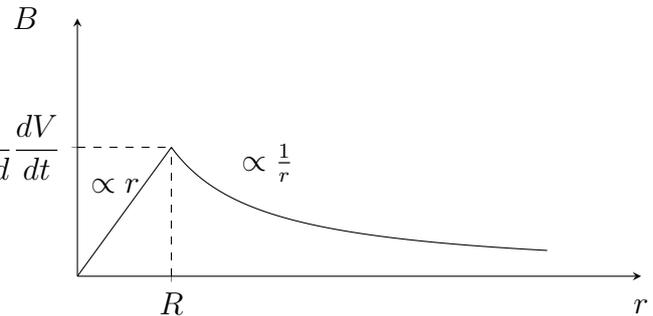
$$\Rightarrow \text{on trouve } B = \frac{\pi r^2}{c^2 d} \frac{dV}{dt} \frac{1}{2\pi r} = \frac{r}{2c^2 d} \frac{dV}{dt} \tag{10.5}$$

(b) $r \geq R$

$$\begin{aligned} \oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= B 2\pi r = \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} (E \pi R^2) = \\ &= \frac{\pi R^2}{c^2 d} \frac{dV}{dt} \end{aligned} \tag{10.6}$$

↑
car en dehors des plaques du condensateur le champ $E = 0$

$$\Rightarrow B = \frac{\pi R^2}{c^2 d} \frac{dV}{dt} \frac{1}{2\pi r} = \frac{R^2}{2rc^2 d} \frac{dV}{dt} = \frac{R}{2c^2 d} \frac{dV}{dt} \tag{10.7}$$



Ce champ est réel et peut être mesuré!

Note 10.1. Le concept de courant de déplacement permet en effet d'appliquer les règles de Kirchhoff (en particulier, celle des noeuds) en présence de condensateurs C . Si non, comment pourrait-on avoir un courant "à travers" un condensateur ?

En effet, un "vrai" courant rentre d'un côté (un courant "de conduction" qui amène des charges), et un courant de déplacement sort de l'autre.

10.3 Équations de Maxwell en forme intégrale et différentielle

Voici la vision complète des champs électriques et magnétiques $\vec{E}(\vec{x}, t)$, $\vec{B}(\vec{x}, t)$, décrit par les équations de Maxwell en forme intégrale :

$$\oint_{S_{\text{fermé}}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{en } S}}{\varepsilon_0}; \quad \oint_{S_{\text{fermé}}} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0; \quad (10.8)$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_{S_C} \vec{B} \cdot d\vec{A}; \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{entouré}} + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_{S_C} \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (10.9)$$

Note 10.2. La loi d'Ampère généralisée est valable aussi dans un milieu (matériau) magnétique : μ_0 doit juste être remplacé par μ (perméabilité relative du matériau).

Note 10.3. La loi d'Ampère généralisée est valable aussi dans l'espace vide, où il ne peut y avoir aucun courant de conduction. Ceci a des implications très profondes : \vec{E} et \vec{B} sont liés partout, y compris dans le vide, pour autant qu'ils varient dans le temps !

L'échange d'énergie entre \vec{E} et \vec{B} peut se faire sans un circuit matériel (ex. LC), et peut donner lieu à la propagation d'ondes, c'est à dire des perturbations qui se propagent à vitesse constante, en général sans changer de forme. Ces perturbations transportent de l'énergie, de la quantité de mouvement, de l'information, mais en général pas de masse. Essayons de trouver la forme différentielle des équations de Maxwell, et à partir de ça les équations des ondes électromagnétiques.

Pour ça, nous avons besoin de deux théorèmes mathématiques :

1. Théorème de Gauss ou de la divergence

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{V(S)} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV \quad (10.10)$$

↑
volume correspondant à la surface fermée S

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \text{ ou } \text{div}(\vec{E}) \quad \text{“divergence de } \vec{E}\text{”} \quad (10.11)$$

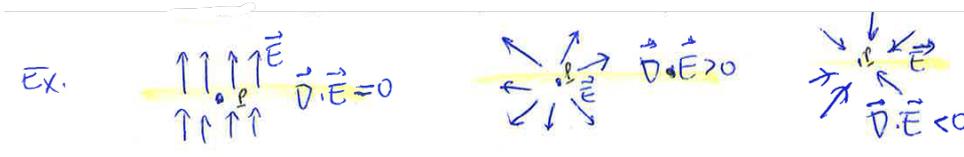
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}; \quad \text{c'est un “flux par unité de volume”} \quad (10.12)$$

Note 10.4. $\vec{\nabla}$ est un opérateur, mais dans la pratique peut être traité comme un vecteur : $\vec{\nabla} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\} \cdot \{E_x, E_y, E_z\} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (10.13)$$

$\vec{\nabla}$ est ‘prêt’ à être appliqué à n'importe quel champ vectoriel.

Note 10.5. $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ mesure effectivement le degré de divergence du vecteur \vec{E} en un point donné (P).



2. Théorème de Stokes

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{S(C)} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} \tag{10.14}$$

↑
surface correspondante au circuit fermé C

$\vec{\nabla} \times \vec{B}$ ou curl(\vec{B}) ‘curl of \vec{B} ’ en anglais, ou ‘rotationnel de \vec{B} ’ en français

(10.15)

$\vec{\nabla} \times$ est une sorte d’intégrale de boucle par unité de surface.

(10.16)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{x} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right)$$

(10.17)

- $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ mesure à quel point \vec{B} “s’enroule” au tour du point considéré. Ex.



Rappel $\vec{\nabla} \cdot$ et $\vec{\nabla} \times$ sont des opérateurs différentiels.

- Nous sommes prêts à manipuler les équations de Maxwell en forme intégrale.

1. Loi de Gauss

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} \stackrel{\text{théorème de la divergence}}{=} \int_{V(S)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV = \frac{Q_{\text{en S}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V(S)} \rho dV \quad (10.18)$$

avec $\rho = \frac{dq}{dV}$ densité de charge ; en général $\rho = \rho(\vec{x}, t)$

$$\Rightarrow \int_{V(S)} \left\{ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right\} dV = 0 \quad \text{pour tout volume } V(S) \quad (10.19)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (10.20)$$

Cette équation met en relation le champ électrique \vec{E} et sa source, la densité de charge ρ .

2. Lois du flux de \vec{B} (n'a pas de nom particulier...)

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{V(S)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dV = 0 \quad \text{pour tout } V(S) \quad (10.21)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0} \quad (10.22)$$

Cette équation indique la propriété de \vec{B} de ne pas avoir de 'charges' libres

3. Loi de Faraday

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \stackrel{\text{théorème de Stokes}}{=} \int_{S(C)} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = \quad (10.23)$$

$$= -\frac{d}{dt} \int_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = - \int_{S(C)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \quad (10.24)$$

note : $\frac{d}{dt} \Phi_B$ devient $\frac{\partial}{\partial t}$ pour \vec{B} , car $\vec{B} = B(\vec{x}, t)$

$$\Rightarrow \int_{S(C)} \left\{ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \text{pour tout } S(C) \quad (10.25)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad \text{cette équation lie } \vec{E} \text{ et } \vec{B} \text{ directement} \quad (10.26)$$

4. Loi d'Ampère

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} \stackrel{\text{th. de Stokes}}{=} \oint_{S(C)} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} = \mu_0 i + \overbrace{\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_{S(C)} \vec{E} \cdot d\vec{A}}^{\mu_0 i_D} \quad (10.27)$$

$$\parallel \parallel$$

$$\mu_0 i = \mu_0 \int_{S(C)} \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad \frac{1}{c^2} \int_{S(C)} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

$$\text{Donc } \int_{S(C)} \left\{ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \vec{J} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \text{pour tout } S(C) \quad (10.28)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \quad (10.29)$$

Cette équation relie \vec{B} à sa source, \vec{J} , et au champ \vec{E} (dont la variation dans le temps aussi produit un champ \vec{B}).

Résumé

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; & \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

- \vec{E} et \vec{B} sont couplés.
- Les sources des champs sont ρ et \vec{J} .

10.4 Ondes électromagnétiques à partir des équations de Maxwell

Considérons le système de Maxwell dans le vide : $\begin{cases} \rho = 0 \\ \vec{J} = 0 \end{cases}$ (pas de source \Leftrightarrow pas de charges)

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0; & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; & \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Combien d'équations ? 2 scalaires + 2 vectorielles $\Rightarrow 2 + 2 \times 3 = 8$

Combien d'inconnus? $E_x, E_y, E_z; B_x, B_y, B_z \Rightarrow 6$

\Rightarrow système "sur-déterminé"!

Mais les 8 équations ne sont en effet pas toutes indépendantes :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = 0 \quad \text{toujours, et} \quad \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E})}_{=0} = -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}_{=0} = 0$$

La même chose pour $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = 0$

Pour résoudre le système, choisissons une géométrie simple. Supposons que les champs varient uniquement le long de z :

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{E} = \vec{E}(z, t) \\ \vec{B} = \vec{B}(z, t) \end{cases}$$

$$1. \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_z = \text{const.} \quad (10.30)$$

Mais je ne peux pas avoir $E_z = \text{const.} \neq 0$ partout, car cela correspondrait à une énergie infinie : $U_E = \int \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$

Donc $E_z = \text{const.} = 0 \Rightarrow$ ondes transversales!

$$2. \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{même raisonnement que pour } E_z \quad (10.31)$$

$$B_z = \text{const.} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{ondes transversales!} \quad (10.32)$$

$$3. \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (10.33)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = \hat{x} \left(-\frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (10.34)$$

$$\text{On peut écrire} \quad \left\{ -\frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z}, 0 \right\} = \left\{ -\frac{\partial B_x}{\partial t}, -\frac{\partial B_y}{\partial t}, 0 \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial t} \end{cases} \quad (\text{A}) \quad (10.35)$$

$$4. \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (10.36)$$

$$\Rightarrow \left\{ -\frac{\partial B_y}{\partial z}, \frac{\partial B_x}{\partial z}, 0 \right\} = \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}, \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t}, 0 \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} = c^2 \frac{\partial B_x}{\partial z} \end{cases} \quad \textcircled{B} \quad (10.37)$$

Il nous reste à combiner les systèmes \textcircled{A} et \textcircled{B} .

Prenons la dérivée de \textcircled{A} par rapport au temps

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_x}{\partial t} \right) = -\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_y}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} \end{cases}, \text{ mais, de } \textcircled{B} : \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial B_y}{\partial z} \quad (10.38)$$

$$\text{Donc } \frac{\partial}{\partial z} \left(-c^2 \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}, \text{ ou} \quad (10.39)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = 0}; \quad \text{avec la même procédure on trouve} \quad (10.40)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0} \quad \text{et idem pour } E_x, B_x. \quad (10.41)$$

Ces équations couplent les variations spatiales et temporelles des champs, en donnant lieu à des ondes qui se propagent à vitesse $c \simeq 3 \times 10^8$ m/s.

10.5 L'équation d'onde et la solution générale

En considérant les équations de Maxwell dans le vide dans leur forme différentielle, et une géométrie simple, et en assumant que les champs varient uniquement sur une direction (z), nous avons vu que les champs \vec{E} et \vec{B} doivent satisfaire à une équation d'onde.

Mais que signifie satisfaire à une équation d'onde ?

→ cas générique $A = A(z, t)$ [à une dimension], équation d'onde (ou équation de "d'Alem-

bert")

$$\boxed{\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0}$$

La solution générale a la forme $A(z, t) = g(z - ct) + h(z + ct)$ avec g, h fonctions arbitraires.

En utilisant la notation générale pour la dérivée, $\frac{dg}{dx} = g'$; $\frac{d^2g}{dx^2} = g''$:

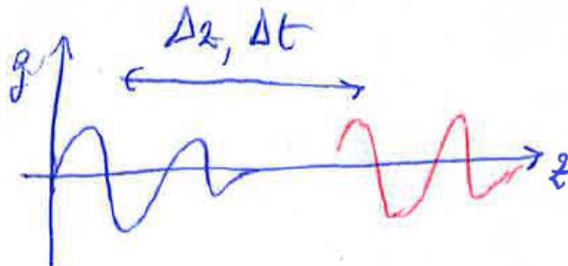
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = g'' + h''$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = g' \frac{\partial}{\partial t}(z - ct) + h' \frac{\partial}{\partial t}(z + ct) = g' \cdot (-c) + h' \cdot (c)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -cg'' \cdot (-c) + ch'' \cdot (+c) = c^2(g'' + h'')$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = g'' + h'' - \frac{1}{c^2} c^2 (g'' + h'') = 0 \quad \square$$

Quelle est la signification de g, h ? Considérons une certaine forme pour g



Après la distance Δz et le temps Δt , nous avons $g(z + \Delta z - ct - c\Delta t)$. Ce terme a la même forme que $g(z - ct)$ toujours, pour autant que $\Delta z - c\Delta t = 0 \Rightarrow \frac{\Delta z}{\Delta t} = c$.

Ceci veut dire qu'une perturbation (de n'importe quelle forme) se propage (à travers l'espace et le long du temps) avec la vitesse $c = \frac{\Delta z}{\Delta t}$, sans donner lieu à un transport de masse.

Note 10.6. Le terme $g(z - ct)$ nous donne une propagation qui avance dans le temps vers les z croissants (vers la droite $+z$). On aurait pu choisir $h(z + ct)$: ceci nous aurait donné une perturbation qui se propage dans la direction opposée ($-z$), donc vers la gauche.

Donc notre onde électromagnétique peut être exprimée comme

$$E_{x,y}(z, t) = g(z - ct) + h(z + ct).$$

Mettons ensemble \vec{E} et \vec{B} en se rappelant que $\frac{\partial E_x}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial B_y}{\partial z}$. Considérons la propagation

dans la direction $+z$ uniquement

$$\vec{E} = \{f(z - ct); \quad g(z - ct); \quad 0\}$$

$$\vec{B} = \left\{ -\frac{1}{c}g(z - ct); \quad \frac{1}{c}f(z - ct); \quad 0 \right\}$$

g, f sont des fonctions arbitraires, indépendantes entre elles.

Note 10.7. E_x est indépendant de E_y , B_x est indépendant de B_y , mais B_x et E_y et B_y et E_x , sont couplés.

Propriétés

$$(1) \quad \vec{E} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} \perp \vec{B}$$

$$(2) \quad \vec{E} \times \vec{B} \text{ donne la direction de propagation}$$

$$(3) \quad \frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = c$$

$$(4) \quad \text{Les ondes électromagnétiques sont transversales (les composantes non-nulles de } \vec{E} \text{ et } \vec{B} \text{ sont } \perp \text{ à la direction de propagation)}$$

$$(5) \quad \text{Vitesse de propagation } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

A la place de considérer des fonctions génériques g et f , on peut se rappeler du théorème de Fourier, et du formalisme de la transformée de Fourier, et exprimer la solution en termes d'ondes planes'.

