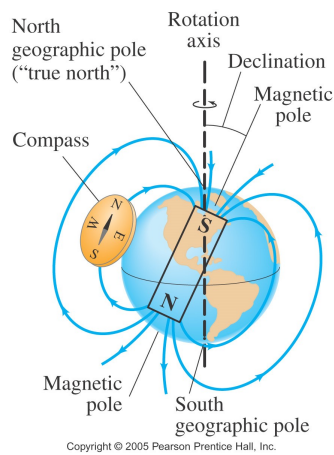
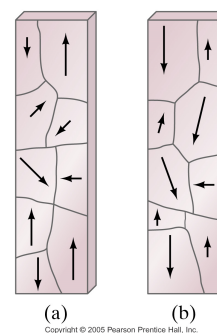


# Chapitre 7

## Magnétisme et sources de champ magnétique



Ancien stade de Magnesia, Turquie



## 7.1 Un nouveau type d'interaction : champ magnétique et force de Lorentz

Évidence pour une nouvelle force :

Aimants (“magnets”... de Magnesia en Turquie, où ils avaient été découverts des siècles av. J.-C. mais on ne sait pas s'ils étaient utilisés). On observe que les aimants se repoussent ou ils s'attirent, selon le côté. Ils ont deux côtés, ou “pôles”, qu'on appelle “nord” ou “sud”. Les mêmes pôles se repoussent, les pôles opposés s'attirent. Ils peuvent aussi attirer d'autres matériaux, par exemple le fer. De plus, on remarque l'action à distance, qui n'est pas perturbée par quelque chose, telle qu'une feuille de papier, qui est insérée entre l'aimant et le matériau.

- Il est clair qu'il s'agit d'une nouvelle classe de phénomènes, différente de celle liée aux phénomènes produits par les charges, ou les champs électriques (à noter que les aimants n'ont pas une charge nette).
- Ces phénomènes ‘magnétiques’ ont eu besoin de plus que 2000 ans pour être expliqués ! Par contre, ils ont été utilisés bien avant d'être compris, notamment dans le cas de la boussole.

L'homme a cherché à expliquer les phénomènes magnétiques pendant beaucoup de siècles, mais les premières idées “concluantes” sont arrivées en remarquant la connexion avec d'électricité.

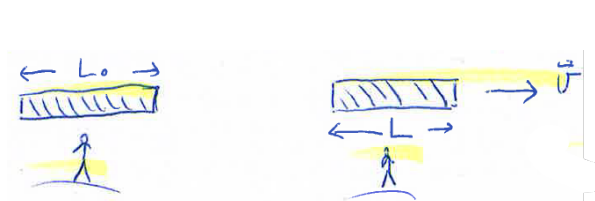
|          |                 |                  |
|----------|-----------------|------------------|
| Résumé : | aimant-aimant   | } force observée |
|          | aimant-fer      |                  |
|          | aimant-courant  |                  |
|          | courant-aimant  |                  |
|          | courant-courant |                  |

Première explication avec théorie de la relativité : en effet les charges sont à la base de tout ça ... mais seulement si elles bougent.

## 7.2 Interprétation avec la théorie de la relativité

### Relativité et force magnétique

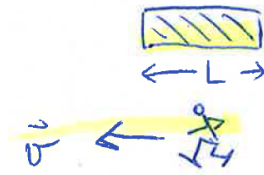
Rappel : contraction des distances/longueurs



$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}; \quad c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}; \quad (7.1)$$

effet très faible si  $v \ll c$ , mais non-nul !

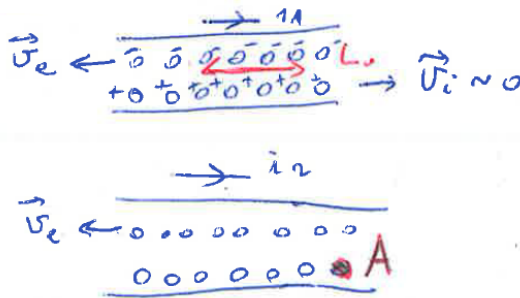
La même chose a lieu si c'est l'observateur qui bouge, et on continue à observer l'objet.



$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (7.2)$$

Quelle est la relation avec la force magnétique ?

⇒ Deux fils avec courant (dans la même direction).



Considérons le ion “A” comme notre observateur : qu'est-ce qu'il voit ?

“A” ‘voit’ les électrons de l'autre fil aller vers la gauche.

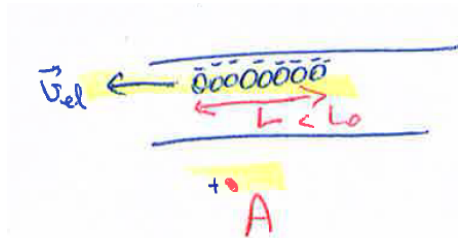
Au repos la densité de charge linéaire est :

$$|\lambda_0^+| = |\lambda_0^-| = \lambda_0 = \frac{|Q_0|}{L_0}$$

$$\lambda_{\text{total}} = \lambda_0^+ - \lambda_0^- = 0$$

**Note 7.1.** La charge n'est pas influencée par la relativité, contrairement à la masse

Mais, vue par “A”, la longueur  $L_0$  est contractée, et devient  $L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < L_0$  ; et ceci uniquement pour les électrons, car les ions sont pratiquement immobiles.



$$\begin{aligned} \lambda_{\text{vue par A}} &= \lambda_{\text{vue par A}}^+ - \lambda_{\text{vue par A}}^- = \\ &\cong \underbrace{\lambda_0}_{\text{les ions sont immobiles}} - \frac{Q_0}{L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \\ &= \lambda_0 \underbrace{\left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]}_{<0} < 0! \quad (7.3) \end{aligned}$$

Donc “A” voit une charge négative non-nulle sur l'autre fil et ressent une attraction ⇒ voici la connexion entre  $\vec{E}$  et le magnétisme, motivée théoriquement en termes simples.

