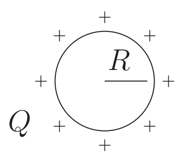
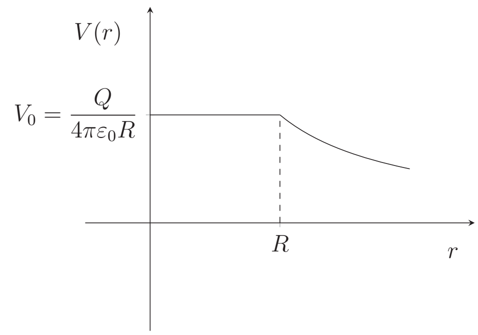
3.6 Capacité électrique

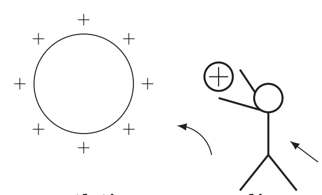
Revenons au cas simple d'une sphère chargée (métallique).



$$V_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$



V_0 est proportionnel à Q. Plus de charge je mets sur la sphère, plus j'augmente son potentiel. Mais au fur et à mesure que je mets de la charge, ça devient plus difficile d'en mettre encore, parce je dois la 'pousser' pour vaincre la répulsion.



Donc je dois faire du travail <u>contre</u> E, et en faisant ce travail j'augmente l'énergie potentielle du système et, bien sur, l'énergie/unité de charge, donc le potentiel.
Pour n'importe quel objet, on définit la "capacité" C comme :

$$Q = \underbrace{[\text{const.}]}_{\text{capacité, C}}\, V \qquad\qquad C = \frac{Q}{V} \tag{3.64}$$

$$[C] = \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} = \text{Farad, F}$$

<u>Ex.</u> sphère

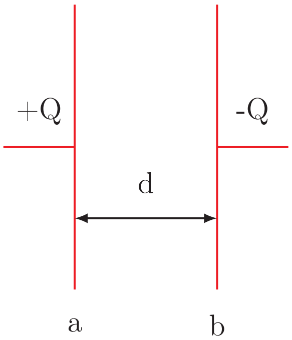
$$Q = \underbrace{4\pi\varepsilon_0 R}_{C} V_0 \qquad \Rightarrow \qquad C = 4\pi\varepsilon_0 R \quad \text{(ne dépend que de la géométrie)} \tag{3.65}$$

Plus la sphère est grande, plus de charge on peut y stocker.
<u>Ex.</u> terre $R \sim 6\times10^6$ m; $\quad C = 4\pi\varepsilon_0 R \cong 4\times3\times8.8\times10^{-12}\times6\times10^6 \cong 6\times10^{-4}\,\text{F} = 600\,\mu\text{F}$
(petit ! 1 F c'est une capacité énorme !)

Note 3.11. *Dans l'ex. conceptuel de la sphère, je considère que la charge que j'y mets dessus est prise à $r \to \infty$, où le potentiel est nul. Si je veux augmenter la possibilité de stocker la charge, donc la capacité, je devrais prendre la charge d'une surface proche.*

<u>Def.</u> "condensateur" : deux conducteurs séparés par un isolant (ou par la vide).

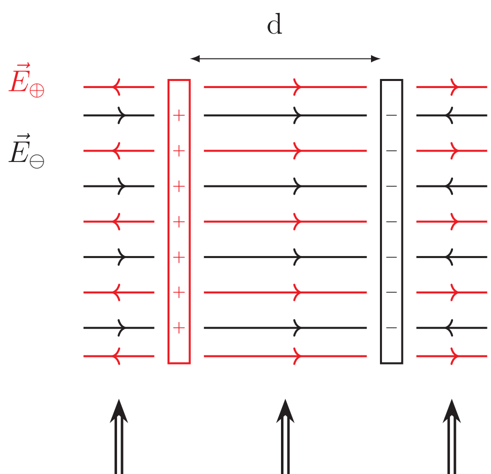
<u>Ex.</u> plans parallèles



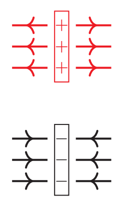
- Pas de charge au début
- Supposons de prendre de la charge $+Q$ d'un côté et de l'amener à l'autre côté.