10.6 Transformée de Fourier et ondes planes

Fonctions périodiques : $f(t) = f(t + nT)$; $n = 1, 2, 3, \dots$

$f(t)$ peut être exprimée comme une combinaison linéaire de fonctions sinusoïdales (sin ou cos) :

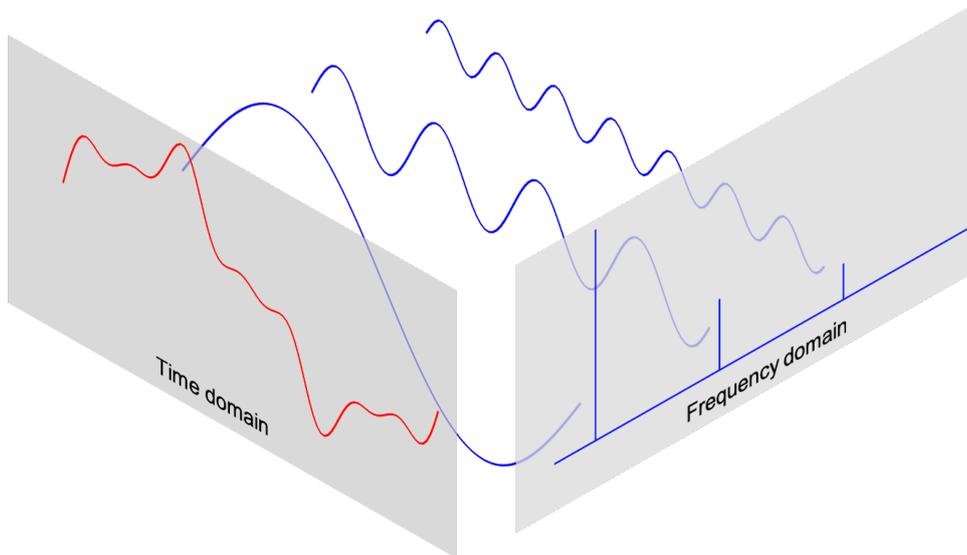
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)] \quad ; \quad \frac{a_0}{2} = \bar{f} \text{ moyenne de } f(t) \text{ sur une période}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \quad ; \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T} n$$

$$\text{et } \begin{cases} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega_n t) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega_n t) dt \end{cases}$$

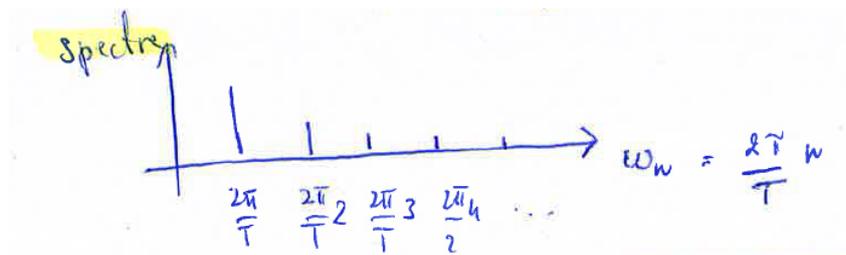
Ex. visuel



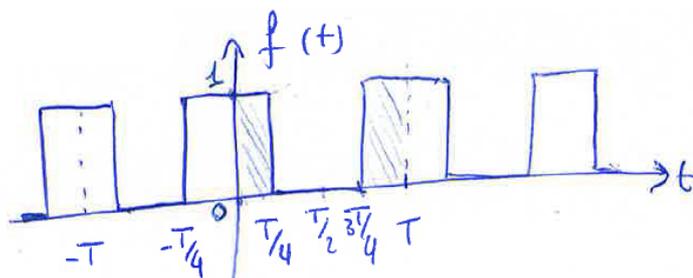
Où les harmoniques sont les termes de la somme pris individuellement :

$$f_n = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t). \tag{10.42}$$

Le 'spectre' est l'ensemble des valeurs des coefficients a_n, b_n



Ex. de calcul



fonction paire $\rightarrow b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \left[1 \times \frac{T}{4} + 1 \times \overbrace{\left(T - \frac{3T}{4} \right)}^{\frac{T}{4}} \right] = 1$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt = \frac{2}{T} \frac{T}{2\pi n} \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \Big|_0^{\frac{T}{4}} + \frac{2}{T} \frac{T}{2\pi n} \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \Big|_{\frac{3}{4}T}^T =$$

$$= \frac{1}{\pi n} \left\{ \sin\left(\frac{2\pi n T}{T} \frac{1}{4}\right) + \sin\left(\frac{2\pi n T}{T} T\right) - \sin\left(\frac{2\pi n T}{T} \frac{3}{4}T\right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi n} \left\{ \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \underbrace{\sin\left(\frac{3}{2}\pi n\right)}_{=-\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)} \right\} = \frac{2}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

Le terme $\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ donne 0 pour n pair, et ± 1 pour n impair :

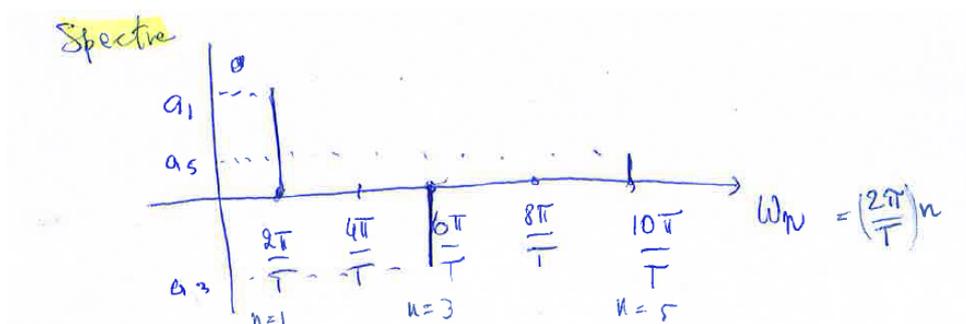
$$n = 1 \rightarrow +1$$

$$n = 3 \rightarrow -1$$

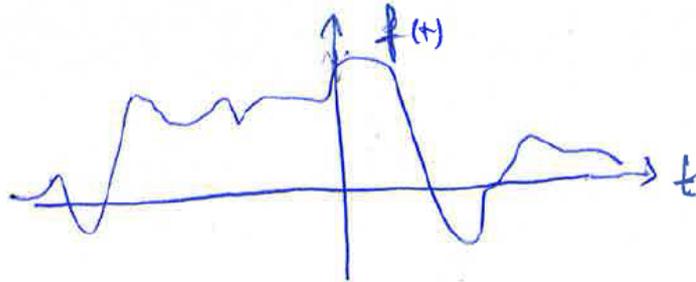
$$n = 5 \rightarrow +1$$

$$n = 7 \rightarrow -1$$

...



Fonctions non-périodiques (continues, et allant à 0 à l' ∞)



Dans ce cas on peut toujours exprimer la fonction comme combinaison (somme continue, donc intégrale) de fonctions sinusoïdales, mais on doit avoir un “continu” de valeurs de ω sur lesquelles intégrer.

On peut écrire

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega) \cos(\omega t) + B(\omega) \sin(\omega t)] d\omega$$

avec

$$\begin{cases} A(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \\ B(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \end{cases}$$

C'est encore plus pratique pour le calcul d'utiliser la notation complexe :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad ; \quad \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

$\tilde{f}(\omega)$ s'appelle la ‘transformée de Fourier de $f(t)$ ’, ou son spectre de Fourier.

Ex. pulse :



En revenant aux ondes e.m. on peut imaginer les champs électrique et magnétique comme décomposés en spectre de Fourier.

Note 10.8. Pour les ondes on doit considérer une transformation et dans l'espace et dans le temps, car les champs varient en \vec{x} et t . La variable “conjuguée” à la variable temporelle t , comme déjà vu, est la fréquence angulaire ω , alors que la variable “conjuguée” à la variable spatiale \vec{x} est le nombre d'onde \vec{k} .

La décomposition en générale peut s'écrire comme

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \tilde{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} d\vec{k} d\omega$$

$$\tilde{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \vec{E}(\vec{x}, t) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} d\vec{x} dt \leftarrow \tilde{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) \text{ "spectre" de } \vec{E}(\vec{x}, t)$$

Note 10.9. Dans la transformée de Fourier on introduit des quantités complexes. Rien de préoccupant ... car on peut considérer que les quantités physiques correspondent aux parties réelles (ou imaginaires) de ces éléments. Considérer ceci correspond à choisir les termes de l'expansion en "cos", ou en "sin", respectivement.

10.7 Ondes planes, fréquence, période, nombre d'onde et longueur d'onde

Pour une composante donnée du champ de l'onde qui se propage le long de z ou on donc des termes en "sin" ou en "cos". Choisissons le "cos" :

$$E = \sum E_n \cos(k_n z - \omega_n t) \quad \text{ou} \quad E = \int \tilde{E} \cos(kz - \omega t) d\omega dk$$

$$\text{ou} \quad E = \text{Re} \left\{ \int \tilde{E} e^{i(kz - \omega t)} dk d\omega \right\}$$

Chaque terme sinusoïdal est une onde plane.

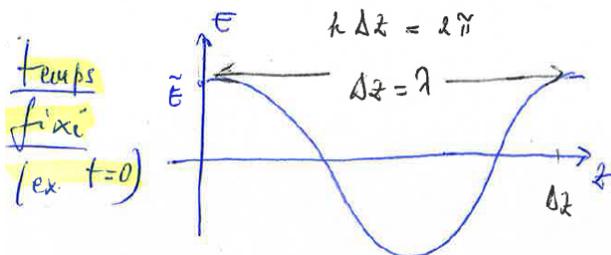
$$E = \tilde{E} \cos(kz - \omega t) = \tilde{E} \cos \left[k \left(z - \frac{\omega}{k} t \right) \right]$$

Cette fonction est effectivement de la forme $g(z - \omega t)$ (solution générale de l'équation d'onde), pour autant que $\frac{\omega}{k} = c$ vitesse de phase.

ω = fréquence angulaire [ω] = rad/s

k = nombre d'onde [k] = 1/m

$E = \tilde{E} \cos(kz - \omega t)$ est une fonction à double périodicité (en z et en t)



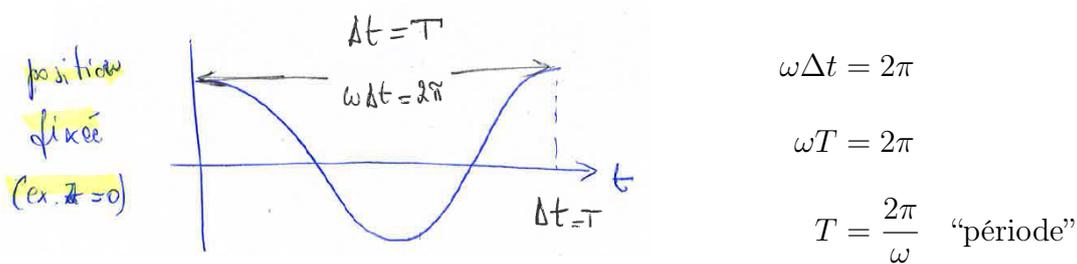
$$\Delta z = \frac{2\pi}{k} = \lambda \quad \text{"longueur d'onde"}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{"nombre d'onde"}$$

Car

$$E(z, t) = \tilde{E} \cos(kz - \omega t) = E(z + \lambda, t) = \tilde{E} \cos(k(z + \lambda) - \omega t)$$

si $k\lambda = 2\pi$.



Car

$$E(z, t) = \tilde{E} \cos(kz - \omega t) = \tilde{E}(z, t + T) = \tilde{E} \cos[kz - \omega(t + T)]$$

$$\text{si } \omega T = 2\pi \quad ; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\text{fréquence}}$$

La vitesse de phase $c = \frac{\omega}{k}$ peut aussi être écrite comme

$$\frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{T} \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \times \text{fréquence} = c$$

On peut visualiser à travers des démos le fait que les ondes peuvent être le résultat de la superposition d'ondes monochromatiques, donc de composantes de Fourier.

Exemples ondes radio FM :

$$\lambda = \frac{c}{f} \cong \frac{3 \times 10^8}{100 \times 10^6} \cong 3 \text{ m}$$

Les antennes radio sont de cet ordre de dimensions. Téléphone portable :

$$f \cong 3 \times 10^9 \text{ Hz} \quad ; \quad \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{3 \times 10^9} \text{ m} = 10 \text{ cm}$$

Utilisons cette représentation en terme d'ondes planes pour retrouver les relations entre \vec{E} et \vec{B} dans le vide.

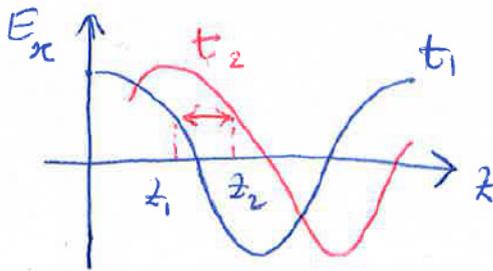
Prenons une onde qui se propage le long de z , comme au début de la discussion, avec

$$\text{uniquement } \begin{cases} E_x \neq 0 \\ B_y \neq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} E_y = 0 \\ B_x = 0 \end{cases}$$

$$\vec{E}(z, t) = \{E_x(z, t), 0, 0\} \quad ; \quad \vec{B}(z, t) = \{0, B_y(z, t), 0\}$$

avec

$$\begin{cases} E_x(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \\ B_y(z, t) = B_0 \cos(\omega t - kz) \end{cases}$$



Pour que la forme ne change pas :

$$\omega t_1 - kz_1 = \omega t_2 - kz_2$$

$$\Rightarrow k(z_2 - z_1) = \omega(t_2 - t_1)$$

et

$$z_2 - z_1 = \frac{\omega}{k}(t_2 - t_1) > 0 \Rightarrow z_2 > z_1, \quad \text{et} \quad \frac{\omega}{k} = \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1}$$

Calculons $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ pour ces ondes planes :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{y} \left(-\frac{\partial E_x}{\partial z} \right) = \hat{y} \left(-\frac{\partial B_y}{\partial t} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} [E_0 \cos(\omega t - kz)] = E_0(-k)[- \sin(\omega t - kz)] = -\frac{\partial}{\partial t} [B_0 \cos(\omega t - kz)]$$

$$\Rightarrow E_0 k \sin(\omega t - kz) \underset{\forall t, \forall z}{=} \omega B_0 \sin(\omega t - kz) \Rightarrow \boxed{B_0 = \frac{k}{\omega} E_0 = \frac{E_0}{c}}$$

Résumé :

- Nous avons vu comment on arrive à des équations d’ondes à partir du système de Maxwell. Nous avons mentionné que l’équation d’onde, par ex. pour une composante du champ électrique, a la forme $\frac{\partial^2 E_{y,x}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_{y,x}}{\partial t^2} = 0$

La solution générale a la forme $E_{y,x}(z, t) = g(z - ct) + h(z + ct)$ où g et h sont des fonctions arbitraires. g et h décrivent la propagation à vitesse c d’une perturbation le long de la direction z .

- Nous avons dit qu’il est utile de considérer que g et h sont (comme toutes les fonctions satisfaisant certaines conditions de régularité) le résultat d’une combinaison linéaire de fonctions sinusoïdales (ou, dans la notation complexe, de fonctions exponentielles). Cette combinaison est sous forme d’intégrale pour les ondes en général non-sinusoïdales.

Les champs sont donc le résultat d’une somme (ou une intégrale) de composantes élémentaires, chacune desquelles est une “onde plane” :

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = const. \times \text{Re} \left\{ \int \underbrace{\vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}}_{\text{ondes planes } (\equiv \text{“couleurs”})} d\vec{k} d\omega \right\} \quad (10.43)$$

(en notation réelle : $\vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$)

Note 10.10. Dans ce formalisme de la transformée de Fourier, on peut appliquer la

$$\text{correspondance } \begin{cases} \vec{\nabla} & \Rightarrow i\vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial t} & \Rightarrow -i\omega \end{cases} \quad [\text{équations différentielles} \rightarrow \text{algébriques}]$$

$$\begin{aligned} \text{car } \vec{\nabla} \left(\begin{smallmatrix} \times \\ \cdot \end{smallmatrix} \right) \vec{E}(\vec{x}, t) &= \text{const.} \times \text{Re} \left\{ \int \vec{\nabla} \left(\begin{smallmatrix} \times \\ \cdot \end{smallmatrix} \right) \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x})} e^{-i\omega t} d\vec{k} d\omega \right\} = \\ &= \text{const.} \times \text{Re} \left\{ \int \underbrace{i\vec{k} \left(\begin{smallmatrix} \times \\ \cdot \end{smallmatrix} \right) \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} d\vec{k} d\omega}_{i\vec{k} \left(\begin{smallmatrix} \times \\ \cdot \end{smallmatrix} \right) \text{ onde plane}} \right\} \end{aligned} \quad (10.44)$$

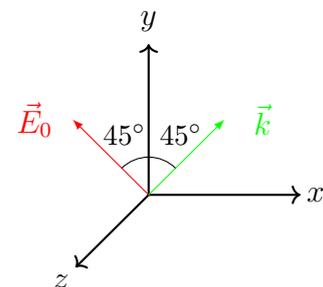
et

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{x}, t) &= \text{const.} \times \text{Re} \left\{ \int \vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \frac{\partial}{\partial t} (e^{-i\omega t}) d\vec{k} d\omega \right\} = \\ &= \text{const.} \times \text{Re} \left\{ \int \underbrace{(-i\omega) \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} d\vec{k} d\omega}_{-i\omega \times \text{ onde plane}} \right\} \end{aligned} \quad (10.45)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Vérification de la relation entre } \vec{E} \text{ et } \vec{B} : \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega \vec{B} \text{ et} \\ \vec{B}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E} = \left(\text{comme } \frac{\omega}{k} = c \right) = \frac{1}{c} \frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E} \end{aligned}$$

Exemple d'exercice

on a

$$\begin{cases} \vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{\hat{x}}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{y}}{\sqrt{2}} \right] \\ \vec{E}_0 = -\frac{E_0}{\sqrt{2}}\hat{x} + \frac{E_0}{\sqrt{2}}\hat{y} \end{cases}$$


⇒ Exprimez $\vec{E}(\vec{x}, t)$ comme onde plane, et trouvez $\vec{B}(\vec{x}, t)$

Solution :

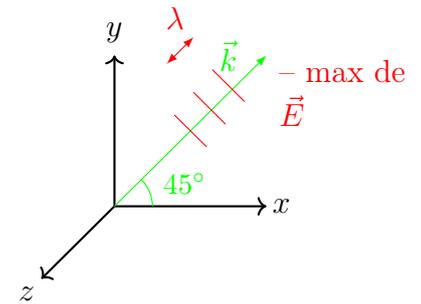
$$\vec{k} \cdot \vec{x} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) = \frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda}(x + y)$$

$$\vec{E}(x, y, t) = E_0 \left(-\frac{\hat{x}}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{y}}{\sqrt{2}} \right) \cos \left[\frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda}(x + y) - \omega t \right]$$

$$\vec{B}(x, y, t) = \frac{1}{c} \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{k} = \frac{E_0}{c} \cos \left[\frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda}(x + y) - \omega t \right] \times \underbrace{\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix}}_{1 \times \hat{z}}$$

$$= \frac{E_0}{c} \hat{z} \cos \left[\frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda}(x + y) - \omega t \right]$$

Cette onde se propage dans le vide à l'infini.