## 7.3 Mouvement des particules chargées dans un champ magnétique

Pour construire la théorie quantitative, commençons avec l'effet d'un champ magnétique sur des particules chargées libres.

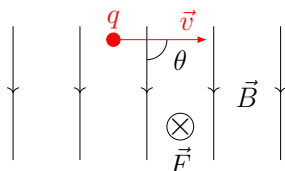
Résumé des observations (celles faites ensemble, et d'autres du même type)

- La force courbe les trajectoires :  $\vec{F} \perp \vec{v}$
- La force  $\propto q$  (et dépend aussi du signe de  $q$ )
- La force  $\propto v$  ( $F = 0$  si  $v = 0$ )

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} : \quad \text{cette expression ("force de Lorentz")} \quad (7.4)$$

en effet définit  $\vec{B}$  "champ magnétique".

- $\vec{B}$  est un champ vectoriel, et, tout comme  $\vec{E}$ , décrit une propriété de l'espace, par ex. autour d'un aimant, telle que nous pouvons calculer une force qui agit lorsqu'une charge (avec vitesse  $\vec{v}$ ) est présente.
- Forme explicite de la force magnétique sur une charge :



$$\vec{F} = q|\vec{v}||\vec{B}| \sin \theta = qv_{\perp} B \quad (7.5)$$

$$v_{\perp} = |\vec{v}| \sin \theta \quad \text{composante de la vitesse } \perp \text{ à } \vec{B} \quad (7.6)$$

$$\text{Unités :} \quad [F] = [q][v][B] = \text{N}$$

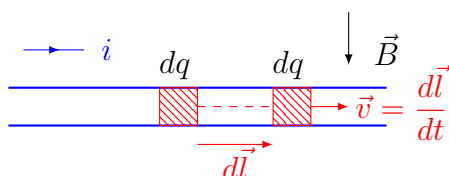
$$\rightarrow [B] = \frac{\text{Ns}}{\text{Cm}} = \frac{\text{N}}{\text{Am}} \equiv \text{T} \quad \text{'Tesla'}$$

**Note 7.2.**  $1 \text{ T} = 10^4 \text{ Gauss}$

$$B_{\text{terre}} \sim 10^{-4} \text{ T} = 1 \text{ G}$$

Max  $B$  obtenu en laboratoire en conditions stationnaires :  $B_{\text{max}} \sim 100 \text{ T}$

### Force sur un fil parcouru par un courant



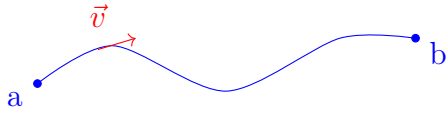
Sur une charge  $dq$  :

$$d\vec{F} = dq\vec{v} \times \vec{B} \quad (7.7)$$

$d\vec{F} = dq \frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B} = id\vec{l} \times \vec{B}$  : la force est  $\perp$  aux fil (car  $d\vec{l}$  est forcément le long du fil)

### Force de Lorentz et travail

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (\text{on assume ici } \vec{E} = 0)$$

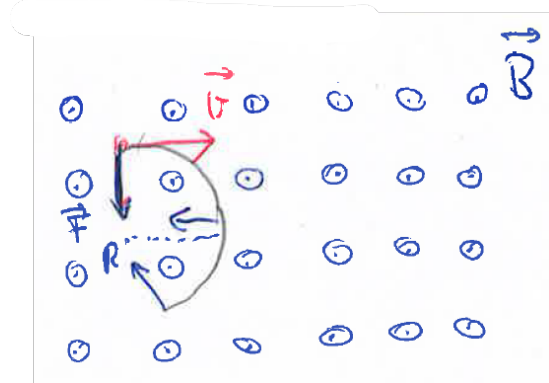


La force est toujours  $\perp$  à la vitesse, donc ne fait pas de travail !

$$W_{a \rightarrow b} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_a^b q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = q \int_a^b \underbrace{\left( \frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B} \right)}_{\text{toujours } \perp \text{ à } d\vec{l}} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (7.8)$$

Donc la force magnétique peut changer la direction de  $\vec{v}$ , mais pas  $|\vec{v}|$  (ou l'énergie) de la particule chargée.

### Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme, avec $\vec{v} \perp \vec{B}$



$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (\text{dans le dessin, } q > 0)$$

la force est toujours dirigée vers le centre de la trajectoire, qui devient circulaire.

Quel est le rayon de cette trajectoire circulaire ?