Il n'y a pas de charge nette. Mais le processus de déplacer la charge d'un côté à l'autre est appelé 'charger le condensateur'.
$|\pm Q|$ = 'charge' du condensateur.
$C = \dfrac{Q}{V_a - V_b}$;   calculons-la !

L'idée est toujours de calculer le potentiel (ou le champ) produit par Q, puis prendre le rapport.



Chaque plaque produit un champ (effets de bord negligés) :



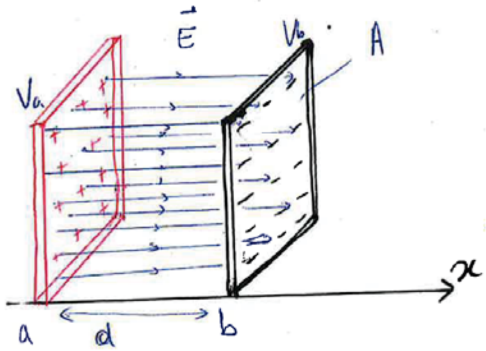
$$|E_\oplus| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$|E_\ominus| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$\vec{E}_\oplus + \vec{E}_\ominus = 0$ $\vec{E}_\oplus + \vec{E}_\ominus = 0$

$$|\vec{E}| = |\vec{E}_\oplus - \vec{E}_\ominus| =$$

$$= 2E_{\oplus\ominus} = \frac{\cancel{2}\sigma}{\cancel{2}\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \vec{E}\cdot\int_a^b d\vec{l} = Ed = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}d \tag{3.66}$$

$$\text{Mais } Q = \sigma A; \sigma = \frac{Q}{A} \tag{3.67}$$

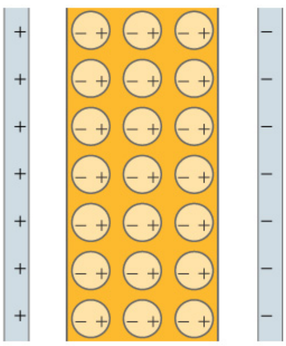
$$\Rightarrow C = \frac{Q}{V_a - V_b} = \frac{Q}{Ed} = \frac{Q}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}d} = \frac{\varepsilon_0 \cancel{Q}}{\frac{\cancel{Q}}{A}d} = \varepsilon_0\frac{A}{d} \tag{3.68}$$

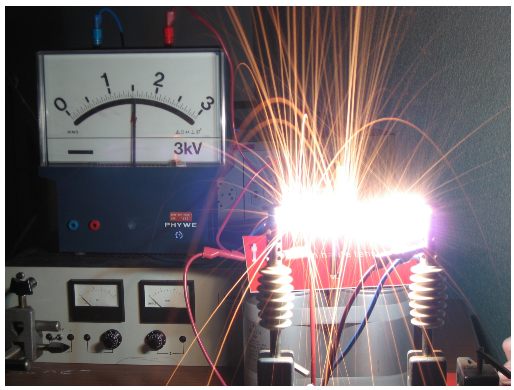
Note 3.12. *C dépend uniquement de facteurs géométriques.*
❦ *Si on fait un calcul de C et on trouve une dépendance de V, E, ou Q, on a fait certainement une erreur !*