10.8 Densité d'énergie dans les ondes électromagnétiques, vecteur de Poynting, intensité et pression de radiation

$$\text{Densité d'énergie des champs électromagnétique : } u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (10.46)$$

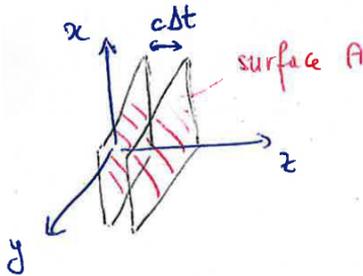
$$\text{Mais dans les ondes électromagnétique : } B = \frac{E}{c} \quad (10.47)$$

$$\text{donc } u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{E^2}{2\mu_0} \underbrace{\frac{1}{c^2}}_{\varepsilon_0/\mu_0} = \varepsilon_0 E^2 : \quad (10.48)$$

la densité d'énergie peut être exprimée uniquement en fonction de E .

Les densités d'énergie de E et B sont les mêmes (dans les ondes électromagnétique dans le vide)

Cette énergie 'voyage' à vitesse c .



Sur l'intervalle de temps Δt , l'onde couvre une distance de $\Delta z = c\Delta t$. Donc, l'onde transporte une énergie ΔU à travers A , donnée par :

$$\Delta U = u \times \text{volume} = u \times A c \Delta t = \varepsilon_0 E^2 A c \Delta t \quad (10.49)$$

La puissance qui passe par unité de surface est donc :

$$\frac{\text{puissance}}{\text{surface}} = \frac{\Delta U}{A \Delta t} = \frac{\varepsilon_0 E^2 A c \Delta t}{A \Delta t} = \varepsilon_0 E^2 c \quad (10.50)$$

Mais

$$Bc = E \Rightarrow \frac{\text{puissance}}{\text{surface}} = \varepsilon_0 E^2 c = \varepsilon_0 E \overbrace{(Bc)}^E = \varepsilon_0 c^2 EB = \frac{1}{c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}} EB \stackrel{\text{déf.}}{=} S \quad (10.51)$$

Cette quantité S donne le flux d'énergie d'une onde électromagnétique. Mais si on veut aussi décrire la direction, on doit définir \vec{S} comme vecteur, dirigé selon la direction de propagation de l'onde.

Déf. $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$ vecteur de Poynting (10.52)

$$|\vec{S}| = \frac{1}{\mu_0} |\vec{E} \times \vec{B}| = \frac{1}{\mu_0} EB, \quad \text{car } \vec{E} \perp \vec{B} \quad (10.53)$$

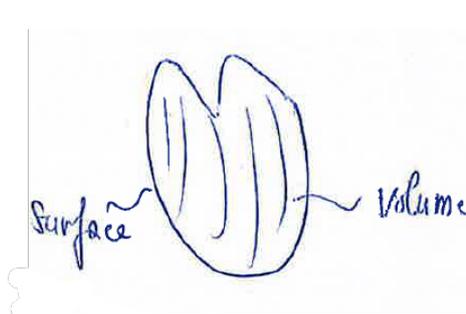
\vec{S} mesure le flux instantané d'énergie :

$$[|\vec{S}|] = \left[\frac{1}{\mu_0} \right] [E][B] = \left[\frac{\text{Tm}}{\text{A}} \right]^{-1} \frac{\text{V}}{\text{m}} \text{T} = \frac{\text{A}}{\text{mT}} \frac{\text{V}}{\text{m}} \text{T} = \frac{\text{VA}}{\text{m}^2} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Note 10.11. Avec une densité d'énergie électromagnétique et un flux d'énergie électromagnétique on doit pouvoir établir une loi de conservation pour l'énergie électromagnétique sous forme d'équation de continuité.

Espace vide pas de sources de champs électromagnétique, donc ni charges, ni courant ; donc pas de travail par \vec{E} , qui serait $\vec{E} \cdot \vec{j}$ (par unité de volume) : u varie uniquement s'il y a un flux ("in" ou "out" du volume en question).

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{Volume}} u dV = - \int_{\text{Surface}} \vec{S} \cdot d\vec{A} = - \int_{V(S)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{S}) dV \quad (10.54)$$



En forme différentielle :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0 \quad (\text{'théorème de Poynting'}) \quad (10.55)$$

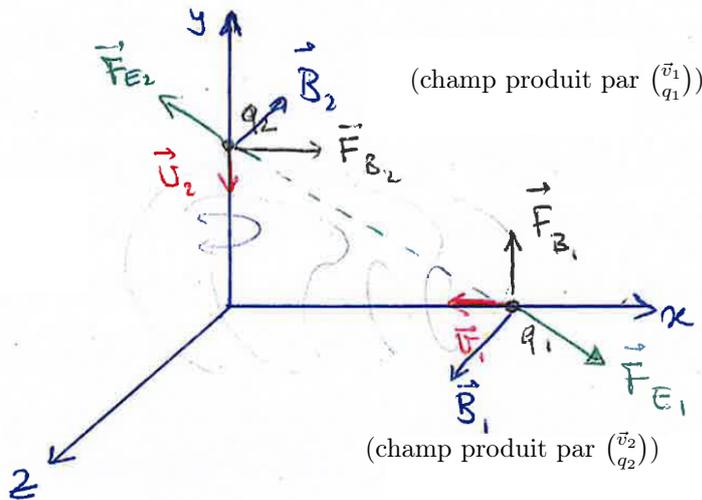
Démonstration mathématique :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right)}_{\vec{S}} &= \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\left[\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \right]}_{\text{identité vectorielle}} = \frac{1}{\mu_0} \left[-\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial |B|^2}{\partial t} - \frac{1}{2} \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial |E|^2}{\partial t} \right] = -\frac{1}{\mu_0} \left[\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right) \right] = \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \right] = -\frac{\partial}{\partial t} u \end{aligned} \quad (10.56)$$

Une onde électromagnétique transporte de l'énergie. Est-ce qu'elle transporte d'autres quantités physiques ?

Transporter de l'information implique transporter de l'énergie.

Note 10.12. Interaction électrique et magnétique entre deux charges ponctuelles en mouvement rectiligne uniforme : il semble y avoir un problème avec la loi d'action et réaction !



$$\vec{F}_{E_2} = -\vec{F}_{E_1} \quad \text{OK!}$$

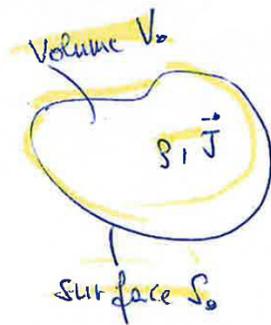
$$\text{Mais : } \vec{F}_{B_2} \neq -\vec{F}_{B_1} \quad !$$

(même pour $v \ll c$)

Comme résoudre ce problème ? Si la 3^{ème} loi de Newton n'est pas valable, alors la loi de conservation de la quantité de mouvement est aussi remise en question !

$$\left(\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \frac{d}{dt}(\vec{p}_{tot}) = 0 \right)$$

Idée (solution) ! : il y a une quantité de mouvement associée aux champs électromagnétiques. Comment la déterminer ? Ébauche d'une démonstration.



Dans le volume V_0 il y a des particules chargées, qui donnent lieu à une densité de charge et de courant ρ et \vec{J} . La quantité de mouvement totale dans le volume, $\vec{p}_{méc.}$, varie parce qu'il y a la force électromagnétique.

$$\frac{d\vec{p}_{méc.}}{dt} = \text{force} = \int_{V_0} \underbrace{(\rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B})}_{\text{densité de force} = \frac{\text{force}}{\text{volume}}} dV \quad (10.57)$$

On peut manipuler l'intégrale (on ne la fait pas ici), et on obtient :

$$\frac{d\vec{p}_{méc.}}{dt} = \underbrace{-\epsilon_0\mu_0 \frac{d}{dt} \int_{V_0} \vec{S} dV}_{\text{variation de la quantité de mouvement associée au champ électromagnétique en } V_0} - \underbrace{\vec{\Phi}_{qdm}}_{\text{flux de quantité de mouvement à travers la surface } S_0} \quad (10.58)$$

- On peut conclure que la densité de quantité de mouvement associée au champ électromagnétique est :

$$\left[\vec{g} = \varepsilon_0 \mu_0 \vec{S} = \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{S} \right] \quad (10.59)$$

$|\vec{S}|$ peut être écrite comme $|\vec{S}| = cu \Rightarrow \boxed{g = \frac{u}{c}}$

- Rappel : vous avez vu en relativité que $\boxed{\text{énergie}^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$, et que pour une particule de masse au repos $m_0 = 0$, par ex. un photon, $\text{énergie}^2 = p^2 c^2$, ou $\text{énergie} = pc$, donc $p = \frac{\text{énergie}}{c}$ (ça correspond à $g = \frac{u}{c}$, sauf que g et u sont ‘par unité de volume’).
- On peut aussi dire que le champ électromagnétique est un gaz de particules de masse au repos nul (les photons).
- Dans la plupart des cas pratiques, les effets de la quantité de mouvement et surtout de l’énergie associées à une onde ne sont pas instantanés, mais se manifestent sur un temps macroscopique (ex. chauffage, transmission des informations, etc.).

On doit donc considérer des moyennes temporelles.

Déf. Intensité $I \equiv \overline{|\vec{S}|} = \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{S}| dt$ (moyenne temporelle sur une période de l’onde).

Si on considère des ondes planes, à 1-D

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{S}| dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{\mu_0} E_0 \cos(kx - \omega t) B_0 \cos(kx - \omega t) dt = \\ &= \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \underbrace{\left[\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(kx - \omega t) dt \right]}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0 = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2 \end{aligned} \quad (10.60)$$

$[I] = \frac{W}{m^2}$, comme $[S]$ naturellement, mais I donne lieu à des effets bien plus facilement mesurables.

- La même moyenne temporelle se fait pour u et g :

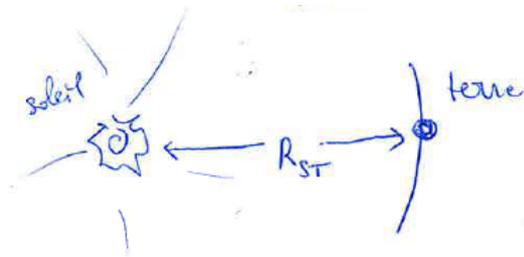
$$\bar{u} = \frac{\overline{|\vec{S}|}}{c} = \frac{I}{c}$$

$$\bar{u} = \varepsilon_0 E_0^2 \overline{\cos^2(kx - \omega t)} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 = \frac{I}{c}$$

$$\bar{g} = \frac{1}{c^2} \bar{S} = \frac{1}{c^2} I = \frac{1}{2c} \varepsilon_0 E_0^2 \quad \Rightarrow \quad I = \bar{g} c^2, \quad \boxed{\bar{g} = \frac{I}{c^2}}$$

Ex. 1 Émission de lumière par le soleil.

$P_{\text{tot}} \cong 4 \times 10^{26}$ W ; distance soleil-terre : $R_{ST} \cong 1.5 \times 10^{11}$ m. Quelle est la valeur maximale de $|\vec{E}|$ et $|\vec{B}|$ sur notre corps, lorsque nous sommes exposés au soleil ?



Intensité à la distance correspondante à la terre (à l'extérieur de l'atmosphère) :

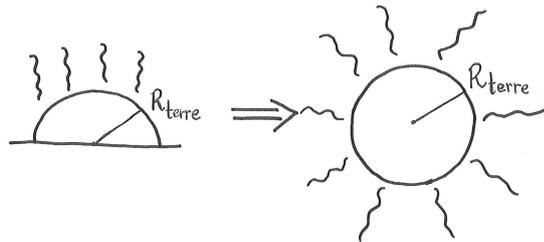
$$I = \frac{P_{\text{tot}}}{\text{surface sphère de rayon } R_{ST}} = \frac{P_{\text{tot}}}{4\pi R_{ST}^2} =$$

$$= \frac{4 \times 10^{26} \text{ W}}{4\pi \times (1.5 \times 10^{11})^2 \text{ m}^2} \cong 1400 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Note 10.13. Si on considère que notre corps a une surface de $\sim 1 \text{ m}^2$ cela correspond à $\sim 140 \text{ W}$: très grand !

Note 10.14. En considérant la moyenne sur toute la surface de la terre (donc sur toutes les saisons) on devrait corriger par le facteur :

$$\frac{\pi R_{\text{terre}}^2}{4\pi R_{\text{terre}}^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1400}{4} \sim 350 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$



Note 10.15. L'atmosphère nous protège, car elle absorbe $\sim 20\%$ de la radiation, et diffuse/réfléchit $\sim 30\%$, donc elle réduit de $\sim 50\%$ la puissance. Donc, au max du rayonnement (été) :

$$I_{\text{terre réel}}^{\text{max}} \sim \frac{I}{2} = 700 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Comme $I_{\text{terre réel}}^{\text{max}} = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0} = \frac{E_{0,\text{max}}^2}{2\mu_0 c} \Rightarrow E_{0,\text{max}} = \sqrt{2\mu_0 c I_{\text{terre réel}}^{\text{max}}} =$

$$= \sqrt{2 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 3 \times 10^8 \times 700}$$

$$E_{0,\text{max}} \cong 726 \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (\text{assez grand!})$$

$$\Rightarrow B_{0,\text{max}} = \frac{E_{0,\text{max}}}{c} = 2.4 \times 10^{-6} \text{ T} \quad (\text{assez petit...})$$

Ex. 2 Station radio $P_{tot} \simeq 10 \text{ kW}$

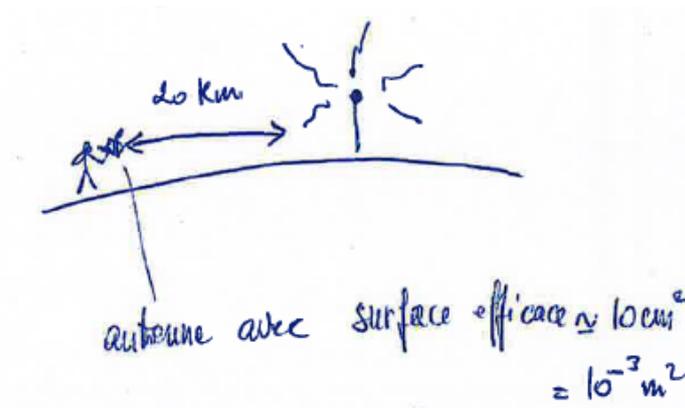
puissance reçue dans notre appareil radio ?

$$E_0^{\text{reçue}} = ?$$

$$\Rightarrow I(r) = \frac{P_{tot}}{4\pi r^2} \Rightarrow P_{\text{reçue}} = I(r = 20 \text{ km}) \times (\text{surface efficace}) =$$

$$\cong \frac{P_{tot}}{4\pi(2 \times 10^4)^2} \times 10^{-3} \text{ m}^2 \cong P_{tot} \times 2 \times 10^{-13} = 2 \times 10^{-9} \text{ W} = 2 \text{ nW}$$

(⇒ petite valeur, on doit amplifier pour entendre quelque chose...)