**Note 7.3.**  $|\vec{v}| = \text{const.}$

On calcule l'équilibre entre la force magnétique et la force centrifuge

$$|\vec{F}_B| = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow |q|vB = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow \boxed{R = \frac{mv}{|q|B}} \quad \text{rayon de cyclotron} \quad (7.9)$$

$$R = \frac{mv}{|q|B} \quad \begin{array}{l} \nearrow \text{si grandes } m, v ; \text{ difficile de 'courber' l'orbite} \\ \searrow \text{si grands } q, B : \text{ force plus intense ; facile de 'courber' l'orbite} \end{array} \quad (7.10)$$

Donc les particules tournent autour des lignes de champ  $\vec{B}$  : à quelle fréquence ?

pour un 'tour' (une orbite) :  $T = \text{période} = \frac{2\pi R}{v}$

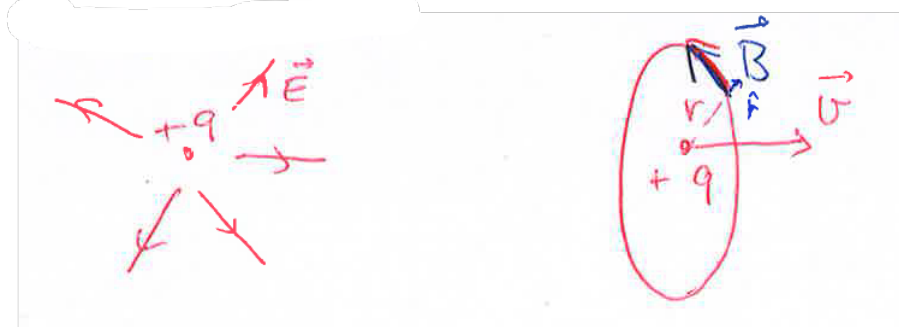
$$\Rightarrow \text{fréquence} = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi R} = \frac{\cancel{v}|q|B}{2\pi m\cancel{v}} = \frac{1}{2\pi} \frac{|q|B}{m} \quad \text{fréquence cyclotronique} \quad (7.11)$$

$$\rightarrow \text{ex. sources } \mu\text{-ondes} \begin{cases} \text{four} \\ \text{gyrotrons} \\ \text{.....} \end{cases}$$

## 7.4 Sources de champ magnétique : loi de Biot-Savart

On a observé que les charges en mouvement sont à la fois sujettes à  $\vec{B}$  et sources de  $\vec{B}$ .

**Charge individuelle comme source de  $\vec{B}$**  (avec  $\vec{v} = \text{const.}$ )



Expérimentalement, on observe

|           | $E$                                                                 | $B$                                                                                     |
|-----------|---------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| intensité | $\begin{cases} \propto q \\ \propto \frac{1}{r^2} \\ - \end{cases}$ | $\begin{cases} \propto q \\ \propto \frac{1}{r^2} \\ \propto v \sin \theta \end{cases}$ |
| direction | radiale                                                             | azymuthale                                                                              |

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (7.12)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} \quad (7.13)$$

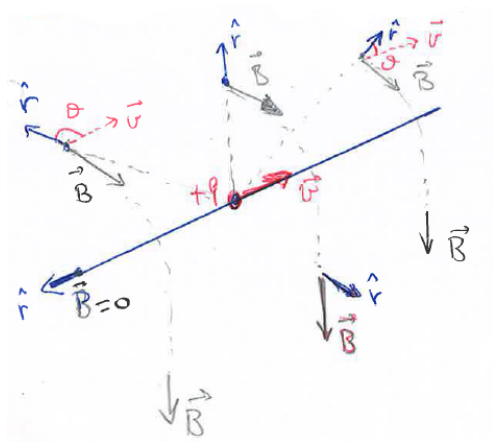
**Note 7.4.**

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} \quad (7.14)$$

$$\frac{1}{\epsilon_0\mu_0} = \frac{1}{8.8 \times 10^{-12} \times 4 \times \pi \times 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = \frac{10^{19}}{4\pi \times 8.8 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \simeq \left[ 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]^2 = c^2 \quad ! \quad (7.15)$$

*...pas une coincidence...*

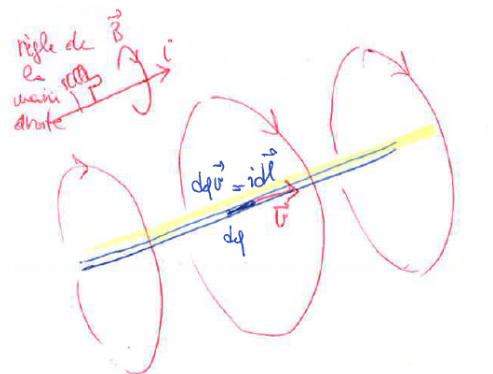
**Clarification** : que signifie  $\hat{r}$  dans le cas du champ  $\vec{B}$  ?



$\hat{r}$  est le vecteur unitaire décrivant la direction et le sens entre la charge-source qui bouge à vitesse  $\vec{v}$  et le point auquel on calcule le champ  $\vec{B}$ .

**Note 7.5.** Dans la plupart des cas, la source de  $\vec{B}$  n'est pas une seule charge en mouvement, mais en ensemble, donc un courant.

$$i = \frac{dq}{dt}; dq\vec{v} = dq \frac{d\vec{l}}{dt} = i d\vec{l} \quad (7.16)$$



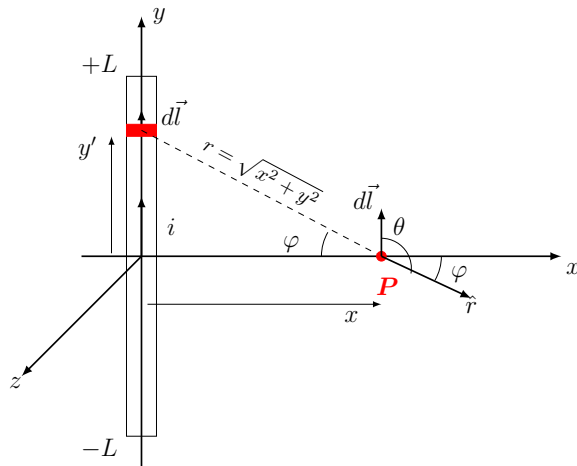
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dq\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad (7.17)$$

**Loi de Biot-Savart**

$$\Rightarrow \text{superposition } \vec{B} = \int_{fil} \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad (7.18)$$

Ex. d'application (simple) de la loi de Biot-Savart : champ magnétique créé par un fil parcouru par un courant  $i$ , de longueur  $2L$ .