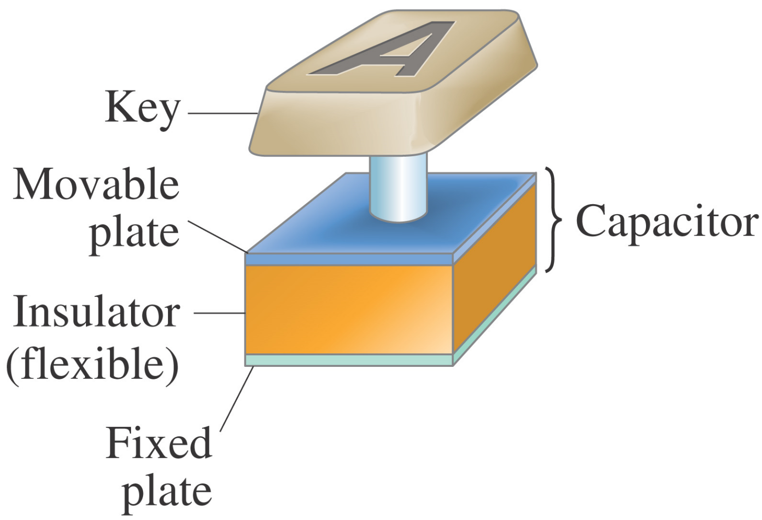
Note 3.13. *C augmente avec A (plus de place pour stocker charge), et diminue avec d (plus difficile de bouger la charge, car V augmente).*

Chapitre 4

Capacité électrique, condensateurs et diélectriques







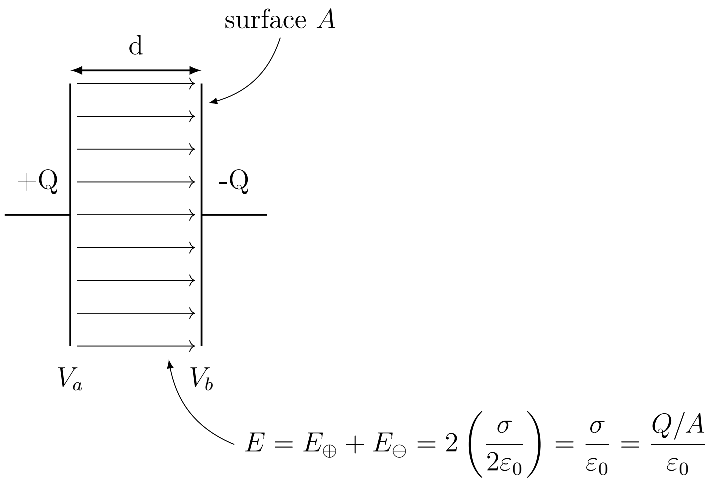
4.1 Capacité électrique et stockage d'énergie

Rappel

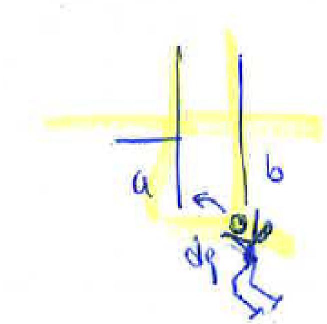
$$Q = \underbrace{\text{const.}}_{C} \times V \quad \Rightarrow \quad C = \frac{Q}{V} \tag{4.1}$$

Ex.

- sphère $C = 4\pi\varepsilon_0 R$
- plaques parallèles $C = \dfrac{Q}{V_a - V_b} = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d}$



Le condensateur comme un "emaganiseur" d'énergie



"je" dois faire du travail pour transférer la charge, petit à petit, par petits pas de dq, d'un côté à l'autre

$\dfrac{dW}{dq} = V$ (c'est la définition de V !)

$\Rightarrow dW = V dq$: et le travail total ?

$$W_{tot} = \int dW = \int_{Q_{initial}}^{Q_{final}} V dq = \int_0^Q V dq \underset{V=\frac{q}{C}}{=} \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C}\left[\frac{1}{2}q^2\right]_0^Q = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \tag{4.2}$$