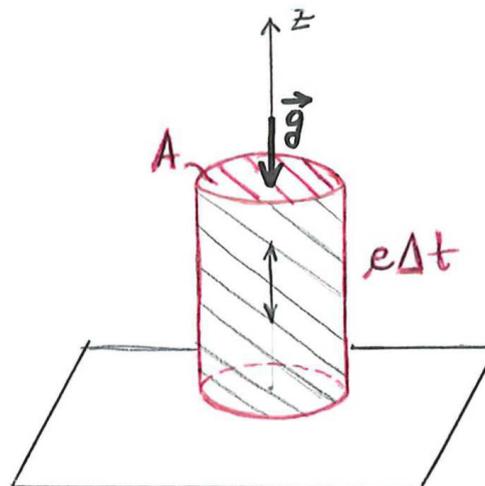
**Pression de radiation**

Comme nous avons vu, les ondes électromagnétiques transportent, en plus de l'énergie, de la quantité de mouvement. Si une onde 'frappe' une surface, elle lui cède de la quantité de mouvement, comme si c'était des particules de gaz (d'ailleurs on peut penser au gaz de photons...).

Déf.

$\Delta \vec{p}$: quantité de mouvement transportée à la surface A sur l'intervalle Δt

$$\Delta \vec{p} = c \vec{g} A \Delta t$$



Absorbeur parfait : l'onde ne 'rebondit' pas. La force est donc :

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = c \vec{g} A = -\frac{I}{c} A \hat{z}$$

↑
en moyenne $\vec{g} = \frac{I}{c^2}$

et la pression est : $\text{pression} = \frac{F}{A} = \frac{I}{c}$

Miroir parfait : l'onde rebondit (à 100%)

$$\vec{F} = 2 \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = -2 \frac{I}{c} A \hat{z}$$

et la pression : $\text{pression} = \frac{F}{A} = 2 \frac{I}{c}$

Note 10.16. On a considéré la force moyenne sur le temps (c'est ça qui compte pour la pression), donc I , et pas $S(I = \bar{S})$.

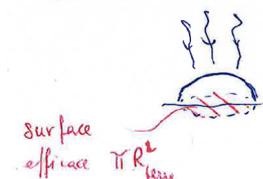
Ex. numérique :



la pression due au rayonnement solaire sur un miroir sur terre est (au max) :

$$p_{\text{miroir}} = 2 \frac{I_{\text{terre}}^{\text{réel}}}{c} = 2 \times \frac{700}{3 \times 10^8} \frac{\text{N}}{\text{m}} \cong 5 \times 10^{-6} \text{ Pa}$$

Force sur la terre entière :



$$p_{\text{miroir}}/2 \times \pi R_{\text{terre}}^2 \cong 5 \times \frac{10^{-6}}{2} \times \pi \times (6 \times 10^6)^2 \cong 30 \times 10^7 \text{ N}$$

car la terre n'est pas un bon réflecteur

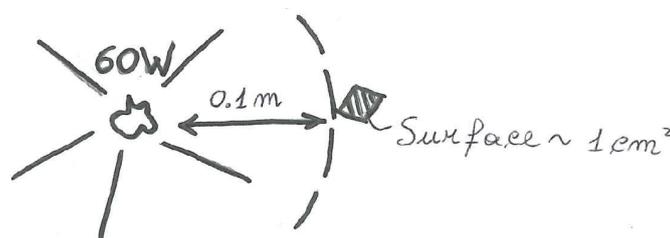
$$= 30000 \text{ tonnes}$$

DEMO Radiomètre de Crooks

On penserait que cette manip. 'visualise' bien la pression de radiation. Mais, est-ce vrai?

Check quantitatif : l'ampoule a une puissance de 60 W.

Distance $\sim 0.1 \text{ m}$



La force sur la surface absorbante est

$$\begin{aligned}
 F &= \text{pression} \times \text{surface} = \frac{I}{c} \times \text{surface} = \overbrace{\left[\frac{P_{\text{tot}}}{4\pi(0.1 \text{ m})^2} \right]}^I \frac{1}{c} \times 10^{-4} \text{ m}^2 = \\
 &= \frac{60 \times 10^{-4}}{4\pi \times 0.1^2 \times 3 \times 10^8} \text{ N} = 1.6 \times 10^{-10} \text{ N} \quad \text{très petit !}
 \end{aligned}$$

et ça devrait tourner dans le sens inverse !

Note 10.17. *Celle-ci serait la différence de force entre la face absorbante et la face réfléchissante.*

C'est très difficile de construire un appareil qui est sensible à cette force... de plus, on voit que l'effet disparaît si on fait un vide très poussé. Explication ?

⇒ Idée : les faces noires (absorbantes) se chauffent plus rapidement, ce qui crée une différence de température entre le côté noir et le côté 'miroir'. Les molécules qui tapent contre les faces noires (plus chaudes), le font avec plus d'énergie que celles qui tapent contre les faces miroir (plus froides).

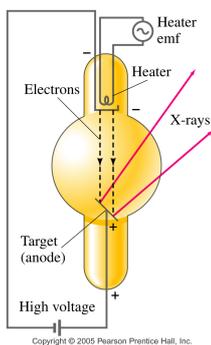
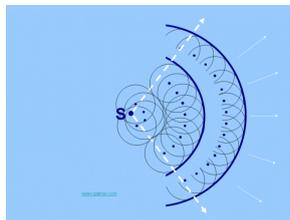
Ex. comètes : la forme de la queue des comètes est déterminée par une compétition entre la gravitation, d'un côté, et la pression de radiation du soleil, de l'autre.

Chapitre 11

La lumière comme onde



Détecteur d'ondes gravitationnelles VIRGO – Pisa, Italie



Light Diffraction by a Razor Blade

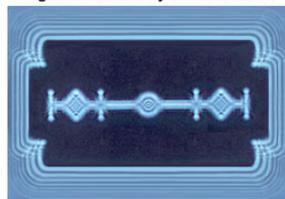
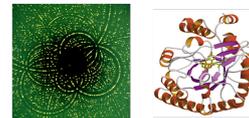


Figure 2

Image de diffraction et reconstruction de la structure d'une protéine



11.1 Principe de Huygens

Nous avons vu que les ondes électromagnétiques sont la conséquence des équations de Maxwell, et que la lumière est une onde électromagnétique. Ce point de vu n'a pas toujours été compris et, bien entendu, ne pouvait pas l'être avant la théorie complète de l'électromagnétisme.

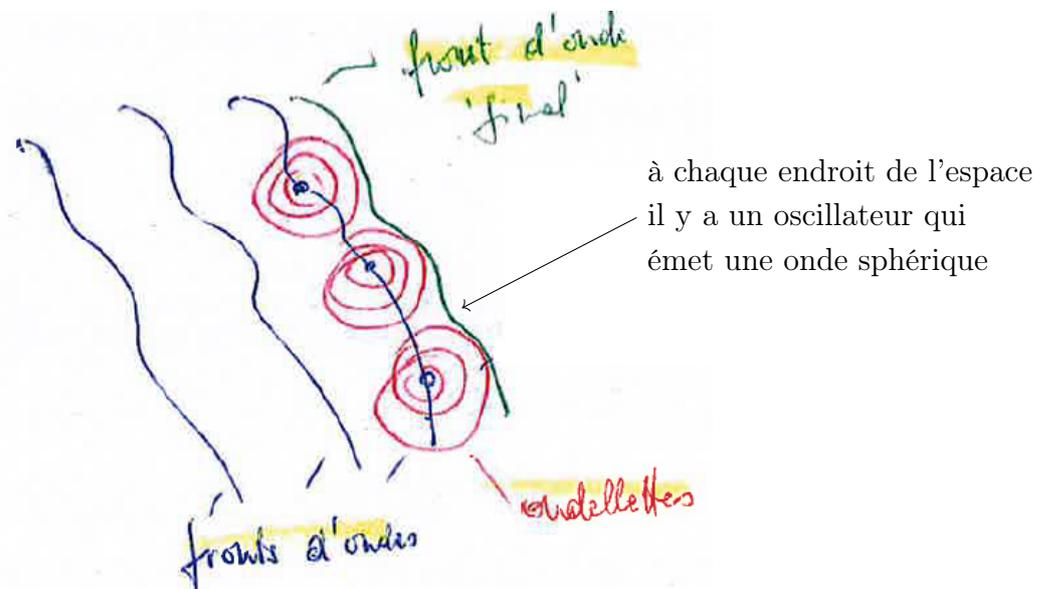
Deux théories étaient présentes historiquement sur la nature de la lumière et, en général, des ondes électromagnétiques, à partir de deux scientifiques qui vivaient dans la même période (~ 1650)

- Newton : la lumière consiste en un ensemble de particules
- Huygens : la lumière consiste en un ensemble d'ondes

Naturellement, la vision moderne est qu'il existe une 'dualité' onde-particules, que vous allez explorer l'année prochaine.

Selon les phénomènes à décrire, une interprétation peut être plus simple que l'autre. Nous allons ici travailler sur l'idée de Huygens, donc en considérant la lumière comme une onde, et en partant de son 'principe de Huygens' :

“Chaque point d'un front d'onde peut être considéré comme la source d'une nouvelle onde sphérique en phase avec l'onde incidente et de même amplitude. Le nouveau front d'onde est l'“enveloppe” de toutes ces ondelettes sphériques, c'est à dire la tangente des ondelettes.”

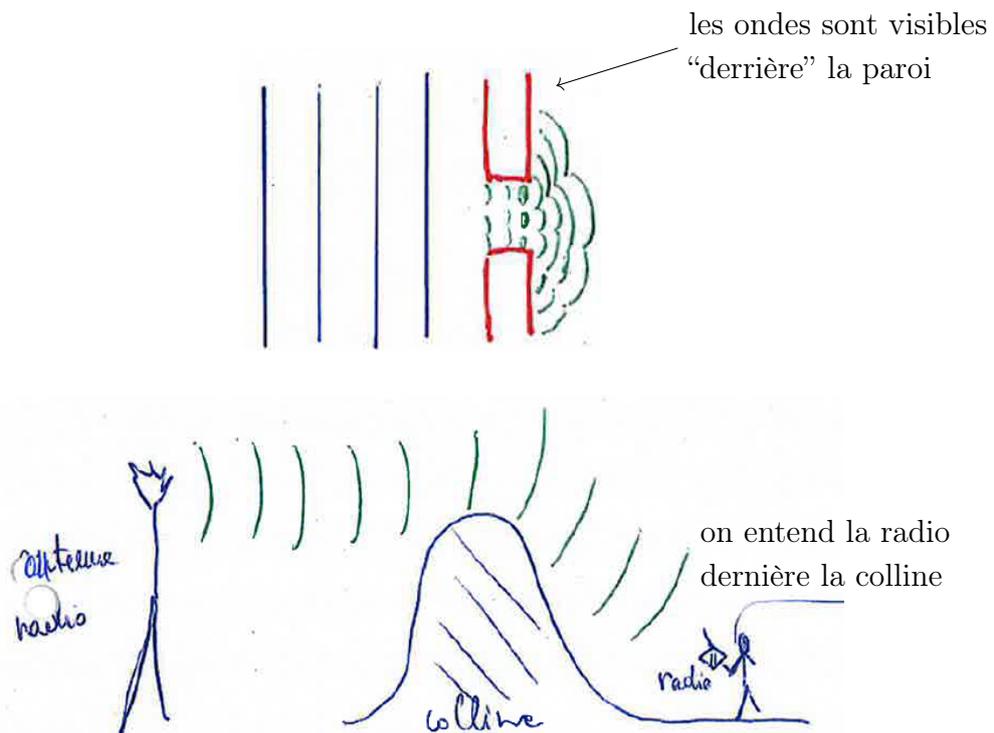


Note 11.1. *Le fait que les ondelettes sphériques s'additionnent pour former le nouveau front d'onde est consistant avec le principe de superposition des ondes.*

Conséquences du principe de Huygens :

1. à partir d'un front d'onde on peut calculer la propagation de l'onde dans l'espace et dans le temps ;
2. on peut expliquer des phénomènes d'interférence, par la superposition d'ondes ;
3. on met en évidence la possibilité qu'une onde 'contourne' un obstacle, donc le phénomène de diffraction.

Ex. visuels (on verra la diffraction plus tard, de façon quantitative)



11.2 Ondes dans un diélectrique et réfraction

Maintenant on considère la propagation d'ondes non seulement dans le vide, mais aussi en présence d'un milieu diélectrique (= isolant, c'est à dire sans charges ni courants libres). On considère un milieu homogène. Mathématiquement, on a les mêmes équations d'onde que dans le vide, mais avec $\varepsilon_0 \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0 K$ (K = constante diélectrique), et $\mu_0 \Rightarrow \mu = \mu_0 K_m$ (ou $\mu_0 \mu_r$) (K_m = perméabilité magnétique relative)

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

⇒ les champs \vec{E} et \vec{B} se propagent dans les milieux comme une onde à la vitesse

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 K \mu_0 K_m}} = \frac{c}{n},$$

où $n \stackrel{\text{def.}}{=} \sqrt{K K_m}$, "indice de réfraction"

Comme $K_m \simeq 1$ dans la plupart des cas, $n \simeq \sqrt{K}$.

Note 11.2. K est en général dépendant de la fréquence f de l'onde : $K = K(f)$.

TABLE 11.2.1 – Des valeurs typiques pour n (pour la lumière visible)

diamant	$n \simeq 2.4$
quartz	$n \simeq 1.46$
eau	$n \simeq 1.33$
alcool	$n \simeq 1.36$
sapllire	$n \simeq 1.77$
air	$n \simeq 1.0003$

Qu'est-ce qui change dans une onde qui passe d'un milieu à un autre ?

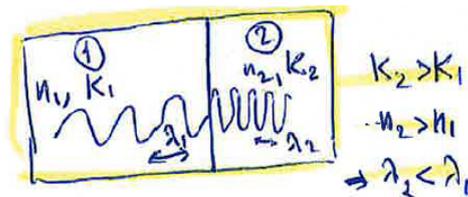
→ pas la fréquence ! Le milieu n'influence pas les variations temporelles

→ la longueur d'onde !

$$f = \frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{v_2}{\lambda_2}$$

et

$$v_1 = \frac{c}{n_1} \quad ; \quad v_2 = \frac{c}{n_2}$$

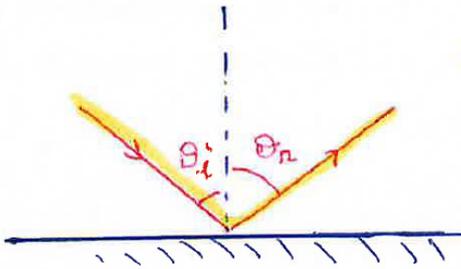


$$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{v_2}{v_1} \lambda_1 = \frac{n_1}{n_2} \lambda_1$$

Réflexion et réfraction

Les lois de l'optique géométrique étaient bien connues déjà à l'époque de Newton et Huygens.

