

Rappel

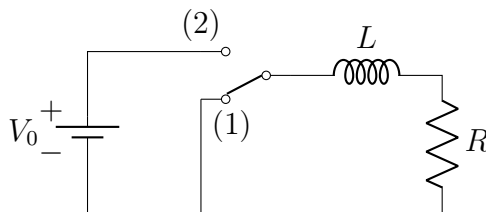
 $V_L :$ 

$$V_L \equiv -\mathcal{E}_{ind} = V_a - V_b = +L \frac{di}{dt} > 0 \quad (9.8)$$

$L$  ‘essaye’ de réduire  $i$  quand  $i$  augmente. C’est pour ça qu’on appelle  $\mathcal{E}_{ind}$  ‘back emf’. Si  $i$  diminue,  $L \frac{di}{dt} < 0$ , et  $V_L < 0$ .

**Note 9.9.** Dans la pratique, une résistance  $R$  est toujours associée à  $L$  (il est difficile d’avoir un fil en forme solénoïdale sans aucune résistance).

## 9.2 Circuits RL



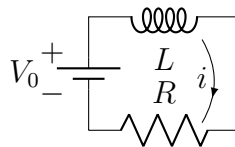
on cherche

$$i(t) = ?$$

$$V_L(t) = ?$$

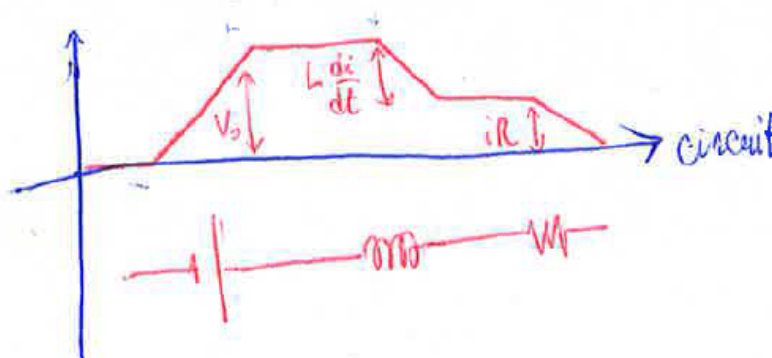
A  $t = 0$ ,  $i(t = 0) = 0$

(a) On passe l’interrupteur de la position (1) à la position (2) : on connecte la batterie.



Kirchhoff :

$$V_0 + \mathcal{E}_{ind} = iR \quad ; \quad \mathcal{E}_{ind} = -L \frac{di}{dt} \quad (9.9)$$



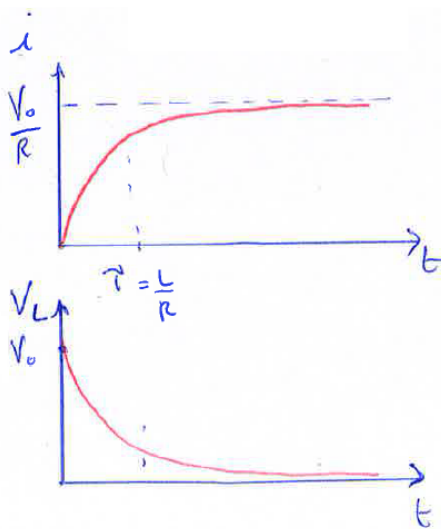
$$V_0 = L \frac{di}{dt} + iR \quad (9.10)$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \frac{V_0 - iR}{L} = -\frac{i - V_0/R}{L/R} \quad ; \quad \text{séparation des variables} \\ \frac{di}{i - V_0/R} &= -\frac{dt}{L/R} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \ln[i(t) - \frac{V_0}{R}] \right\}_0^t = -\frac{t}{L/R} \\ \frac{i(t) - V_0/R}{i(0) - V_0/R} &= e^{-\frac{t}{L/R}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{i(t) = \frac{V_0}{R} \left\{ 1 - e^{-\frac{t}{L/R}} \right\}} \end{aligned} \quad (9.11)$$

Le temps caractéristique du problème est donc le paramètre dans l'exponentielle :  $\tau = \frac{L}{R}$ .  
Tension à travers  $L$  :

$$V_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{d}{dt} \left[ \frac{V_0}{R} \left\{ 1 - e^{-\frac{t}{L/R}} \right\} \right] = -L \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{L/R}} \left( -\frac{R}{L} \right) = V_0 e^{-\frac{t}{L/R}} \quad (9.12)$$



$V$  est grande au début, lorsque la variation de  $i$  est grande, et tend à 0 quand le courant ne varie plus.

