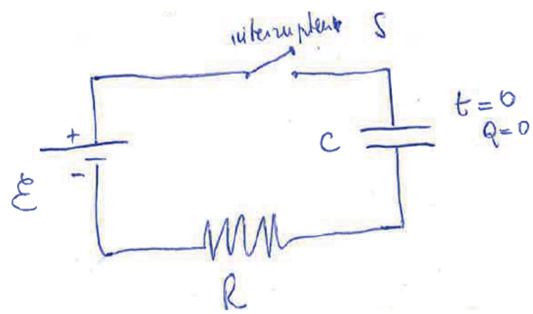
5.8 Circuits RC et applications

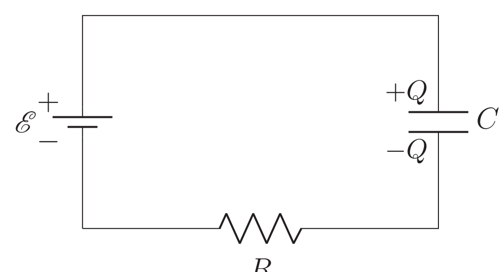
Pour l'instant, nous avons analysé les circuits DC, dans lesquels rien ne varie avec le temps. Les courants circulent (donc les charges à leur vitesse de dérivé terminale), mais toujours au même taux constant.
Mais nous avons aussi vu que les condensateurs sont des engins qui peuvent stocker de l'énergie. Le processus de charge/décharge est intrinsèquement dépendant du temps. Maintenant, sur la base des lois des circuits, on peut l'analyser quantitativement.

Circuits RC
(A) chargement d'un condensateur

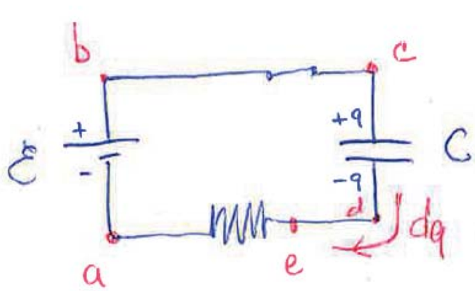


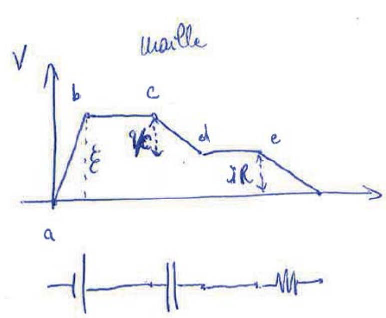
Pour charger la capacité C on a besoin de la force électromotrice $\mathscr{E}$.

A $t = 0$, on ferme l'interrupteur S et la charge est "poussée" d'un côté à l'autre de C par $\mathscr{E}$.
A $t \to \infty$, le condensateur aura reçu toute la charge qu'il peut recevoir étant donnée sa capacité C : $Q = CV = C\mathscr{E}$, et il n'y aura plus de courant.



Question : qu'est - ce qu'il se passe entre $t = 0$ et $t \to \infty$?
Dés qu'on ferme l'interrupteur S, la charge commence à s'écouler ($\to$ courant)





$$\mathscr{E} - \frac{q}{C} - iR = 0 \quad ; \quad \text{mais} \quad i = \frac{dq}{dt} \tag{5.29}$$

$$\mathscr{E} - \frac{q}{C} - \frac{dq}{dt}R = 0 \quad : \quad \text{éq. différentielle pour } q = q(t), \tag{5.30}$$

$$\text{avec } q(0) = 0, \text{ et } q(\infty) = Q$$

Note 5.14. *À $t = 0$, $q = 0$, mais $\mathscr{E} = i(0)R \quad \Rightarrow \quad i(0) = \mathscr{E}/R \neq 0$*

En réarrangeant :