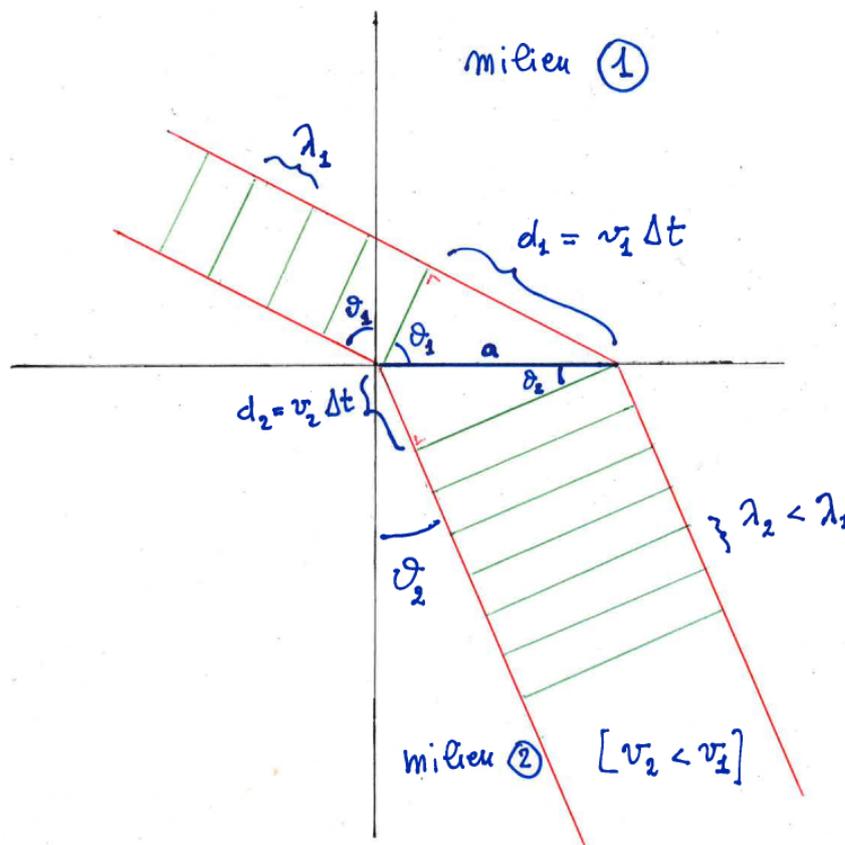
La loi de la réflexion, en effet, ne permettait pas de conclusions sur la nature de la lumière, car elle peut être expliquée dans une interprétation de lumière comme onde ou comme ensemble de particules.



$$\vartheta_r = \vartheta_i$$

Note 11.3. Nous ne ferons pas vraiment de optique géométrique dans ce cours, mais discuterons des principes liés à l'électromagnétisme

Par contre, la réfraction est expliquée en terme d'ondes et du principe de Huygens



Une onde passe du milieu ① ($n = n_1$) au milieu ② ($n = n_2$). On considère les distances parcourues par les fronts d'onde sur l'intervalle Δt dans les deux milieux. Ces distances sont différentes car $v_1 \neq v_2$.

Par la géométrie :

$$\begin{cases} \sin \vartheta_1 = \frac{v_1 \Delta t}{a} \\ \sin \vartheta_2 = \frac{v_2 \Delta t}{a} \end{cases}$$

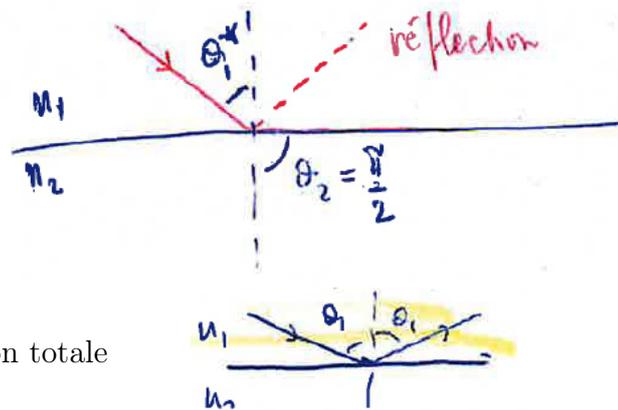
$$\Rightarrow \frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \frac{v_1 \Delta t}{\cancel{a}} \frac{\cancel{a}}{v_2 \Delta t} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\cancel{c} n_2}{n_1 \cancel{c}} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\boxed{n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2} \Rightarrow \vartheta_2 \neq \vartheta_1 \text{ si } n_2 \neq n_1 \quad (\vartheta_2 < \vartheta_1 \text{ si } n_2 > n_1)$$

Note 11.4. On peut même avoir une variation continue de n , et donc une réfraction ‘continue’ (visualisée au cours avec une solution inhomogène de glycérine dans l’eau).

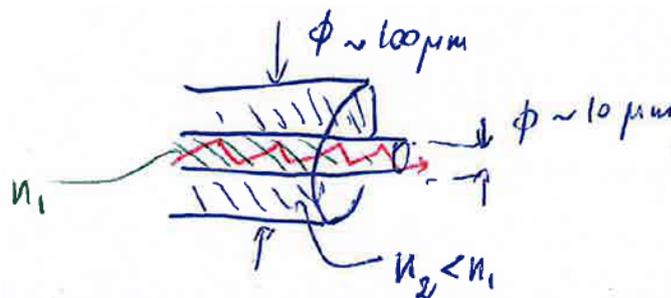
Note 11.5. Cas spécial : $\vartheta_2 = \frac{\pi}{2} \rightarrow$ réflexion totale. L’angle d’incidence correspondant, ϑ_1^* , tel que $n_1 \sin \vartheta_1^* = n_2$, ou $\sin \vartheta_1^* = \frac{n_2}{n_1} \leq 1$, est nommé ‘angle critique’

$n_2 < n_1$: on passe d’un milieu plus dense à un milieu moins dense.



Si $\vartheta_1 > \vartheta_1^*$ on ne peut avoir que réflexion totale

Ex. Le principe de réflexion totale due à la différence des valeurs de l’indice de réfraction est à la base du fonctionnement des fibres optiques.

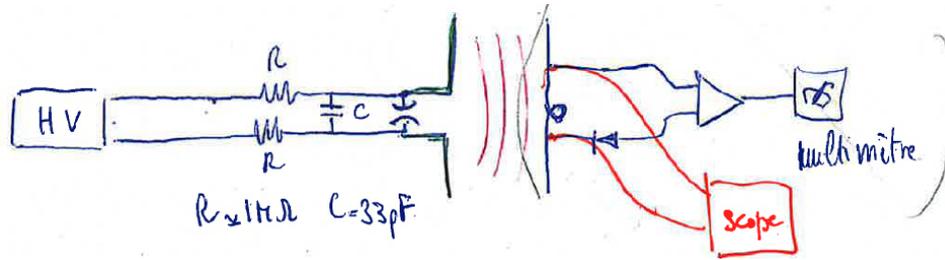


11.3 Génération d’ondes (discussion sur l’expérience ‘micro-ondes’)

Regardons maintenant la question de la production d’ondes électromagnétiques. Nous le faisons à travers une des expériences que vous même construisez cette année.

Note 11.6. En général, de l’énergie électromagnétique est rayonnée lorsqu’une charge est accélérée.

Petit générateur de micro-ondes

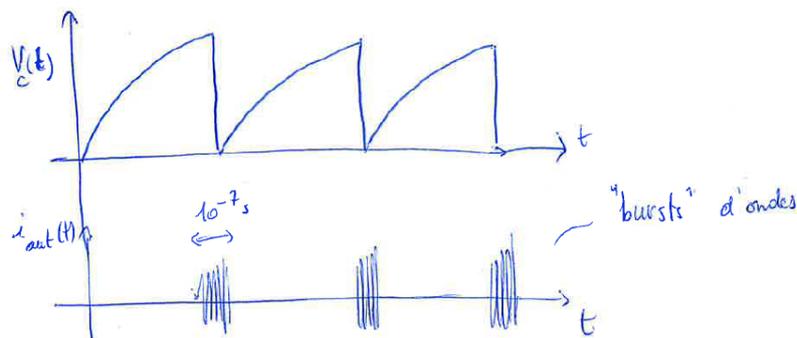


Le générateur de μ -ondes est basé sur le même arrangement que l'expérience sur la ionisation.

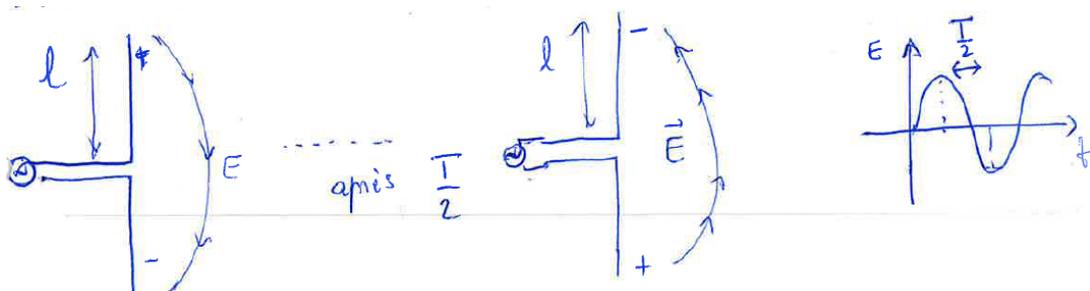
Nous avons, en plus, deux fils qui forment une antenne, et une capacité entre les deux polarités du 'spark-gap'.

Idée : Le condensateur C est chargé par la haute tension (HV), jusqu'au point de 'break-down' (décharge électrique). La décharge 'vide' C de la charge, mais le générateur HV en amène en continu, créant un cycle charge/décharge. Chaque décharge est très abrupte, ce qui donne une sorte de 'gong' à l'antenne, produisant des 'bursts' d'ondes à différentes fréquences.

[on se rappelle de la transformée de Fourier ... la transformée d'une fonction δ est 'plate', c'est à dire contient toutes les fréquences]



Parmi toutes les fréquences, l'antenne, à travers sa géométrie, "sélectionne" celle qui est la plus adaptée pour lancer les ondes, la fréquence résonante. C'est la fréquence qui correspond à avoir une impédance minimale et uniquement résistive [si on voit l'antenne comme un circuit LC : $\omega_{rés} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$]. On peut la visualiser, pour la géométrie de dipôle de l'antenne, comme celle qui correspond à $\lambda = 4l$, ou $l = \frac{\lambda}{4}$



$$\Rightarrow \text{Donc } f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{4l} \quad \text{“quarter-wavelength” dipôle}$$

Dans notre cas, $l \simeq 31 \text{ mm}$, et $f \simeq \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{4 \times 31 \times 10^{-3} \text{ m}} \simeq 2.4 \text{ GHz}$.

Les antennes à dipôle (avec $l \sim \frac{\lambda}{4}$) sont les plus utilisées !

Note 11.7. On pourrait interpréter l'émission de rayonnement en termes du vecteur de Poynting $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$, avec

$$\begin{cases} \vec{E} & \text{issu de la tension } AC \\ \vec{B} & \text{issu du courant } AC \end{cases}$$

Note 11.8. L'optimisation de la longueur de l'antenne est liée à la longueur d'onde du milieu dans lequel on est $l \simeq \frac{\lambda}{4}$.

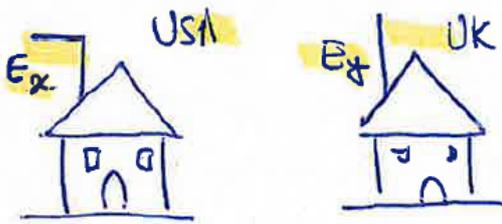
Si on garde la fréquence fixe, et on change le milieu, par ex. avec de l'eau à la place de l'air, la vitesse changera (de c à $\frac{c}{n}$), et λ aussi : $\lambda_0 \rightarrow \frac{1}{f} \frac{c}{n} = \frac{\lambda_0}{n}$. Remarquons que les autres caractéristiques électriques de l'antennes changent aussi.

11.4 Polarisation

Le champ électrique a une certaine direction : c'est la polarisation. Il maintient cette direction (qui, dans le cas d'une onde lancée par une antenne linéaire, est celle de l'antenne même) tout le long de sa propagation dans le vide (ou même dans l'air).

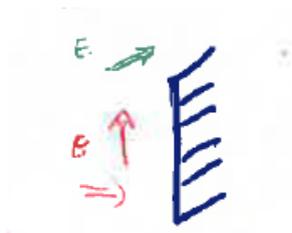
Les antennes de réception doivent être dessinées pour une polarisation spécifique.

Ex. TV (analogique, bien entendu)



$$\text{USA} \begin{cases} \vec{E} = \{E_0 \sin(kz - \omega t), 0, 0\} \\ \vec{B} = \{0, B_0 \sin(kz - \omega t), 0\} \end{cases}$$

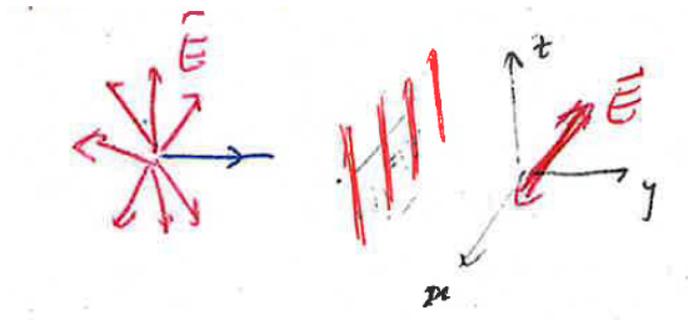
Le fait qu'une onde ait une polarisation bien précise, donc une direction de \vec{E} bien précise, permet de la filtrer.



Par exemple, dans le cas de μ -ondes (polarisées) qui arrivent, en se propageant, sur un “peigne” en métal : si les “dents” sont \perp à \vec{E} , l'onde peut passer. Si elles sont \parallel à \vec{E} , l'onde est arrêtée (car la différence de potentiel qui correspond à \vec{E} est annulée, ou ‘court-circuitée’).

Note 11.9. Le conducteur “court-circuité” la séparation de charges que \vec{E} cherche à imposer

Si l'onde n'est pas polarisée (\vec{E} est dans toutes les directions), on peut la polariser en la faisant passer à travers le "peigne" en métal.



A la sortie du filtre seulement la composante E_x reste.

La même chose se fait par des filtres avec des dimensions bien plus petites pour la lumière visible : polariseurs.

●● Certaines lunettes de soleil sont polarisantes, c'est-à-dire elles filtrent toutes les composantes de \vec{E} sauf une.

Elles coupent la lumière qui n'est pas polarisée verticalement. En particulier celle qui est polarisée horizontalement, comme c'est le cas pour la lumière réfléchiée par la surface de la mer.

Note 11.10. *La direction de la polarisation peut être variée à travers des phénomènes différents, par exemple sous l'effet d'un champ magnétique (effet Faraday).*

11.5 Superposition d'ondes électromagnétiques : ondes stationnaires

Le principe de superposition ne s'applique pas qu'aux champs statiques, mais aussi aux champs oscillants des ondes. A chaque point de l'espace, le champ total (d'onde) est la somme des champs d'ondes des différentes composantes.

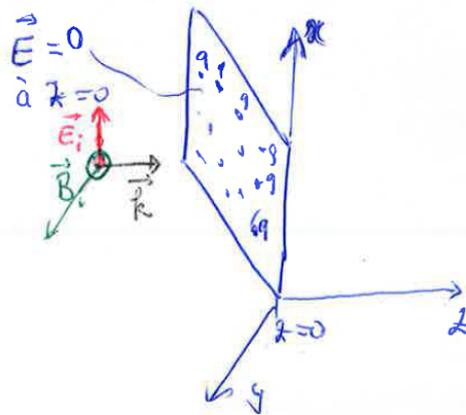
Le premier exemple est celui des ondes stationnaires.

Nous avons vu que les ondes électromagnétiques sont réfléchies par une surface d'un conducteur parfait (avec résistivité nulle).

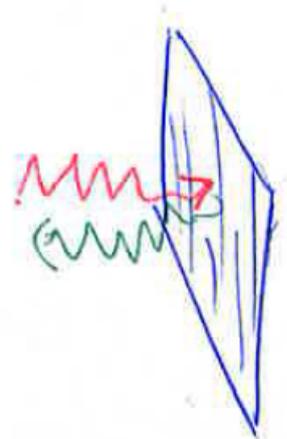
Toutes les charges des conducteurs qui sont libres de bouger le font pour annuler le champ électrique sur la surface.