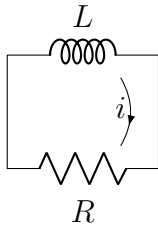
Le courant a ‘besoin de temps’ pour monter lorsqu’on applique soudainement la tension, et le fait sur l’échelle de temps :  $\tau = \frac{L}{R}$ .

**Note 9.10.**  $R$ , par contre, donne lieu à dissipation, mais pas à un délai.

On peut imaginer ce qu’il se passe quand on coupe un courant : le circuit essaye de contrer la réduction de courant en générant la ‘back emf’, donc une grande (si on coupe très rapidement) tension à travers  $L$ .

**Note 9.11.** C’est la ‘back emf’ qui cause des étincelles [et, par conséquent, même des feux parfois !] quand on retire une prise électrique très rapidement lorsque l’appareil connecté est en fonction. C’est un défi technologique significatif de construire des interrupteurs qui résistent à des variations très rapides sur des gros courants, donc des grandes emf.

Revenons à notre circuit  $LR$ , et considérons l'étape (b) : on met l'interrupteur en position (1) : on déconnecte la batterie



$$i(t=0) = \frac{V_0}{R} \quad ; \quad V_L(t=0) = 0 \quad (\text{juste avant de fermer l'interrupteur})$$

Kirchhoff :

$$\mathcal{E}_{ind} = iR$$

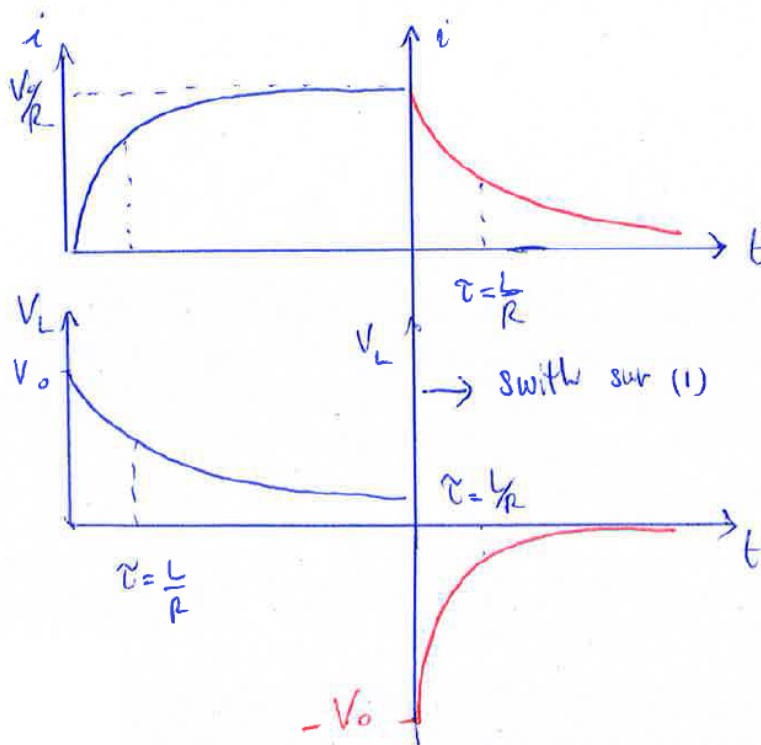
$$-L \frac{di}{dt} = iR$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i \quad \Rightarrow \quad \text{séparation des variables} \quad \frac{di}{i} = -\frac{dt}{L/R}$$

$$\Rightarrow \quad i(t) = i(0)e^{-\frac{t}{L/R}} = \frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{L/R}} \quad (9.13)$$

Tension à travers  $L$  :

$$V_L(t)L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{L/R}} \cdot \left(-\frac{R}{L}\right) = -V_0 e^{-\frac{t}{L/R}} \quad (9.14)$$



A la place de 'switcher' à la main entre (1) et (2), on peut donner une tension carrée (ON/OFF), avec une certaine fréquence.

Naturellement, on peut varier la constante de temps  $\tau = L/R$  en variant  $R$  et/ou  $L$ .

Question : qu'est-ce qu'il se passe si la constante de temps  $\tau$  devient comparable avec la période de la fonction carrée de la tension ?