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC} + \frac{\mathscr{E}}{R} \quad ; \quad \text{on sépare les variables} \tag{5.31}$$

$$dq = \left(\frac{\mathscr{E}}{R} - \frac{q}{RC}\right) dt = -(q - \mathscr{E}C)\frac{dt}{RC} \tag{5.32}$$

$$\frac{dq}{q - \mathscr{E}C} = -\frac{dt}{RC} \quad \overset{\text{on intègre}}{\Rightarrow} \quad \int_0^q \frac{dq'}{q' - \mathscr{E}C} = -\int_0^t \frac{dt'}{RC} \tag{5.33}$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{q - \mathscr{E}C}{-\mathscr{E}C}\right) = -\frac{t}{RC} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathscr{E}C - q}{\mathscr{E}C} = \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\} \tag{5.34}$$

$$\Rightarrow \quad q(t) = \mathscr{E}C\left[1 - \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\}\right] \tag{5.35}$$

$$\lim_{t\to 0} q(t) = \mathscr{E}C - \mathscr{E}C = 0 \tag{5.36}$$

$$\lim_{t\to\infty} q(t) = \mathscr{E}C \tag{5.37}$$

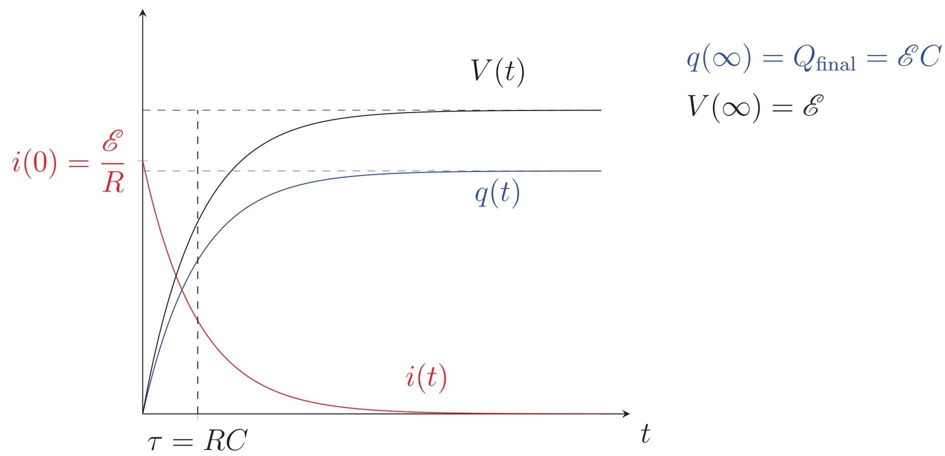
A partir de $q(t)$ on peut calculer $i(t)$ et $V(t)$:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\mathscr{E}C \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\}\left(-\frac{1}{RC}\right) = \frac{\mathscr{E}}{R}\exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\} \tag{5.38}$$

$$\rightarrow \quad i(0) = \frac{\mathscr{E}}{R} \quad ; \quad i(\infty) = 0$$

$$V(t) = \frac{q(t)}{C} = \mathscr{E}\left[1 - \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\}\right] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} V(0) = 0 \\ V(\infty) = \mathscr{E} \end{cases} \tag{5.39}$$

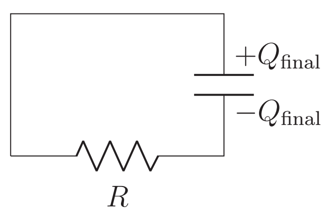
Graphiquement



$\tau = RC$ est le temps caractéristique du circuit RC, on l'appelle aussi "constante de temps", ou "temps de relaxation".