Considérons une onde plane incidente

$$\begin{cases} \vec{E}_i = \frac{E_0}{2} \cos(kz - \omega t) \hat{x} \\ \vec{B}_i = \frac{E_0}{2c} \cos(kz - \omega t) \hat{y} \end{cases} \quad (11.1)$$



Pour satisfaire $\vec{E} = 0$, à $z = 0$ ($\forall t$) (condition au bord), on a besoin d'avoir une onde réfléchiée!



$$\begin{cases} \vec{E}_r = -\frac{E_0}{2} \cos(-kz - \omega t) \hat{x} \quad (= -\frac{E_0}{2} \cos(kz + \omega t) \hat{x}) \\ \vec{B}_r = \frac{E_0}{2c} \cos(-kz - \omega t) \hat{y} \quad (\text{car } \vec{B}_r = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_r) \end{cases} \quad (11.2)$$

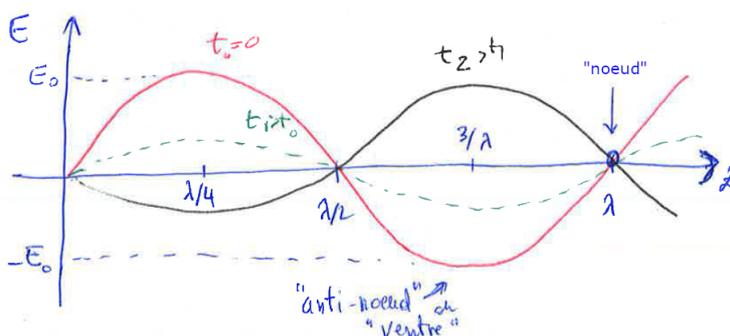
Le champ total sera donc la somme des deux composantes

$$\begin{cases} \vec{E}_{tot} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = \frac{E_0}{2} [\cos(kz - \omega t) - \cos(-kz - \omega t)] \hat{x} = E_0 \sin(\omega t) \sin(kz) \hat{x} \\ \vec{B}_{tot} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = \frac{E_0}{2c} [\cos(kz - \omega t) + \cos(-kz - \omega t)] \hat{y} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kz) \hat{y} \end{cases} \quad (11.3)$$

Les périodicités en z et t ne sont plus couplées, mais elles sont séparées \rightarrow pas de propagation : ondes stationnaires.

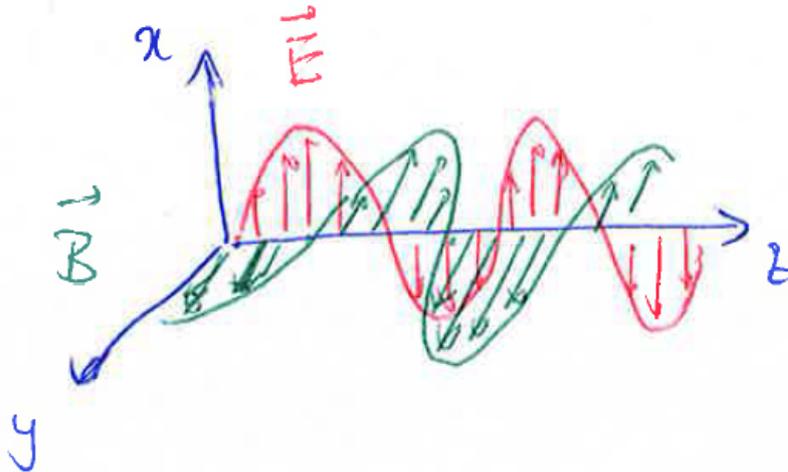
Par ex.

$$\vec{E}_{tot} = E_0 \underbrace{\sin(\omega t)}_{\text{temps}} \underbrace{\sin(kz)}_{\text{espace}} \hat{x} \quad (11.4)$$



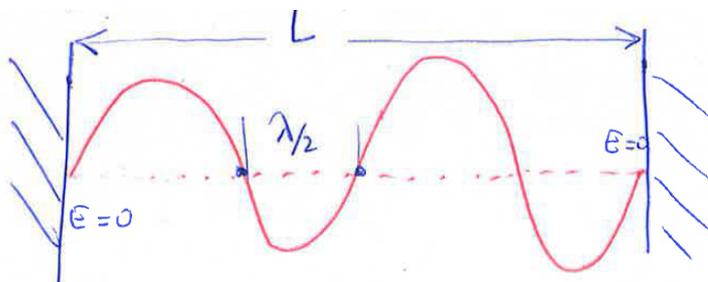
Toute la 'structure' bouge 'haut-bas' avec le temps, mais ne bouge pas en z . Les points de l'espace où $E = 0$ (noeud) et $E = E_{max}$ (anti-noeud) sont toujours à la même place

Note 11.11. \vec{B} et \vec{E} ne sont pas en phase ! Il y a un déphasage de $\frac{\lambda}{4}$.



Note 11.12. Dans la visualisation faite à travers “l’ondoscope”, si les deux extrémités sont bloquées, on remarque qu’il y a un nombre entier de ‘structures’. Que se passe-t-il ?

Cette situation correspond à avoir deux surfaces réfléchissantes des deux côtés (par ex. deux plaques en métal pour les μ -ondes).



- \vec{E} doit être = 0 aux deux extrémités
 - la distance entre noeuds doit être $\frac{\lambda}{2}$
- \Rightarrow on doit avoir un nombre entier de $\frac{\lambda}{2}$ entre les deux surfaces

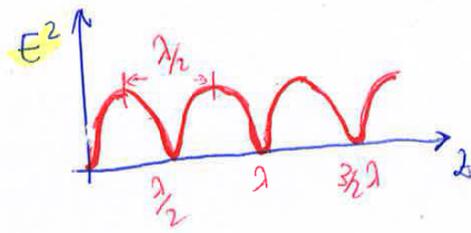
$$\boxed{L = m \frac{\lambda_m}{2}} \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (11.5)$$

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{vm}{2L} \quad (\text{“modes propres”}) \quad (11.6)$$

Comme la longueur d’onde est “quantisée”, ça l’est aussi le nombre d’onde, et la fréquence. Ce phénomène est très commun, en présence d’ondes et de conditions au bord qui annulent le champ d’onde.

Ex. ondes dans l’eau (piscine, mers, etc.), on fours à μ -ondes. Le plat des fours à μ -ondes tourne justement pour éviter de ‘cuire’ trop sur un anti-noeud, et ne pas cuire du tout sur un noeud ...

Note 11.13. Dans beaucoup des cas (y compris celui de votre expérience sur les μ -ondes), la mesure, ou l’effet, est sensible à $|\vec{E}|$, ou E^2 (intensité), plutôt qu’à E .

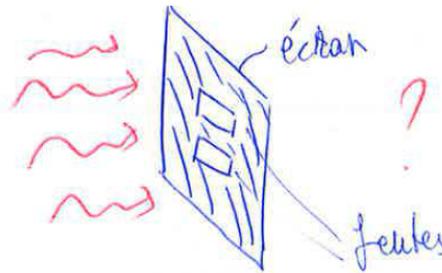


La distance entre maxima est $\lambda/2$ pour E^2 (ou $|E|$), et non pas λ .

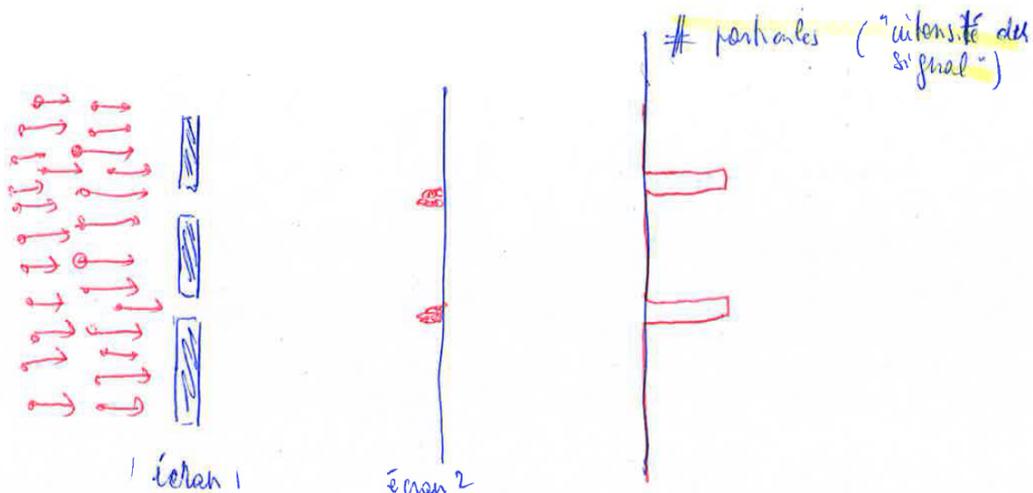
11.6 Superposition d'ondes électromagnétiques : interférence

Le phénomène d'interférence peut être introduit dans le cadre du dualisme de l'interprétation de la lumière comme onde ou comme ensemble de particules.

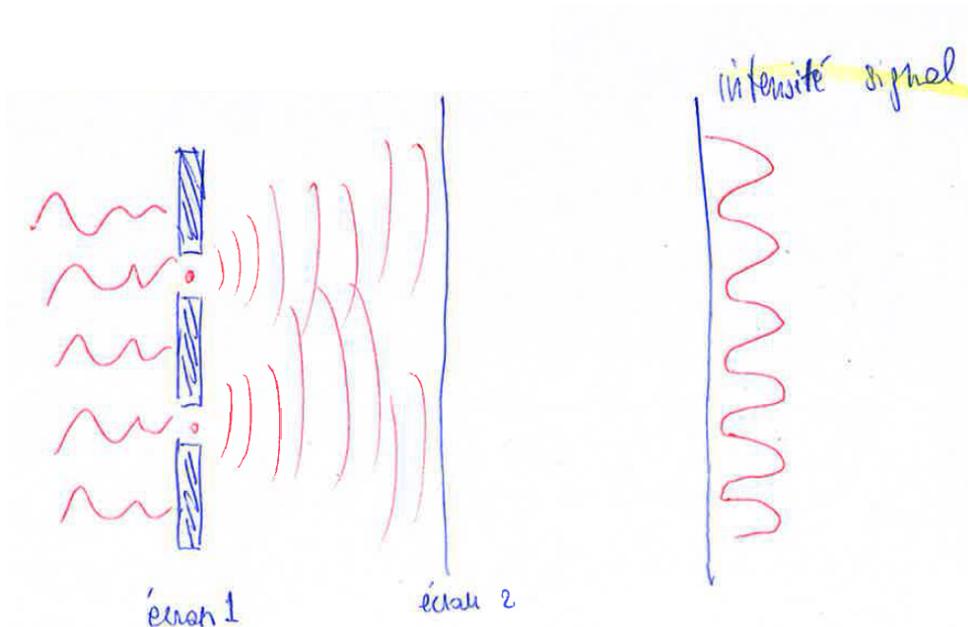
On considère l'expérience de Young : de la lumière arrive sur un écran avec deux fentes. Que voit-on derrière ?



Vision 'particules' (Newton)



Vision ‘ondes’ (Huygens)



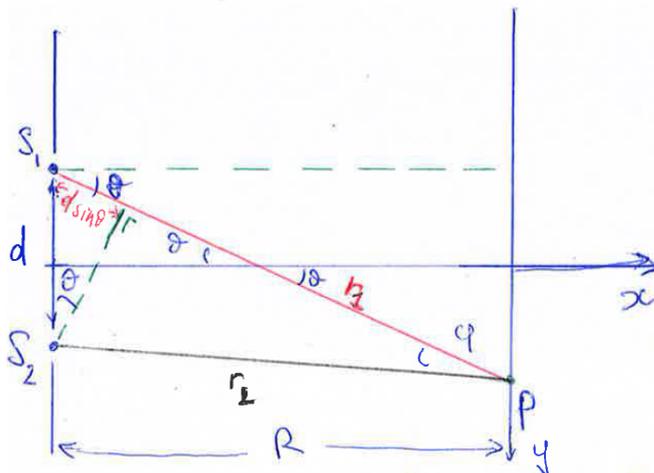
⇒ La réponse expérimentale est claire et nette : avec une lumière d’un faisceau laser on a une distribution du signal en ‘franges’. Donc nous devons considérer la vision ‘ondes’. Faisons le calcul pour prédire

- l’existence de maxima et de minima, et leur position
- la distribution de l’intensité

Note 11.14. Nous considérons une seule source de lumière pour les deux fentes, ce qui veut dire que les ondes qui sortent des fentes sont cohérentes entre elles, et avec la même polarisation.

Que veut dire que deux ondes sont “cohérentes” ?

⇒ Elles ont la même fréquence, et elles maintiennent (en principe, jusqu’à l’infini) la même relation de phase entre elles.



Au point P, les champs électriques issus de S₁ et S₂ sont, respectivement :

$$\begin{cases} S_1 : E_0 \sin(kr_1 - \omega t) \\ S_2 : E_0 \sin(kr_2 - \omega t) \end{cases} \quad (11.7)$$

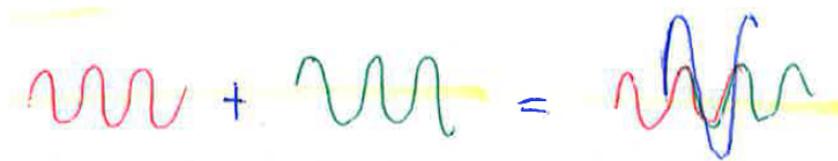
Note 11.15. La figure exagère la séparation entre les deux rayons. En effet, $R \gg d$, et $\varphi \sim 0$.

Champ d'onde total à P :

$$E_{tot} = E_0 \sin(kr_1 - \omega t) + E_0 \sin(kr_2 - \omega t) = E_0 \{ \sin(kr_1 - \omega t) + \sin(kr_2 - \omega t) \} \quad (11.8)$$

Pour trouver les max et le min de l'intensité nous n'avons pas besoin d'un calcul compliqué.

La valeur de E_{tot} sera maximale quand les deux termes auront la même phase, c'est-à-dire donneront lieu à une interférence 'constructive'.



$$\Rightarrow kr_1 - \omega t = kr_2 - \omega t + m2\pi \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11.9)$$

$$kr_1 = kr_2 + m2\pi \quad ; \quad \text{mais} \quad \boxed{r_1 - r_2 \simeq d \sin \vartheta} \quad (11.10)$$

Note 11.16. Le signe d'égal, c'est-à-dire $r_1 - r_2 = d \sin \vartheta$, est valable, strictement parlant, uniquement pour $\frac{R}{d} \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow k(d \sin \vartheta) = m2\pi, \quad \text{ou} \quad d \sin \vartheta = m \frac{2\pi}{k} = m\lambda \quad (11.11)$$

$$\boxed{\sin \vartheta = m \frac{\lambda}{d}} \quad \text{interférence constructive (signal fort)} \quad (11.12)$$

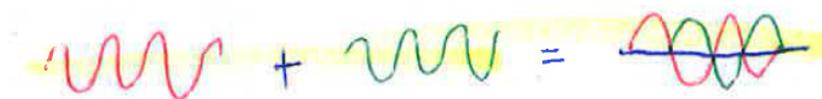
Note 11.17. En général, $R \gg d$, et $[\sin \vartheta \simeq \tan \vartheta \simeq \frac{y}{R}] \Rightarrow y \simeq R \sin \vartheta$

Donc on peut écrire que pour les maxima (interférence constructive), $y_{max}^{(m)} = R \sin \vartheta^{(m)} = Rm \frac{\lambda}{d}$, et la distance entre maxima adjacents et

$$\boxed{y_{max}^{(m+1)} - y_{max}^{(m)} = \frac{\lambda R}{d}} \quad (11.13)$$

Note 11.18. $\Delta y_{max} \propto \frac{1}{d}$: plus grand si les fentes sont plus proches !

La valeur de E sera minimale quand les deux termes issus de S_1 et S_2 seront en opposition de phase, c'est-à-dire donneront lieu à une interférence "destructive".



Ceci arrive pour

$$kd \sin \vartheta = \left(m + \frac{1}{2}\right) 2\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{d \sin \vartheta = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda} \quad (11.14)$$

et, comme $\sin \vartheta \sim \frac{y}{R}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y_{min} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda R}{d}} \quad (11.15)$$

Si on bouge le long de y on devrait trouver une succession de max et min d'intensité.

Note 11.19. *On peut utiliser l'interférence d'une double fente pour :*

- mesurer λ si on connaît d \Rightarrow spectromètre
- mesurer d si λ est connu \Rightarrow nano-technologie

Maintenant nous voulons trouver la forme de l'intensité (et non seulement les positions de max et min) en fonction de y .

En effet le calcul est le même, mais on veut trouver l'intensité I .