→ le courant devient plus 'lisse', et de même pour  $V_L$ . Si on augmente la fréquence de la forme d'onde d'entrée ( $V_0$ ), le circuit n'arrive plus à 'répondre' : les variations rapides de  $V_0$  seront coupées : filtrage passe-bas.

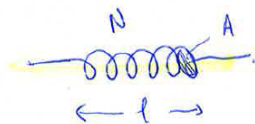
## 9.3 Énergie magnétique

**Note 9.12.** Cet effet de filtrage est similaire à celui qu'on a déjà vu pour un circuit  $RC$ . Dans le cas de  $C$ , on a vu qu'il s'agit d'un 'stockage' de charge, et surtout d'énergie dans la forme d'énergie du champ électrique.

C'est justement ce 'stockage' d'énergie qui produit un effet de filtrage (passe-bas).

Est-ce que quelque chose de similaire se passe pour  $L$  ?

|                   | $C$                                          | $L$                     |                                                                             |
|-------------------|----------------------------------------------|-------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| stocke            | $q/\text{champ } \vec{E}$                    | courant/champ $\vec{B}$ |                                                                             |
| énergie           | $\frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ | ?                       |                                                                             |
| densité d'énergie | $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$               | ?                       | ← essayons de trouver ces éléments, en partant du cas paradigme : solénoïde |



$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} A$$

Puissance dans  $L$  :

$$P_L = \frac{dU_L}{dt} = |\mathcal{E}i| = L \frac{di}{dt} i = \frac{1}{2} L \frac{d}{dt} (i^2) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L i^2 \right) \quad (9.15)$$

$$\Rightarrow \boxed{U_L = \frac{1}{2} L i^2} \quad (9.16)$$

Dans notre solénoïde :

$$U_L = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \overbrace{\left( \mu_0 \frac{N^2}{l} A \right)}^L i^2 \quad (9.17)$$

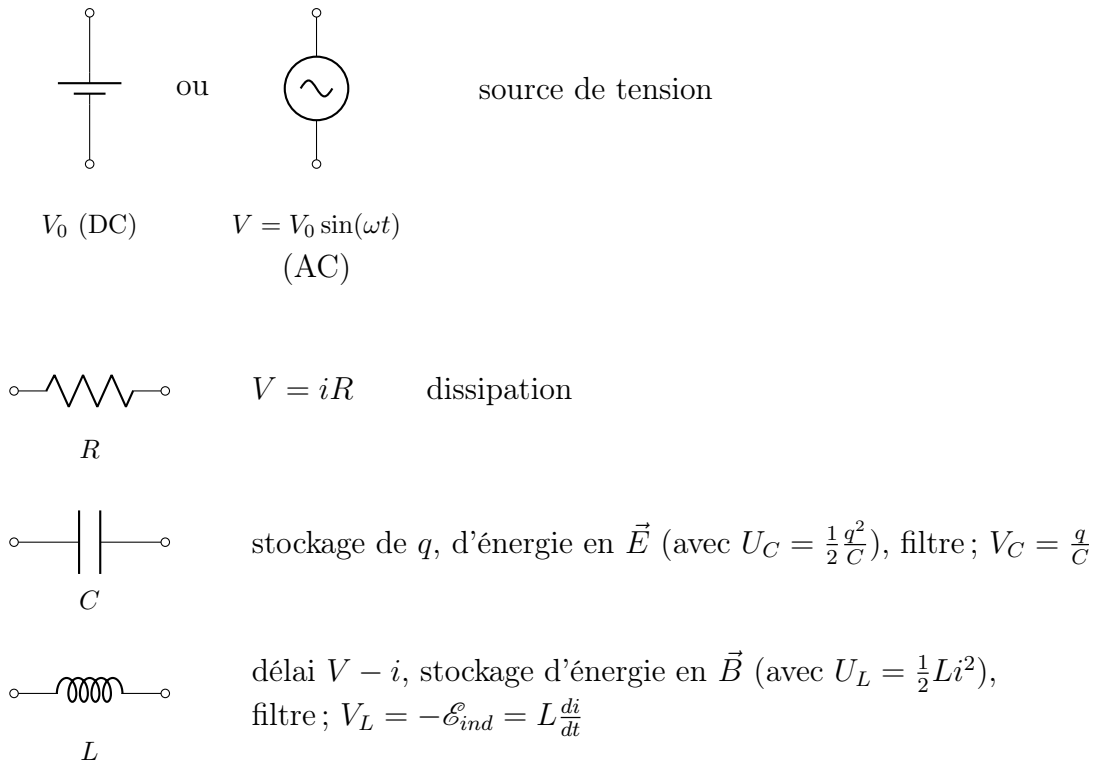
mais  $B = \mu_0 \frac{N}{l} i$ , donc  $i = \frac{Bl}{\mu_0 N}$

$$\Rightarrow U_L = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2}{l} A \underbrace{\left( \frac{B^2 l^2}{\mu_0^2 N^2} \right)}_{i^2} = \frac{1}{2} A l \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0} (\text{volume}) B^2$$