$\vec{B}$  au point  $P$  ?



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad (7.19)$$

- Direction de  $\vec{B}$  ? :  $d\vec{l} \times \hat{r} \equiv \hat{y} \times \hat{r} = -\hat{z}$

- Amplitude de  $|\vec{B}|$  ?

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dl \sin \theta}{x^2 + y^2}; \quad \theta = \varphi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \theta = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \varphi \quad (7.20)$$

$$(dl = dy')$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dy'}{x^2 + y'^2} \cos \varphi \quad (7.21)$$

(on utilise y' et dy', car y' est la variable sur laquelle on intégrera)

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dy'}{x^2 + y'^2} \frac{x}{(x^2 + y'^2)^{1/2}} \quad (7.22)$$

On applique le principe de superposition et on intègre :

$$B = \int dB = \int_{-L}^L \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dy' x}{(x^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} x \int_{-L}^L \frac{dy'}{(x^2 + y'^2)^{3/2}} \quad (7.23)$$

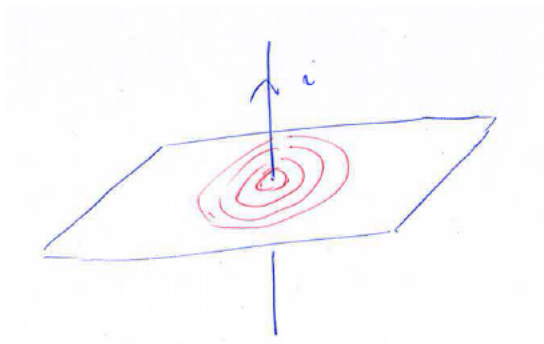
On se rappelle l'intégrale :  $\int \frac{d\xi}{(a^2 + \xi^2)^{3/2}} = \frac{\xi}{a^2 \sqrt{a^2 + \xi^2}}$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \left[ \frac{y'}{x^2 (x^2 + y'^2)^{1/2}} \right]_{-L}^L = \frac{\mu_0 i}{4\pi x} \left[ \frac{L}{\sqrt{x^2 + L^2}} - \frac{(-L)}{\sqrt{x^2 + L^2}} \right] = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} \frac{L}{\sqrt{x^2 + L^2}} \quad (7.24)$$

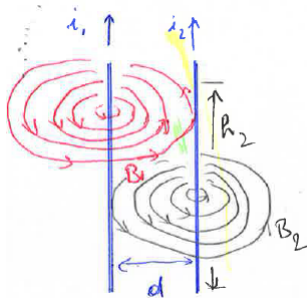
Limite du fil 'infini' :  $L \gg x$

$$B \underset{L \gg x}{\sim} \frac{\mu_0 i}{2\pi x} \frac{L}{L} = \frac{\mu_0}{2\pi x} i \quad (7.25)$$

On s'attend donc la forme des lignes de champ suivante :



On peut aussi revenir à la **DEMO** d'attraction/répulsion entre deux fils parcourus par un courant, et calculer la force (dans l'approximation de fils 'longs').



chaque fil produit un champ magnétique qui est senti par l'autre fil/courant.

$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi d} i_1$  ; champ produit par  $i_1$  à l'endroit de  $i_2$

La force ressentie par le fil '2' sur la longueur  $h_2$  est :

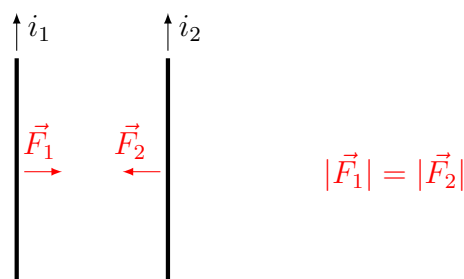
$$F_2 = i_2 B_1 h_2 \quad (7.26)$$

**Note 7.6.** Le fil '2' avec son courant  $i_2$  produit un champ  $B_2$  mais n'exerce pas de force sur lui-même !

En remplaçant l'expression pour  $B_1$ , on a  $F_2 = i_2 \underbrace{\frac{\mu_0}{2\pi d} i_1}_{B_1} h_2$  ou  $F_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2}{d} h_2$

On applique la règle de la main droite ( $d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1$ ) et on a que la force  $F_2$  est attractive.

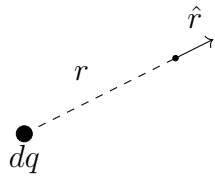
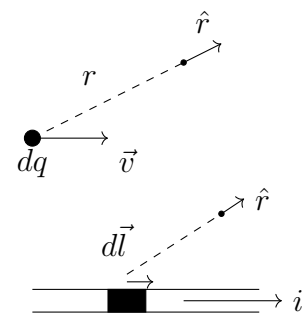
Naturellement,  $\vec{F}$  serait dans l'autre sens (répulsive) si un des deux courant changeait de signe.



Le même raisonnement s'applique à la force  $\vec{F}_1$  exercée sur le fil '1' par le champ magnétique produit par le courant  $i_2$ . Aussi, on pouvait simplement argumenter sur la base du principe d'action et réaction... (3<sup>ème</sup> loi de Newton).