Utilisons le formalisme complexe pour cet exercice :

$$S_1 \quad \rightarrow \quad E_1(r_1, t) = E_0 e^{i(kr_1 - \omega t)} \quad (11.16)$$

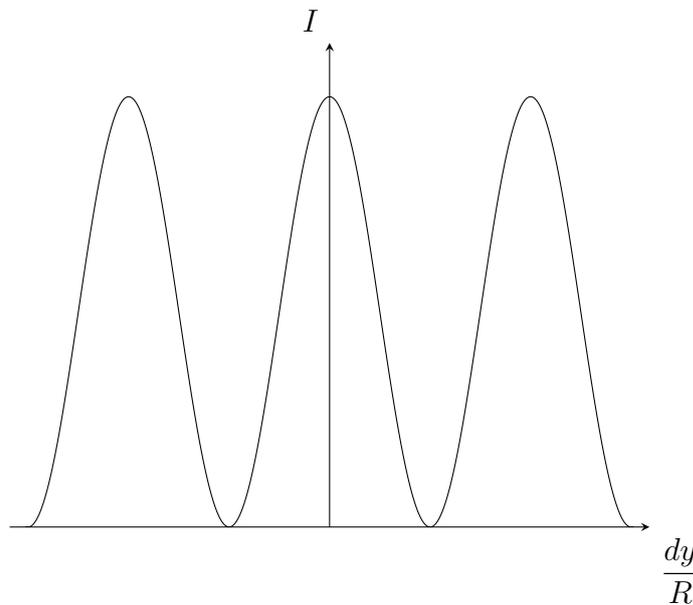
$$S_2 \quad \rightarrow \quad E_2(r_2, t) = E_0 e^{i(kr_2 - \omega t)} \quad (11.17)$$

Note 11.20. *Comme auparavant, on assume la même polarisation, donc on peut calculer uniquement avec les quantités scalaires.*

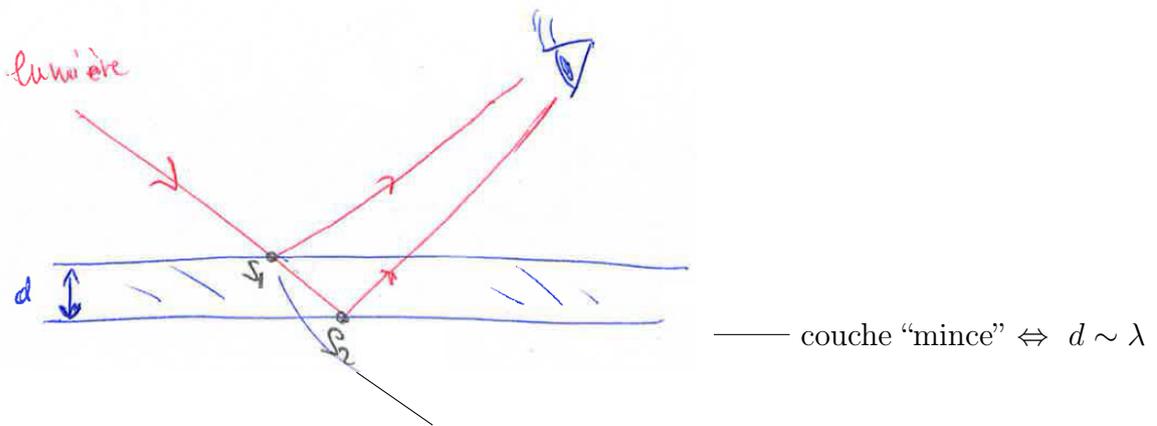
$$E_{tot} = E_{tot}(\vartheta, t) = E_1 + E_2 = E_0 e^{-i\omega t} [e^{ikr_1} + e^{ikr_2}] \quad (11.18)$$

Intensité $\propto |E_{tot}|^2 = E_{tot} \cdot E_{tot}^* \leftarrow$ complexe conjugué

$$\begin{aligned}
 I &= \text{const. } E_0^2 [e^{ikr_1} + e^{ikr_2}] [e^{-ikr_1} + e^{-ikr_2}] = \\
 &= \text{const. } E_0^2 [1 + e^{ik(r_1-r_2)} + e^{ik(r_2-r_1)} + 1] = \\
 &= \text{const. } E_0^2 [2 + e^{ik(r_1-r_2)} + e^{-ik(r_1-r_2)}] \stackrel{(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2 \cos \alpha)}{=} \\
 &= \text{const. } E_0^2 \{2 + 2 \cos[k(r_1 - r_2)]\} = \\
 & \hspace{20em} (11.19) \\
 &= \text{const. } 2E_0^2 \left\{ 1 + \cos \left[\underbrace{k(r_1 - r_2)}_{2\alpha} \right] \right\} \stackrel{(\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1)}{=} \\
 &= \text{const. } 2E_0^2 \left\{ 2 \cos^2 \left[\frac{k}{2}(r_2 - r_1) \right] \right\} = \\
 &= \text{const. } 4E_0^2 \cos^2 \left[\frac{k}{2}(r_1 - r_2) \right] \simeq \text{const. } 4E_0^2 \cos^2 \left(\frac{k}{2} \frac{dy}{R} \right)
 \end{aligned}$$

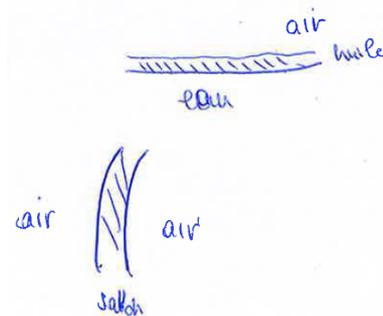


Interférence dans les couches minces

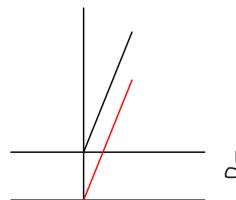


on a deux “sources” dont la distance est $\sim 2d$.
Elles peuvent donner lieu à interférence constructive ou destructive.

La “couche” peut être de l’huile sur l’eau, ou la ‘paroi’ d’une bulle de savon, etc. Pour ces objets, on voit des structures de couleur.



En considérant une géométrie simple, avec réflexion perpendiculaire (ou presque), on considère qu’il y a interférence constructive quand la différence des parcours optiques, $2d$, est un multiple entier de la longueur d’onde : $2d = m\lambda_n$.



Note 11.21. Ici ce qui compte est la longueur d’onde dans la couche $\lambda_n = \frac{\lambda}{n}$, où λ est la longueur d’onde dans le vide, et $n =$ indice de réfraction.

Si la lumière qui arrive sur la couche est blanche, donc contient tout un spectre de longueurs d’onde, il y aura, pour une épaisseur donnée d , seulement une précise longueur d’onde λ_0 , t.q.

$$\boxed{\frac{\lambda_0}{n} = \frac{2d}{m}} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (11.20)$$

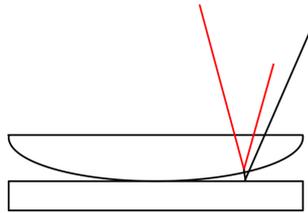
C'est cette longueur d'onde (= couleur) qui sera donc vue avec une grande intensité relative.

Mais si on change légèrement l'angle de vue, la différence de chemin optique ne sera plus exactement $2d$, et des couleurs différentes donneront lieu à interférence constructive (ou destructive).

Donc, en pratique, une série de couleurs seront vues une à côté de l'autre, car la source de lumière n'est pas juste un point !

Des variations de l'épaisseur de la couche peuvent aussi donner le même effet (et être détectées ainsi).

Quand on a une surface courbée sur une autre surface, qui est plate (ex. lentille sur verre plat).

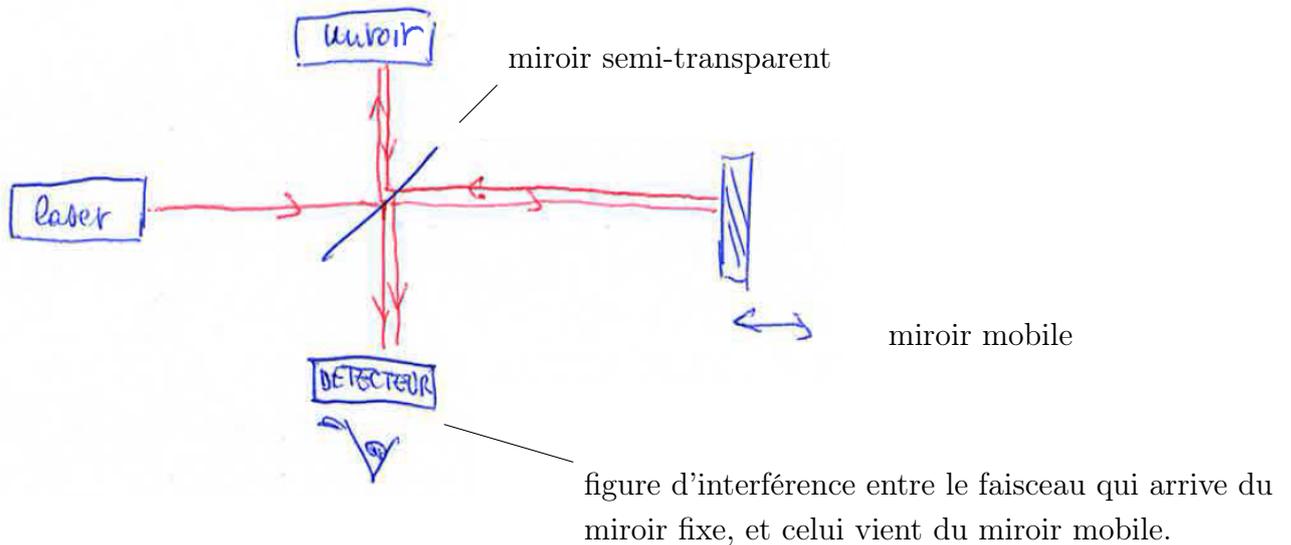


On a le même effet, et une série de cercles concentriques (“anneaux de Newton”).

Applications :

- mesure de petites épaisseurs/petites distances
- couches “anti-reflexe” : on peut éviter des multiples réflexions entre couches (qui gênent dans les lunettes, ou dans les caméras), en appliquant une couche d'épaisseur choisie pour donner lieu à interférence destructive pour la lumière qui est réfléchi sur les deux parties de la couche.

Ex. d'instrument de mesure basé sur le principe de l'interférence : interféromètre de Michelson.

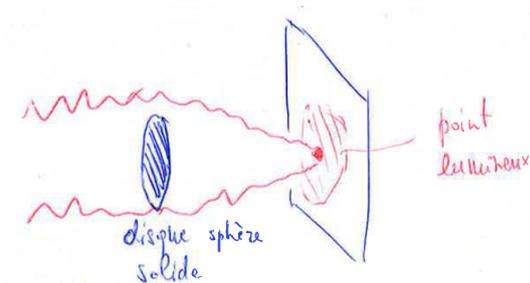


Cet instrument a permis de mesurer le vitesse de la lumière (le fait qu'elle ne change pas → absence de l'«éthère») et, plus récemment, les ondes gravitationnelles.

11.7 Superposition d'ondes électromagnétiques : diffraction

La compréhension des phénomènes d'interférence a poussé l'idée que la lumière est une onde, mais c'est seulement l'analyse et l'explication de la diffraction qui a fait passer l'idée de façon globale.

Car l'idée de base, et le phénomène, sont encore plus 'frappants'.



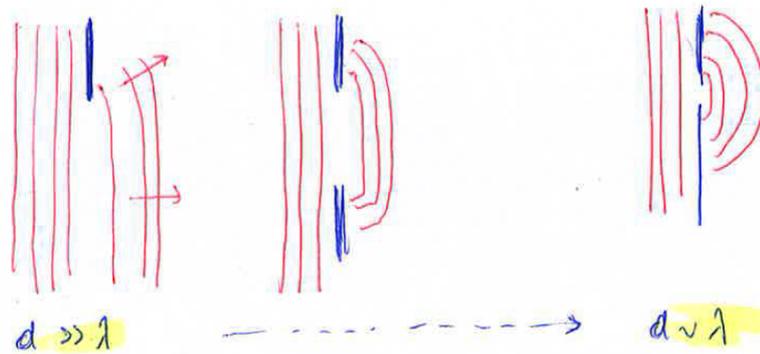
l'apparition du point lumineux au centre derrière l'obstacle, en forme de disque (ou de sphère) solide, ne laisse plus de doutes.

Note 11.22. *Les bords du disque (ou de la sphère) doivent être très lisses.*

Théorie par Fresnel (~ 1820), puis démonstration expérimentale par Arago peu après. Considérons un système très simple : un écran avec une seule fente.



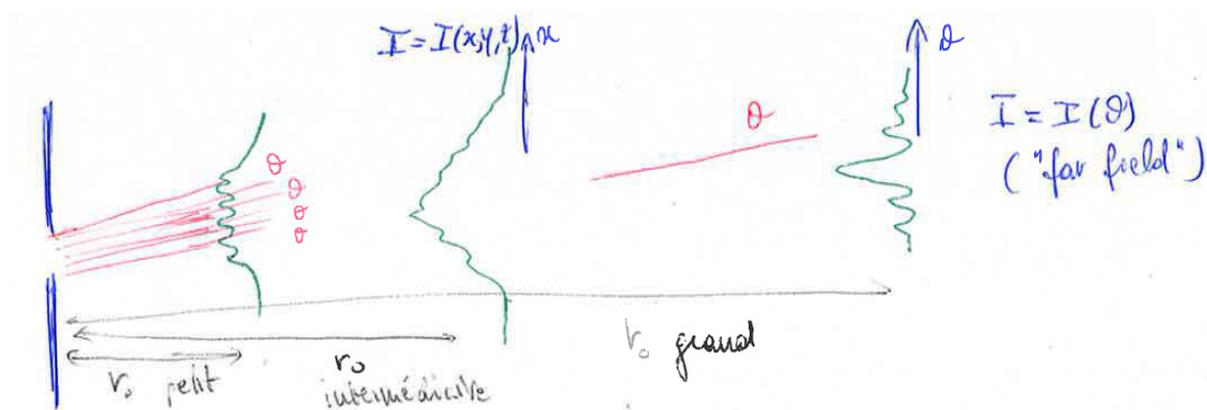
Note 11.23. Un élément important dans la diffraction à travers une fente est la taille de la fente, par rapport à la longueur d'onde



Plus on 'confine' spatialement la lumière, moins on la 'confine' sur l'angle.

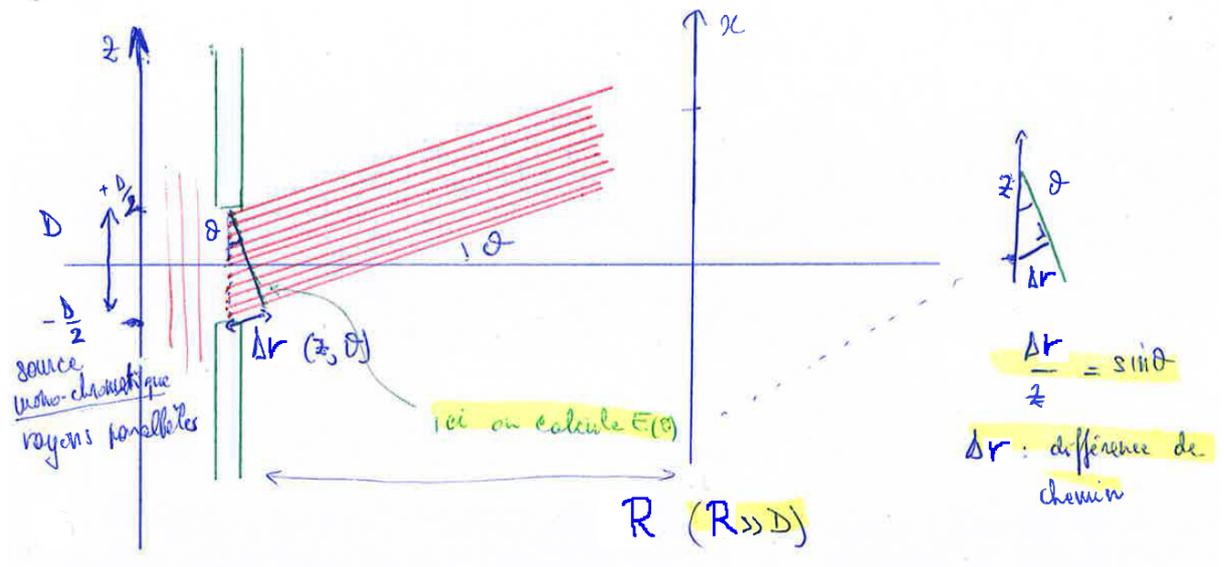
Note 11.24. On distingue deux situations : diffraction de $\begin{cases} \text{Fresnel} \\ \text{Fraunhofer} \end{cases}$

selon la distance à laquelle on observe : $\begin{cases} \text{Fresnel : petite distance} \\ \text{Fraunhofer : grande distance} \end{cases}$



⇒ Nos calculs s'appliquent au cas de Fraunhofer (plus simple!), celui qui correspond à une grande distance d'observation (rayons parallèles).