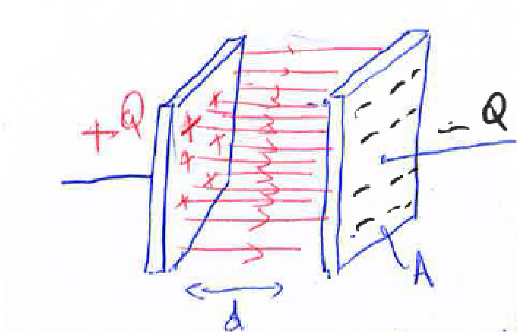
Le travail correspond à l'augmentation de l'énergie potentielle

$$U_{\text{stockée}} = W_{tot} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^{\cancel{2}}}{2\frac{\cancel{Q}}{V}} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}(CV)V = \frac{1}{2}CV^2 \tag{4.3}$$

Donc, plus C est grande, et plus V est élevée, plus grande est la quantité d'énergie qu'on peut stocker.
Donc un condensateur représente une façon de stocker de l'énergie dans un circuit, que l'on utilise après pour différentes fonctions, par ex. pour faire tourner un moteur ou allumer une ampoule.

Note 4.1. *C peut stocker l'énergie, mais ne peut pas l'amplifier. Par contre, on peut accumuler de l'énergie pendant un temps relativement long, puis l'utiliser sur un temps court : dans ce cas on amplifie la puissance.*

Évaluons l'énergie emmagasinée en termes de champ électrique



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$V = Ed = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$$

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

$$U = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \frac{A}{d} \right) (Ed)^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \underbrace{Ad}_{\text{volume}} \tag{4.4}$$

En général

$$\frac{dU}{d\text{Volume}} = \text{densité d'énergie} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \tag{4.5}$$

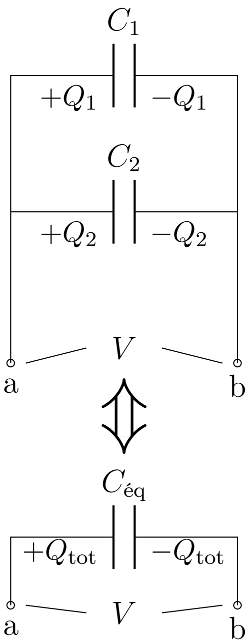
Donc l'énergie est stockée sons forme de champ électrique dans un certain volume.

4.2 Condensateurs dans les circuits électriques

Deux types de connexions : en série ou en parallèle

(1) C en parallèle → [parallèle = même potentiel, car les fils sont des surfaces équipotentielles]

V est le même!



$$V_{C_1} = V_{C_2} = V \quad ; \quad V = \frac{Q}{C} \quad \text{donc}$$

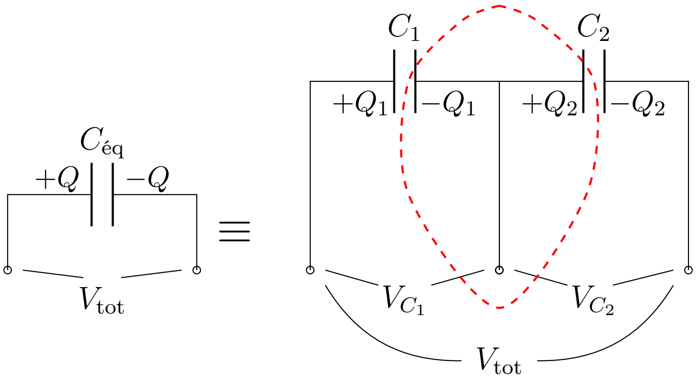
$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \quad ; \quad \text{et } Q_1 + Q_2 = Q_{tot}$$

$$C_{eq} = \frac{Q_{tot}}{V} = \frac{Q_1 + Q_2}{V} = \frac{Q_1}{V} + \frac{Q_2}{V} =$$