Densité d'énergie

$$\boxed{\frac{dU_L}{d(\text{volume})} = \frac{1}{2\mu_0} B^2} \quad (9.18)$$

Résumé des composants des circuits que nous avons vus jusqu'à là



**Note 9.13.**  $C$  :  $V_C = \frac{Q}{C} = \frac{\int i dt}{C}$  : la tension à travers  $C$  est l'intégrale du courant  $\rightarrow$  intégrateur.

$L$  :  $V_L = -L \frac{di}{dt}$  : la tension à travers  $L$  est la dérivée du courant  $\rightarrow$  différentiateur

Ces deux propriétés sont très utiles pour les circuits électroniques.

## 9.4 Circuits AC et impédance complexe

### Circuits à courant alternatif (AC)

Représentation complexe

$$V(t) = V_0 e^{i\omega t} = V_0 \cos \omega t + i V_0 \sin \omega t \quad (9.19)$$

On peut considérer la tension “vraie”, ou “**physique**”, comme la partie imaginaire de la tension complexe (on pourrait aussi choisir la partie réelle, selon notre choix de convention pour la phase).

## 9.5 Puissance dans circuits AC

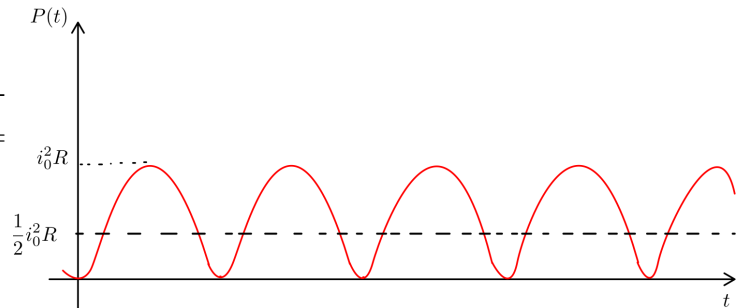
$$V = V_0 \sin \omega t \quad \text{ou} \quad V_0 e^{i\omega t}$$

Naturellement, la tension oscille entre  $+V_0$  et  $-V_0$ , et le courant entre  $+i_0$  et  $-i_0$ . Ces valeurs sont appelées ‘valeurs de pic’.

Considérons  $R$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} V = V_0 \sin \omega t \\ i = i_0 \sin \omega t \end{array} \right.$$

A travers une résistance  $R$ , la puissance instantanée sera  $P = i^2 R = i_0^2 R \sin^2 \omega t$ .



Dans la plupart des applications, ce qui compte est la puissance moyenne sur le temps.

puissance moyenne  $\bar{P} = \text{moyenne de } (i_0^2 R \sin^2 \omega t) = \overline{i_0^2 R \sin^2 \omega t} = i_0^2 R \overline{\sin^2 \omega t}$

Comme  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \forall \alpha \Rightarrow 1 = \overline{\sin^2 \omega t} + \overline{\cos^2 \omega t} = 2 \overline{\sin^2 \omega t}$

(car la moyenne de  $\sin^2$  et de  $\cos^2$  sont identiques, vu que les deux courbes sont juste décalées)

$$\overline{\sin^2 \omega t} = \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2}, \text{ et}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{P} = \frac{1}{2} i_0^2 R} \quad (9.32)$$

Comme

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{V_0^2}{R} \sin^2 \omega t \Rightarrow \boxed{\bar{P} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R}} \quad (9.33)$$

Donc, ce qui est important pour calculer la puissance est la moyenne de  $i^2$  et  $V^2$ .  
En considérant les valeurs quadratiques moyennes (‘root mean square’ en anglais)

$$i_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{i^2}} = \frac{i_0}{\sqrt{2}}; \quad V_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{V^2}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}; \quad (9.34)$$

$$\Rightarrow \bar{P} = i_{\text{rms}}^2 R = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R} \quad (9.35)$$

Donc, en AC, les valeurs ‘rms’ correspondent aux ‘vraies’ valeurs en DC, et c’est pour ça qu’elle sont spécifiées dans les applications pratiques.