Calcul de la diffraction à une fente (diffraction de Fraunhofer)



Qualitativement, il est clair que pour $\vartheta = 0$ il y aura un point lumineux sur l'écran. C'est notre point de référence $\Delta r(z = 0, \vartheta = 0) = 0$. Mais pour $\vartheta \neq 0$, tout dépend de l'interférence, constructive ou destructive, entre les rayons dont la différence de chemin est Δr . En effet, la diffraction n'est rien d'autre que l'interférence d'un grand nombre de sources ! Faisons le calcul avec la notation complexe, c'est plus simple !

$$E(\vartheta) = \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} E_0 e^{-i\omega t + ik\Delta r(z, \vartheta)} dz$$

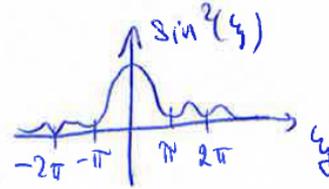
ça c'est la valeur du champ sur le front d'onde après le passage à travers la fente. La propagation après sera identique pour tous les rayons.

Mais $\Delta r(z, \vartheta) = z \sin \vartheta$

$$\begin{aligned} E(\vartheta) &= E_0 e^{-i\omega t} \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} e^{ikz \sin \vartheta} dz = E_0 e^{-i\omega t} \frac{1}{ik \sin \vartheta} e^{ikz \sin \vartheta} \Big|_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} = \\ &= E(\vartheta) = \frac{E_0 e^{-i\omega t}}{ik \sin \vartheta} \left[e^{ik \frac{D}{2} \sin \vartheta} - e^{-ik \frac{D}{2} \sin \vartheta} \right] = [e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i \sin \alpha] \\ &= \frac{E_0 e^{-i\omega t}}{ik \sin \vartheta} 2i \sin \left(k \frac{D}{2} \sin \vartheta \right) = \\ &= E_0 e^{-i\omega t} D \frac{1}{\frac{kD}{2} \sin \vartheta} \sin \left(\frac{kD}{2} \sin \vartheta \right) \end{aligned} \tag{11.22}$$

Intensité $I \propto E \cdot E^* = \text{const. } E_0^2 \times D^2 \frac{\sin^2\left(\frac{kD}{2} \sin \vartheta\right)}{\left(\frac{kD}{2} \sin \vartheta\right)^2}$ (11.23)

Fonction $\frac{\sin^2(\xi)}{\xi^2}$:



Minima de l'intensité : $\xi = m\pi$, $m = \pm 1, 2, \dots$ (pas $m = 0$, qui est un max!)
donc pour les valeurs de l'angle $\vartheta = \vartheta_m$ telles que :

$$\frac{kD}{2} \sin \vartheta_m = m\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin \vartheta_m = \frac{2\pi m}{kD}}; \quad (11.24)$$

comme ϑ est petit (Fraunhofer!), $\sin \vartheta_m \sim \vartheta_m$, et les minima sont $\boxed{\vartheta_m \simeq \frac{2\pi m}{kD}}$, ou

$$\boxed{\vartheta_m = \frac{m\lambda}{D}}$$

Sur l'écran, à distance R : $\tan \vartheta_m = \frac{x_m}{R} \simeq \vartheta_m$

$$x_m \simeq R\vartheta_m = \frac{Rm\lambda}{D}$$

Note 11.25. $m = 0$ est un max, avec $\frac{\sin^2(\xi)}{\xi^2} \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} 1$

Les maxima seront situés entre les minima.

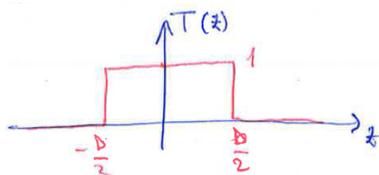
Note 11.26. L'espacement entre minima (et entre maxima, pour lesquels nous ne l'avons pas calculé explicitement), $\Delta x = x_{m+1} - x_m = \frac{l\lambda}{D}$, est inversement proportionnel à la

largeur de la fente et directement proportionnel à la longueur d'onde $\begin{cases} \Delta x \propto \frac{1}{D} \\ \Delta x \propto \lambda \end{cases}$

11.8 Relation entre diffraction et transformée de Fourier

Dans notre calcul, $E = E_0 e^{-i\omega t} \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} e^{ikz \sin \vartheta} dz$

On peut voir cette intégrale comme la transformée de Fourier de la fonction spatiale qui décrit la forme de la fente,



$$\text{car } E = E_0 e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} dz T(z) e^{ikz \sin \vartheta} \quad (11.25)$$

avec la correspondance $k \sin \vartheta \leftrightarrow \tilde{\omega}$

Ceci veut dire que le champ électrique peut être vu comme le ‘spectre’ de la fonction qui décrit la fente, $T(z)$. Donc $T(z)$ peut être reconstruite en faisant la transformée inverse du champ électrique.

$$\text{Si } E = E_0 e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} dz T(z) e^{ikz \sin \vartheta} = E_0 e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} dz T(z) e^{i\tilde{\omega} z}, \quad (11.26)$$

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{\omega} \frac{E}{E_0} e^{i\omega t} e^{-i\tilde{\omega} z} =, \quad \text{avec } \tilde{\omega} = k \sin \vartheta \\ &= \frac{1}{E_0} e^{i\omega t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{\omega} E e^{-i\tilde{\omega} z} \end{aligned} \quad (11.27)$$

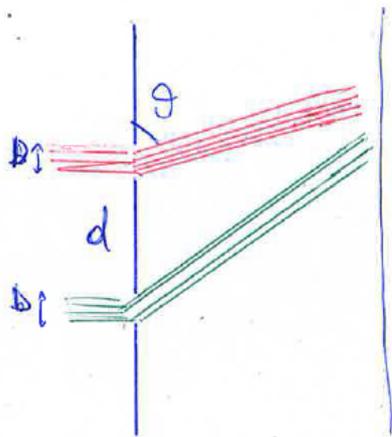
On peut imaginer pas mal de situations dans lesquelles on ne connaît pas à priori la forme de $T(z)$, et par contre on peut mesurer $E(z, \vartheta)$.

Diffraction et interférence combinées

Diffraction et interférence ne sont que deux aspects du même phénomène (la superposition d’ondes cohérentes avec des phases différentes), donc en général se combinent.

Prenons l’exemple de la double fente dans l’expérience de Young sur l’interférence. A l’intérieur de chaque fente il y a aussi de la diffraction !

Regardons semi-quantitativement ce qui se passe.



$$\text{diffraction : } \sim \frac{\lambda}{D} \quad (11.28)$$

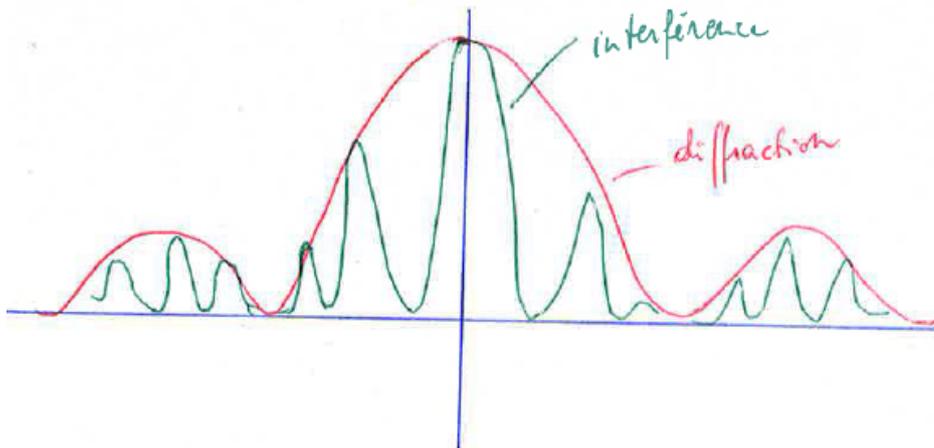
$$\text{interférence : } \sim \frac{\lambda}{d} \quad (11.29)$$

$$(11.30)$$

Déphasage entre les deux fentes : $kd \sin \vartheta$ (doit être $= m \frac{\lambda}{d}$ pour que l'interférence soit constructive)

L'intensité résultante des deux effets sur l'écran sera :

$$I \sim I_0 \underbrace{\left[\frac{\sin^2 \left(\frac{kD}{2} \sin \vartheta \right)}{\left(\frac{kD}{2} \sin \vartheta \right)^2} \right]}_{\text{diffraction d'une fente}} \underbrace{\cos^2 \left(\frac{k}{2} d \sin \vartheta \right)}_{\text{interférence des deux fentes}} \quad (11.31)$$



Note 11.27. La résolution d'objets distincts est possible si leur séparation est $\gtrsim \lambda$. Pour voir des structures plus petites que λ_{visible} on doit donc regarder avec de la lumière qui a $\lambda \ll \lambda_{\text{visible}}$. Comment faire ?

11.9 Diffraction de rayons-X

En 1895 Roentgen observa la production de rayons (qu'il appela 'X') qui laissaient une image sur du papier photographique à partir des collisions d'électrons accélérés par un potentiel élevé ($\sim 10 - 100 \text{ kV}$) contre des parois de métal ou de verre. Les rayons-X

n'étaient clairement pas faits de particules chargées, car ils n'étaient pas influencés par \vec{E} ou \vec{B} .

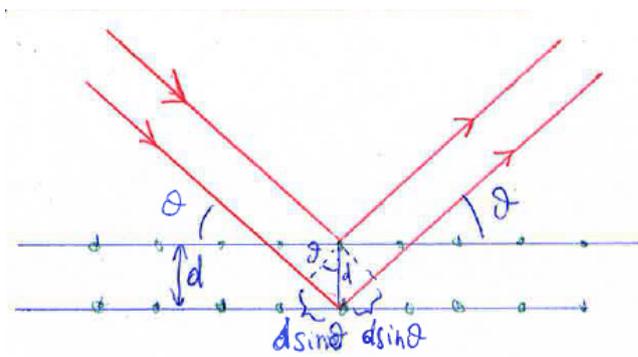
On sait que les particules chargées émettent de la radiation électromagnétique quand elles sont accélérées/décélérées → Ces rayons sont donc des ondes électromagnétiques!

Mais pourquoi on ne voyait pas des facilement phénomènes d'interférence/diffraction comme pour la lumière visible? → simplement parce que les fentes et réseaux n'avaient pas de dimensions adéquates!

Dans les réseaux de diffraction conventionnels l'espacement est $\sim 10^{-6}$ m, et $\lambda_{\text{rayons-X}} \ll 10^{-6}$ m! ($\lambda_{\text{rayons-X}} \sim 10^{-11} \div 10^{-8}$ m).

Il est très difficile d'imaginer construire des réseaux avec une séparation si petite. Mais une autre idée est venue à l'esprit : utiliser la structure des cristaux (arrangement régulier des atomes en réseau) comme un réseau de diffraction efficace.

Diffraction des rayons-X par un cristal



- réflexion sur chaque plan cristallin
- on observe un signal si l'interférence est constructive

Conditions pour l'interférence constructive :

$$\text{déphasage} = k2d \sin \vartheta = m2\pi, \text{ ou} \quad (11.32)$$

$$2d \sin \vartheta = m \frac{2\pi}{k} = m\lambda \quad \underline{\text{condition de Bragg}} \quad (11.33)$$

Par exemple, si on connaît λ et on mesure ϑ , on peut extraire la distance entre plans cristallins, d .

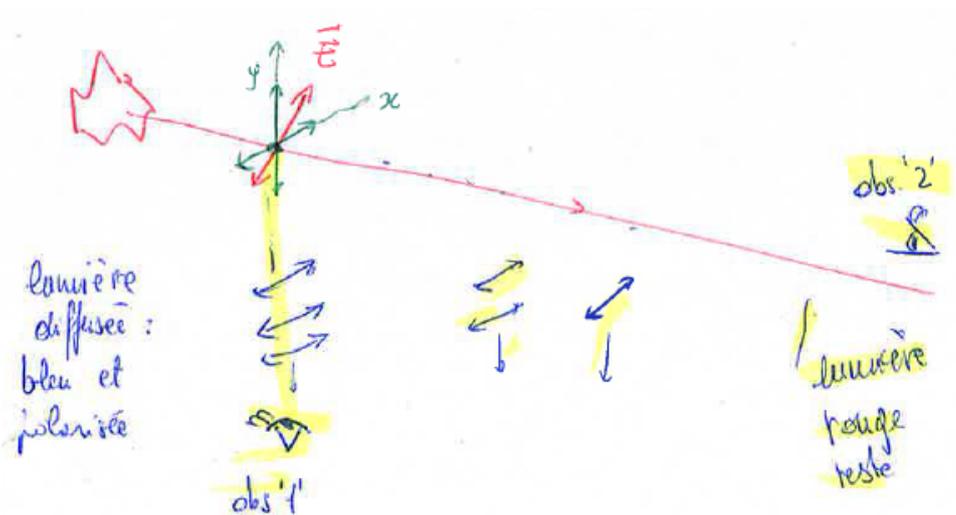
Dans la réalité, les figures de diffraction sont très compliquées, car les cristaux ont des structures 3D, et il y a plusieurs familles de plans cristallins. L'analyse est très compliquée, mais amène de l'information très importante, et inaccessible par d'autres moyens.

On utilise la diffraction des rayons X, par exemple, pour reconstruire la structure des protéines.

11.10 Diffusion des ondes électromagnétiques

Pourquoi le ciel est bleu ? Et le coucher de soleil rouge ? ...et le lait blanc ?

- Le ciel vu de la lune, ou de l'espace, est évidemment noir , sauf si on regarde directement vers le soleil.
- Ce qui donne la couleur au ciel est la diffusion de la lumière dans l'atmosphère.
- La lumière voyage sur une ligne droite dans l'espace vide, mais lorsqu'il y a des particules de taille pas trop différente de la longueur d'onde, elle est diffusée. Au niveau microscopique, les molécules ont des charges qui sont mises en mouvement oscillatoire par le champ \vec{E} de l'onde.



Ces charges ré-émettent de la radiation perpendiculairement à leur oscillation. Par exemple, verticalement pour la composante de l'oscillation selon x .

L'efficacité de ce processus de diffusion, dans la partie visible du spectre, est $\propto \frac{1}{\lambda^4}$.

Raison : les grandes λ ne 'voient' pas les petites particules de poussière (par ex. O_2 , N_2 ont une taille ~ 0.2 nm).

Donc, pour les deux parties extrêmes du spectre visible

$$\frac{\text{efficacité de diffusion (bleu)}}{\text{efficacité de diffusion (rouge)}} \sim \frac{\lambda_{\text{rouge}}^4}{\lambda_{\text{bleu}}^4} = \left(\frac{700 \text{ nm}}{400 \text{ nm}}\right)^4 \sim 9.4$$

- La composante bleue de la lumière est donc diffusée presque $10\times$ plus efficacement que la composante rouge.
- L'observateur '1' voit donc un ciel bleu (et une lumière partiellement polarisée).
- Au point de l'observateur '2', lorsque la lumière a fait un long trajet à travers l'atmosphère, il ne reste que la lumière rouge : c'est la couleur du coucher de soleil !
- Et les nuages ? Elles contiennent une grande concentration de gouttelettes d'eau, ou de cristaux de glace, qui diffusent la lumière aussi. Mais à cause de la forte concentration,

et de la plus grande taille de ces particules ($\gg \lambda$), toute la lumière a plus de chance d'être diffusée, donc les nuages apparaissent blancs.

La même chose arrive pour le lait, qui a des particules de graisse assez grande, et à haute concentration. Le lait écrémé, en fait, a presque une couleur bleu, surtout si dilué avec de l'eau....

Note 11.28. *La diffusion plus grande pour la couleur bleue que pour le rouge est aussi la raison derrière le choix de la couleur rouge des flux de brouillard arrière des voitures.*