## 7.5 Sources de champ magnétique : loi d'Ampère

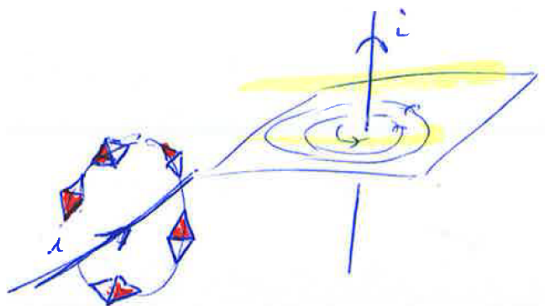
Rappel :

|                                                                                                                            |                                                                                                                                                      |                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $\vec{E}$<br>charge                                                                                                        | $\vec{B}$<br>courant (charge<br>en mouvement)                                                                                                        |    |
| $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} dq \frac{\hat{r}}{r^2}$                                                               | $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} dq \frac{\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$<br>ou<br>$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$ |  |
| $\vec{E} = \int_{\text{distribution des charges}} d\vec{E} \quad \vec{B} = \int_{\text{distribution de courant}} d\vec{B}$ |                                                                                                                                                      |                                                                                     |

[Biot-Savart]

**Note 7.7.** Ces définitions et formules donnent lieu à des calculs compliqués : on cherche une façon plus simple de calculer  $\vec{B}$  à partir de sa source.

Nous avons déjà calculé le champ  $\vec{B}$  pour un fil fini parcouru par un courant.



Avant de faire un autre ex. de calcul, visualisons la structure du champ.

### DEMO

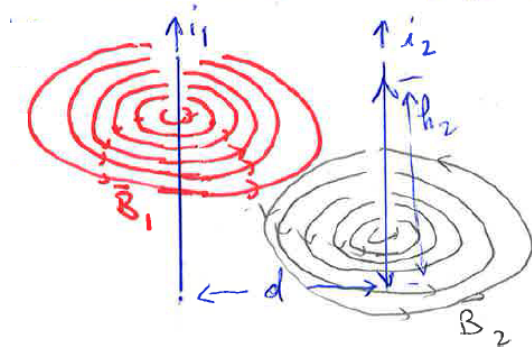
Lignes de champ : on utilise beaucoup de petites “boussoles” pour visualiser les lignes de champ  $\vec{B}$



En effet nous avons vu et calculé le champ  $\vec{B}$  créé par un fil, mais avons observé la force entre deux fils : attraction/répulsion entre deux fils. Explication : chaque fil produit un champ qui est ressenti par l'autre fil.

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi d} i_1 \quad (7.27)$$

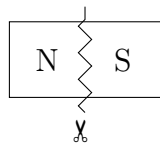
(champ produit par  $i_1$  à l'endroit de  $i_2$ )



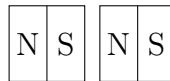
Force ressentie par fil "2" sur longueur  $h_2$

$$F_2 = i_2 B_1 h_2 \quad (7.28)$$

En général, en regardant la structure des lignes de champ  $\vec{B}$ , on remarque que les lignes de champ n'ont pas de début ni de fin nulle part (car il n'y a pas des "charges", ou monopoles magnétiques). Question : que se passe-t-il si on casse un aimant ?



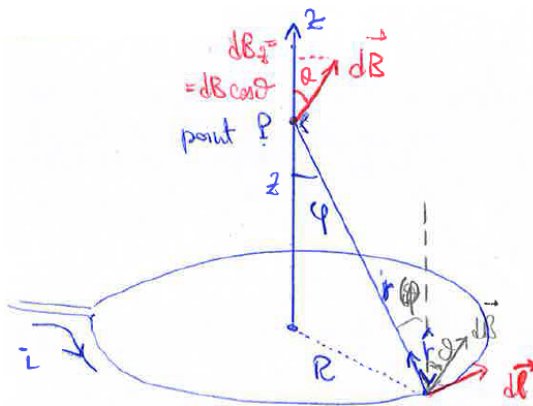
$\Rightarrow$



$\Rightarrow$

on crée des nouveaux aimants avec deux pôles

Regardons maintenant une autre application de la loi de Biot-Savart  $\Rightarrow$  Bobine circulaire  
Calculons théoriquement le champ produit par une bobine circulaire, sur son axe, en utilisant la loi de Biot-Savart



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad \text{Biot - Savart} \quad (7.29)$$

Par symétrie, on n'aura que la composante de  $\vec{B}$  le long de  $\hat{z}$  :  $B_z$ .

**Note 7.8.**  $d\vec{l} \perp \hat{r}$  :  $|d\vec{l} \times \hat{r}| = dl$

$$|d\vec{B}| = \left| \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \right| = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dl}{z^2 + R^2} \quad ; \quad \text{note} \quad d\vec{B} \perp \begin{cases} d\vec{l} \\ \hat{r} \end{cases} \quad (7.30)$$

$$dB_z = |d\vec{B}| \cos \vartheta = |d\vec{B}| \cos \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) = |d\vec{B}| \sin \varphi = |d\vec{B}| \frac{R}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \quad (7.31)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \text{ superposition } \vec{B}_{tot} &= B\hat{z} = \int_{\text{cercle}} dB_z \hat{z} = \\
&= \left[ \int_{\text{cercle}} \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dl}{z^2 + R^2} \cdot \frac{R}{(z^2 + R^2)^{1/2}}}_{\substack{\text{term à l'intérieur de l'intégrale ne} \\ \text{dépend de la position le long du cercle!}}} \right] \hat{z} = \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{R}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \underbrace{\int_{\text{cercle}} dl}_{2\pi R} \right] \hat{z} \\
&= \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{R}{(z^2 + R^2)^{3/2}} 2\pi R \right] \hat{z} = \boxed{\frac{\mu_0}{2} i \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{z}} \quad (7.32)
\end{aligned}$$

Au centre de la bobine :  $z = 0$

$$B_{\text{centre}} = \frac{\mu_0}{2} \frac{i}{R} \begin{cases} \propto i \\ \propto \frac{1}{R} \end{cases} \quad (7.33)$$

Naturellement, si on a  $N$  tours, le principe de superposition nous dit simplement que le résultat est  $|\vec{B}| = N \frac{\mu_0 i}{2R}$ .