Par ex., lorsqu’on on dit que la tension de notre réseau électrique suisse (ou dans les pays autour) est de 230 V, ce qu’on entend est que  $V_{\text{rms}} = 230 \text{ V} \Rightarrow V_0 = \sqrt{2}V_{\text{rms}} \cong 325 \text{ V}$ .

Note : il y a le choix entre bi-phase, mono-phase, tri-phase... En Europe : 230V est la tension entre ‘phase’ et ‘neutre’ ; dans le réseau triphase, entre phases il y a 400 V.

**Note 9.16.** Dans une résistance,  $V$  et  $i$  sont en phase, donc on doit faire la moyenne de  $\sin^2 \omega t$  (ou  $\cos^2 \omega t$ ). Dans le cas de  $C$  et  $L$ ,  $V$  et  $i$  ont un déphasage de  $\pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \bar{P} \propto \overline{\sin \omega t \cos \omega t} = 0$ . Il n’y a pas de dissipation dans les condensateurs et dans les inducteurs (idéaux) !

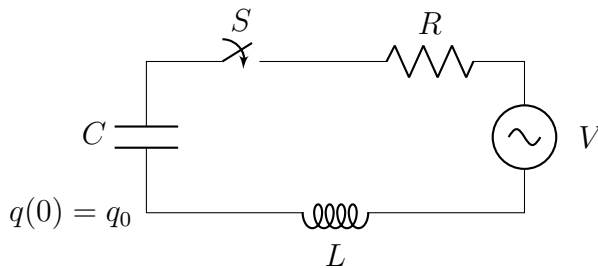
## 9.6 Circuits RLC et introduction aux oscillations électromagnétiques

Combinons maintenant les éléments de base des circuits dans un circuit complet : **circuit RLC**.

On analysera d’abord les cas dépendant du temps (évolution temporelle à partir d’une condition initiale donnée), puis celui d’un courant et d’une tension AC.

### Circuit RLC : évolution temporelle

On charge un condensateur et on ferme le circuit.



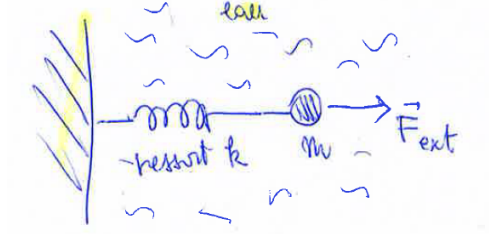
At  $t = 0$ ,  $q(t = 0) = q_0$ , et on ferme l’interrupteur  $S$ .

$$\text{Loi de Kirchhoff :} \quad V - \frac{q(t)}{C} - Ri(t) - L \frac{di}{dt} = 0 \quad (9.36)$$

$$\text{Comme } i = \frac{dq}{dt} : \quad V - \frac{q(t)}{C} - R \frac{dq}{dt} - L \frac{d^2q}{dt^2} = 0, \text{ ou} \quad (9.37)$$

$$L \frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{1}{C}q - R \frac{dq}{dt} + V \quad \begin{array}{l} \text{équation différentielle} \\ \text{de 2}^{\text{ème}} \text{ degré} \end{array} \quad (9.38)$$

**Analogie mécanique :** ressort dans liquide visqueux (ex. eau), avec une force externe,  $F_{\text{ext}}$



$$\underbrace{m \frac{d^2 x}{dt^2}}_{\text{inertie}} = \underbrace{-kx}_{\text{ressort}} - \underbrace{f \frac{dx}{dt}}_{\text{frottement}} + \underbrace{F_{\text{ext}}}_{\text{forçage}} \quad (9.39)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ L \frac{d^2 q}{dt^2} = & -\frac{1}{C} q - R \frac{dq}{dt} & & + V & (9.40) \end{array}$$

Pour résoudre l'équation différentielle, on réarrange les termes (en prenant  $V = 0$ )