(B) Décharge d'un condensateur

Après avoir chargé, on enlève la batterie et on la remplace avec un fil (avec $R_{\text{fil}} \sim 0$)



A $t = 0$ on a $q(0) = Q_{\text{final}} = \mathscr{E}C$

On s'attend à quoi ? La charge revient là où elle était, c'est-à-dire le condensateur sera déchargé.
Maille (sans $\mathscr{E}$, ou $\mathscr{E} = 0$) :

$$-\frac{q}{C} - iR = 0 \tag{5.40}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{q}{C} - \frac{dq}{dt}R = 0 \quad ; \quad \frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC} \tag{5.41}$$

$$\int_{Q_{final}}^{q} \frac{dq'}{q'} = -\int_0^t \frac{dt'}{RC} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{q}{Q_{final}}\right) = -\frac{t}{RC} \tag{5.42}$$

et

$$q(t) = Q_{final} \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\} = \mathscr{E}C \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\} \quad \Rightarrow \begin{cases} q(0) = Q_{final} = \mathscr{E}C \\ q(\infty) = 0 \end{cases} \tag{5.43}$$

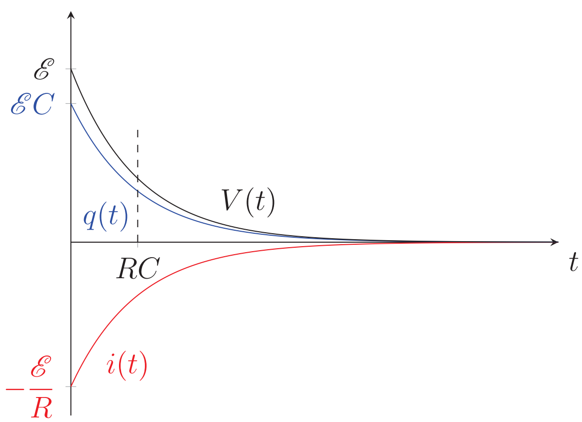
Courant

$$i(t) = \mathscr{E}C \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\} \left(-\frac{1}{RC}\right) = -\frac{\mathscr{E}}{R} \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\} < 0 \tag{5.44}$$

$$i \text{ va“a l'envers”} \qquad \begin{cases} i(0) = -\frac{\mathscr{E}}{R} \\ i(\infty) = 0 \end{cases}$$

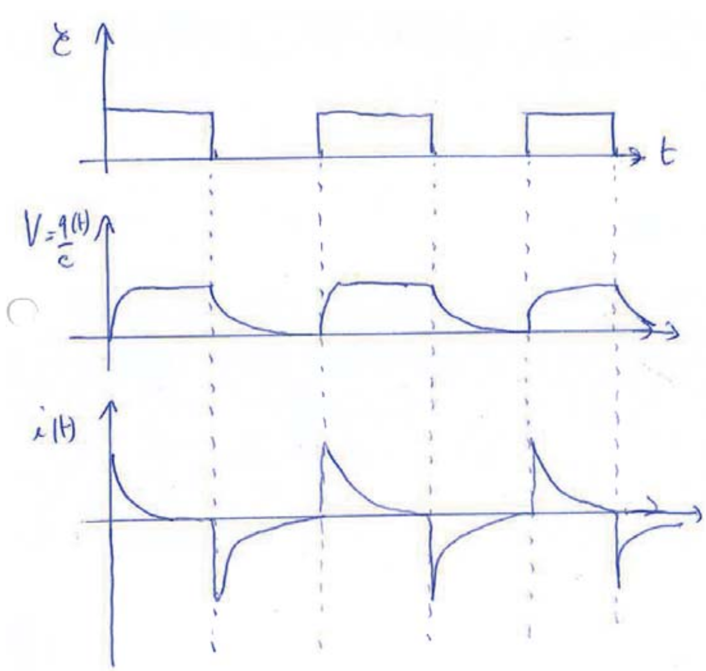
Potentiel

$$V(t) = \frac{q(t)}{C} = \mathscr{E}\exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} V(0) = \mathscr{E} \\ V(\infty) = 0 \end{cases} \tag{5.45}$$



La variation temporelle de toutes les quantités en jeu est déterminée par le facteur dans l'exposant : $\tau = RC$

Considérons maintenant d'alterner chargement/décharge, ce qui est équivalent à “allumer/éteindre” $\mathscr{E}$.
Que pouvons nous attendre ?



La forme de ces courbes dépend de le valeur de RC