**Note 7.9.** À des très grandes distances,  $z \gg R$

$$B \underset{z \gg R}{\simeq} \frac{\mu_0}{2} i \frac{R^2}{z^3} \quad : \quad \text{le champ diminue très rapidement avec } z$$

Nous avons vu à quel point les calculs deviennent rapidement compliqués en utilisant la loi de Biot-Savart, même pour des géométries relativement simples. On doit trouver une meilleure méthode!

### Loi d'Ampère (~1800)

Nous avons un problème similaire pour le champ électrique  $\vec{E}$ . Pour simplifier les calculs, nous avons trouvé la loi de Gauss :

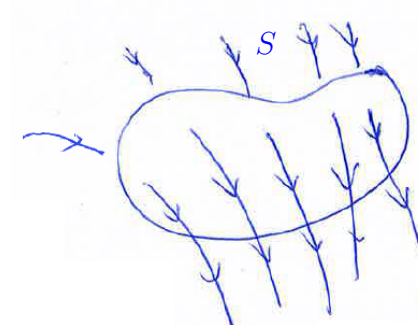
$$\Phi_E^S = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{en\ S}}{\epsilon_0} \quad (7.34)$$

L'idée a été de remplacer l'intégrale sur la 'vraie' distribution des charges avec une intégrale sur une surface mathématique  $S$ .

Où est-ce qu'on gagne ? Dans le fait que si  $S$  est choisie de manière intelligente, on peut simplifier l'intégrale ! Essayons la même idée pour le champ magnétique, en partant de son flux :

$$\Phi_B^S = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = ? \quad (7.35)$$

en effet,  $\boxed{\Phi_B^S = 0}$  toujours, pour toute surface fermée  $S$



**surface fermée**

La raison est qu'il n'y a pas de charges magnétiques isolées (mono-pôles)  $\Rightarrow$  les lignes de champ de  $\vec{B}$  n'ont pas de début ni de fin. Chaque contribution au flux rentrant dans la surface est compensée par le même flux qui sort de la surface.

Donc

$$\begin{cases} \Phi_E^S = \frac{Q_{en\ S}}{\varepsilon_0} \\ \Phi_B^S = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{pas de charge magnétique} \quad (S \text{ est une surface fermée})$$

Malgré son importance, l'équation  $\Phi_B^S = 0$  ne nous aide pas pour le calcul de  $\vec{B}$ , car il n'y a pas de lien entre le champ et sa source.

Comme le flux, donc l'intégrale de surface, ne nous aide pas, essayons avec une intégrale de ligne.

$$\boxed{\int_{\text{circuit fermé}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{entouré}}}$$

loi d'Ampère,  
lien entre  $\vec{B}$   
et sa source,  $i$  (7.36)

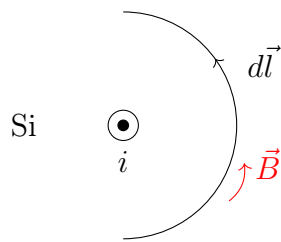
Comme dans la loi de Gauss, l'idée est que nous pouvons choisir le parcours fermé, pour que l'intégrale soit simple.

Notamment, on peut choisir le parcours tel que :

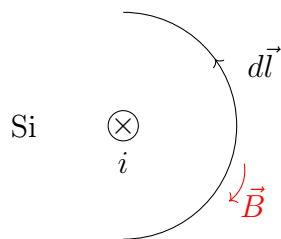
$$\vec{B} \perp d\vec{l} \Rightarrow \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (7.37)$$

$$\vec{B} \parallel d\vec{l} \Rightarrow \vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl \quad (7.38)$$

Signe de  $i_{\text{entouré}}$  ? On suit la règle de la main droite pour le parcours d'intégration et  $i$ .



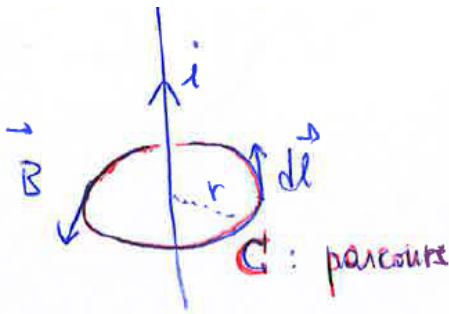
Si la règle de la main droite est satisfaite :  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} > 0$ , et  $\vec{B}$  est dirigé comme le parcours d'intégration.



Si la règle n'est pas satisfaite, alors  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} < 0$ , et  $\vec{B}$  est dirigé dans le sens opposé au parcours d'intégration.

Voyons un ex. d'application tout simple, avant de démontrer la loi d'Ampère : fil rectiligne.