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0, \quad (9.41)$$

et on fait l'hypothèse que la solution ait la forme  $q(t) = Ae^{at}$

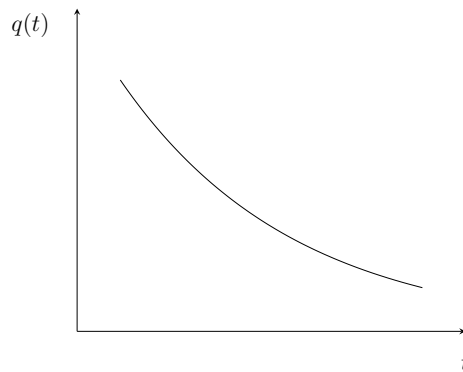
$$\Rightarrow Aa^2 e^{at} + \frac{R}{L} Aa e^{at} + \frac{1}{LC} A e^{at} = 0 \quad (9.42)$$

$$\Rightarrow a^2 + \frac{R}{L} a + \frac{1}{LC} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{1,2} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}}{2} \quad (9.43)$$

La solution aura la forme  $q(t) = A_1 e^{a_1 t} + A_2 e^{a_2 t}$ . Le comportement est déterminé par le signe du terme  $\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}$

1. Cas "sur-amorti"  $\boxed{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} > 0} \Rightarrow a_1 \text{ et } a_2 \text{ sont négatifs}$

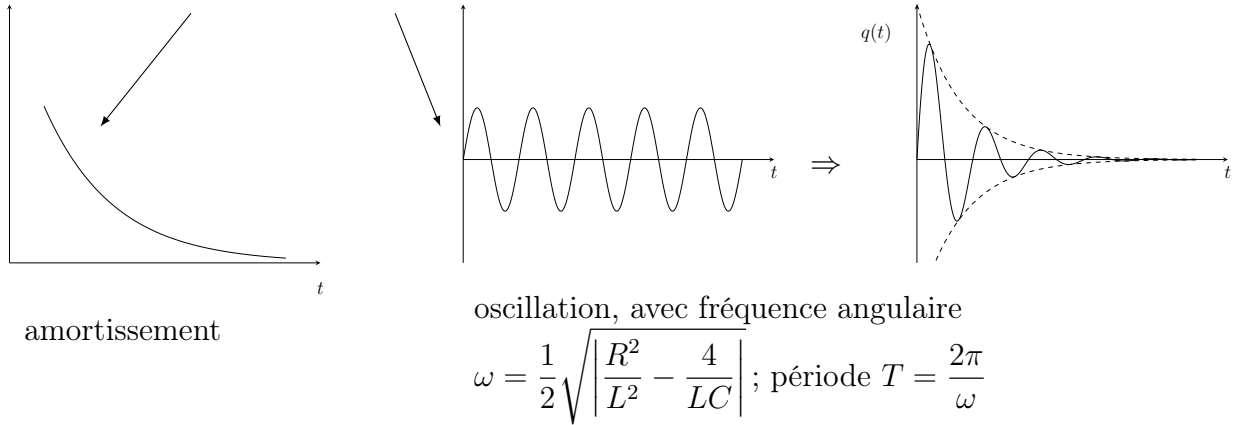
$$a_1 = -\frac{R}{2L} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}} < 0 \quad \text{et} \quad a_2 = -\frac{R}{2L} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}} \quad (9.44)$$



Donc on a une décroissance exponentielle (deux exponentielles décroissantes combinées).

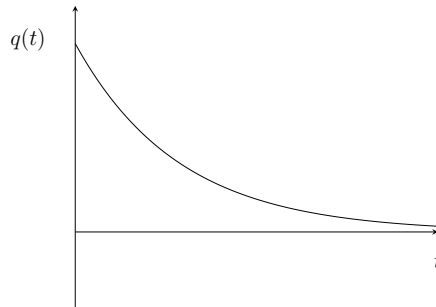
2. Cas “sous-amorti”  $\boxed{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} < 0}$   $a_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{i}{2} \sqrt{\left| \frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} \right|}$

$$\Rightarrow q(t) = q_0 \underbrace{e^{-\frac{R}{2L}t}}_{\text{amortissement}} \underbrace{e^{\pm \frac{i}{2} \sqrt{\left| \frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} \right|} t}}_{\text{oscillation, avec fréquence angulaire}} \quad (9.45)$$



3. Cas limite “amortissement critique”  $\boxed{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} = 0} \Rightarrow a_1 = a_2 = -\frac{R}{2L}$

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \quad (9.46)$$



Considérons maintenant le cas AC (en état stationnaire).

Nous pouvons donc utiliser le formalisme complexe et les impédances (complexes) des différents éléments. On se rappelle du fait que les impédances se somment comme des résistances.