Ex. 1 fil rectiligne



On sait que  $\vec{B}$  est dirigé azymuthalement : on choisit le parcours fermé  $C$  selon la même symétrie

Ampère :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i \quad (7.39)$$

par symétrie,  $\vec{B}$  est le même le long  $C$ , et dirigé selon  $d\vec{l}$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint_C dl = B 2\pi r = \mu_0 i \Rightarrow \boxed{B = \mu_0 \frac{i}{2\pi r}} \quad (7.40)$$

Ampère,

avec signe positif, car la  
règle de la main droite est respectée

### Démonstration de la loi d'Ampère

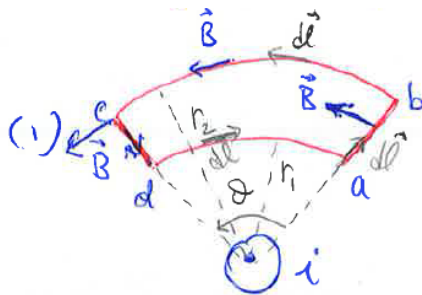
$$\oint_{\text{parcours fermé}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{entouré}} \quad (7.41)$$

Deux pas

(1) si  $i_{\text{entouré}} = 0 \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$

(2)  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{entouré}}$

(1)  $i_{\text{entouré}} = 0$



(a) Considérons le parcours.

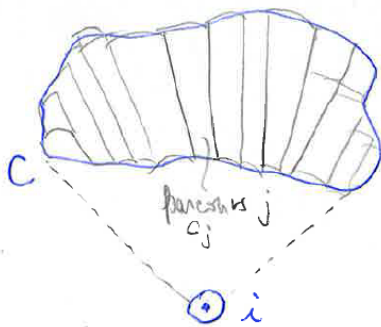
$$\text{Biot-Savart : } B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad (\text{azymuthal}) \quad (7.42)$$

$$\begin{aligned} \oint_{abcd} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \underbrace{\int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{\substack{=0 \\ \text{car } \vec{B} \perp d\vec{l}}} + \underbrace{\int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{B(r_2) \times \text{longueur}(\widehat{bc})} + \underbrace{\int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{\substack{=0 \\ \text{car } \vec{B} \perp d\vec{l}}} + \underbrace{\int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{-B(r_1) \times \text{longueur}(\widehat{da})} = \\ &= B(r_2) \text{longueur}(\widehat{bc}) - B(r_1) \text{longueur}(\widehat{da}) \quad (7.43) \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \text{longueur}(\widehat{bc}) = \vartheta r_2 \\ \text{longueur}(\widehat{da}) = \vartheta r_1 \end{cases}, \text{ et } B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \\ \Rightarrow \oint_{abcd} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \frac{\mu_0}{2\pi r_2} i (\vartheta r_2) - \frac{\mu_0}{2\pi r_1} i (\vartheta r_1) = 0 \quad \text{OK!} \quad (7.44) \end{aligned}$$

(b) Parcours de forme arbitraire (mais fermé!), qui n'entoure pas de courant

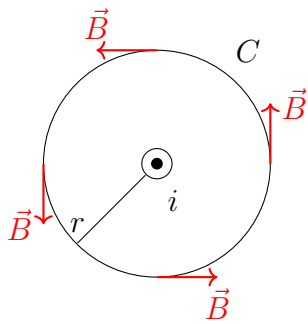


on peut le partager en  $N$  parcours fermés de la même forme que le cas (a). Pour chaque parcours  $C_j$  :

$$\oint_{C_j} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \sum_{j=1}^N \oint_{C_j} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (7.45)$$

(2)  $i_{\text{entouré}} \neq 0$

(2a) cercle centré autour du conducteur qui amène le courant

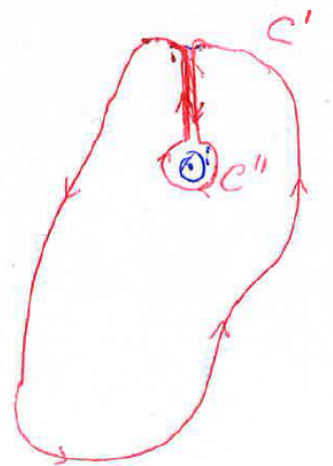


$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r) \oint_C dl = B(r) 2\pi r \stackrel{\text{(Biot-Savart)}}{=} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} 2\pi r = \mu_0 i \quad (7.46)$$

(2b) forme arbitraire entourant  $i$



$\Rightarrow$   
parcours similaire,  
mais qui n'entoure aucun courant



Comme  $C'$  n'entoure aucun courant, on sait du point précédent que  $\oint_{C'} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$ ; mais  $C'$  peut être vu comme “somme” de  $C$ , plus  $C''$ , et les allers-retours  $\uparrow\downarrow$  pour arriver à  $C''$ .  
Donc

$$0 = \oint_{C'} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{\uparrow\downarrow} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \oint_{C''} \vec{B} \cdot d\vec{l} \quad (7.47)$$

Or,  $\int_{\uparrow\downarrow} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$ , car si on les prend assez proches, sur les deux segments  $\vec{B}$  sera la même, et les deux contributions s'annuleront (le signe est opposé, car  $d\vec{l}$  est opposé).

Et  $C''$  est un cercle centré autour du courant : on sait comment calculer l'intégrale!

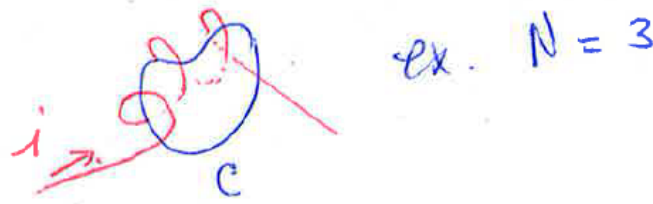
$$0 = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} + \oint_{C''} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} - \mu_0 i \quad (7.48)$$

signe “-” car nous ne respectons pas avec  $C''$  la règle de la main droite!

$$\Rightarrow \boxed{\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{entouré}}} \quad \square \quad (7.49)$$

pour n'importe quelle forme de  $C$ .

**Note 7.10.** Si  $C$  entoure  $N$  fils parcourus par un courant  $i$ ,  $i_{\text{entouré}} = Ni$

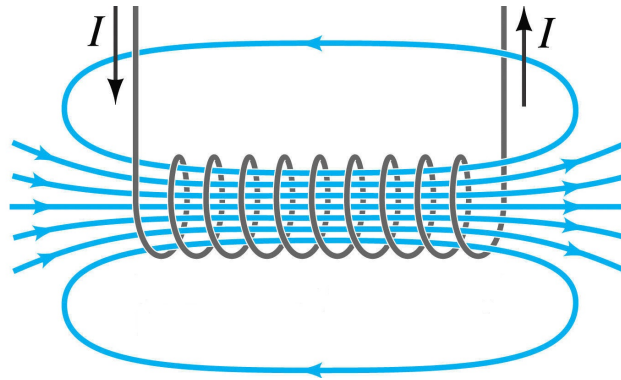


## 7.6 Applications de la loi d'Ampère

Ex. 2. Solénoïde  cas très utilisé dans les applications pratiques.

Avant d'appliquer la loi d'Ampère pour calculer  $\vec{B}$ , faisons-nous une idée de la forme de  $\vec{B}$ .

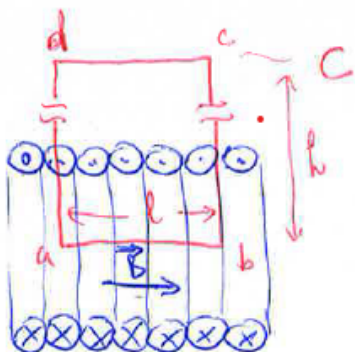
Lignes de champ, solénoïdes



### Note 7.11.

- Les lignes de champ sont uniformes et parallèles à l'axe dans la région centrale
- Faible à l'extérieur
- Le champ semble concentré dans un volume défini (d'où l'utilité pratique) ... un peu comme le condensateur pour le champ électrique ...

Calcul de  $\vec{B}$  :



Section du solénoïde.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{entouré}} \quad (7.50)$$

Sur le parcours  $C$  :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \underbrace{\int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{=Bl \text{ car } \vec{B} \simeq \text{const pour sol. infinie}} + \underbrace{\int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{=0 \text{ } (\vec{B} \perp d\vec{l})} + \underbrace{\int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{=0 \text{ car } B \simeq 0 \text{ si } h \text{ est assez grand}} + \underbrace{\int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{=0 \text{ } (\vec{B} \perp d\vec{l})} \quad (7.51)$$

donc

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = Bl_{\text{Ampère}} = \mu_0 i \times nl, \quad \text{avec } n = \frac{\# \text{ tours}}{\text{unité de longueur}} \quad (7.52)$$

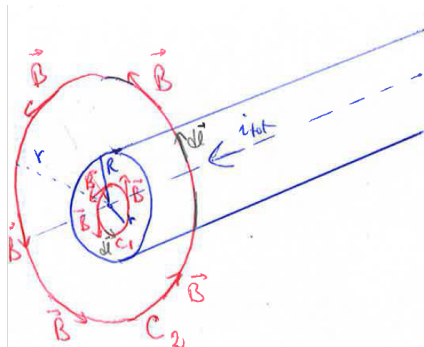
$$\Rightarrow B l = \mu_0 i n l \Rightarrow \boxed{B = \mu_0 i n = \mu_0 i \frac{N_{\text{tot}}}{L_{\text{tot}}}} \quad (7.53)$$

**Note 7.12.** Nous avons supposé que  $\vec{B}$  est dirigé selon l'axe du solénoïde, et  $B \rightarrow 0$  à l'extérieur. Cette approximation est de plus en plus valable au fur et à mesure que la longueur du solénoïde augmente, comparée à son diamètre.

**Note 7.13.** La partie du parcours  $ab$  n'est pas forcément le long de l'axe :  $B$  a la même valeur partout, à l'intérieur.

On peut aussi appliquer la loi d'Ampère dans des cas qui sont caractérisés par une distribution continue de courant (pas juste un fil infiniment fin).

Ex. 3 Conducteur cylindrique (câble) avec courant distribué uniformément sur sa section



$$B(r) = ?$$

Point crucial : choisir le parcours  $C$ .

Densité de courant  $J = \frac{i}{\text{surface}} = J_0 = \text{const.}$

$$J_0 = \frac{i_{\text{tot}}}{\pi R^2}$$

(1)  $r < R$  (à l'intérieur du câble)

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{entouré}} \Rightarrow B(r) 2\pi r = \mu_0 \overbrace{J_0 \times \text{surface}(r)}^{i_{\text{entouré}}} = \mu_0 J_0 \pi r^2 = \mu_0 i_{\text{tot}} \frac{r^2}{R^2} \quad (7.54)$$

$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 i_{\text{tot}}}{2\pi R^2} r \quad (7.55)$$

(2)  $r \geq R$

$$\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r) 2\pi r = \mu_0 i_{\text{entouré}} = \mu_0 i_{\text{tot}} \quad (7.56)$$

$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} i_{\text{tot}} \quad (7.57)$$