$$= \frac{Q_1}{V_{C_1}} + \frac{Q_2}{V_{C_2}} = C_1 + C_2 \tag{4.6}$$

Pour plusieurs C_j en parallèle : $C_{eq} = \sum_{j=1}^{N} C_j$

(2) C en série



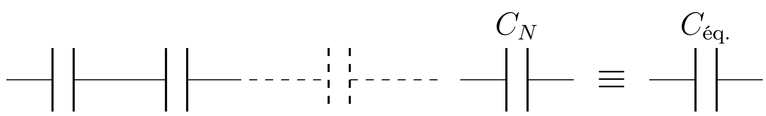
Ici $Q_1 = Q_2$ (par ex. si l'on considère la partie rouge, qui n'a aucune connexion externe)

$$\begin{cases} V_{tot} = V_{C_1} + V_{C_2} \\ Q_1 = Q_2 = Q \end{cases}$$

$$V_{tot} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = Q\left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right] = \frac{Q}{C_{eq}} \tag{4.7}$$

$$\Rightarrow C_{eq} = \left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right]^{-1} \tag{4.8}$$

Pour plusieurs C_j en série : $C_{éq} = \left[\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{C_j}\right]^{-1}$



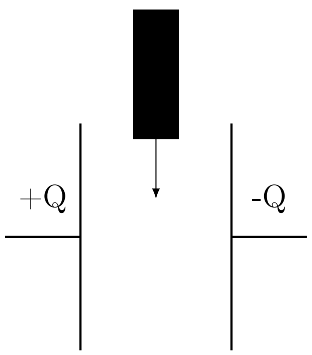
4.3 Diélectriques et polarisation

Note 4.2. *Prenons* $A \simeq 1\,\mathrm{m}^2$; $d = 1\,\mathrm{mm}$

$$\Rightarrow \quad C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = \frac{8.8 \times 10^{-12} \times 1}{10^{-3}} = 10^{-8}\,\mathrm{F} = 10\,\mathrm{nF}$$

Très petite valeur ! Comment, dans la pratique, produit-on des capacités avec $C \sim \mu$F ou mF ? Diélectriques !

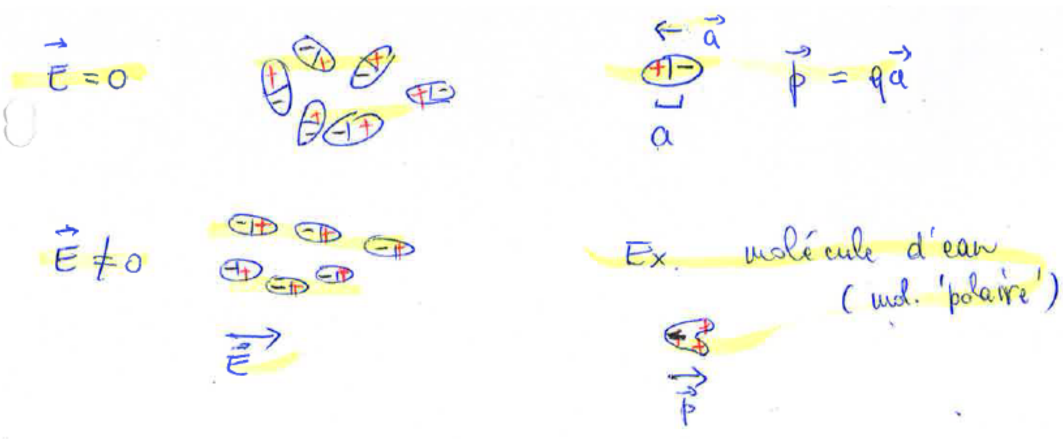
DEMO potentiel qui varie avec la distance entre les deux plaques, et avec l'insertion d'un diélectrique.



Q ne change pas ; mais lorsqu'on insère la plaque de diélectrique, la tension V diminue. Comme $V = \frac{Q}{C}$, cela veut dire qu'on a augmenté la valeur de C en insérant le diélectrique.

Pourquoi ? L'explication est dans le comportement des diélectriques au niveau microscopique.

Un diélectrique ($\equiv$ isolant) est fait de petits dipôles. Les charges ne peuvent pas vraiment bouger librement, mais les dipôles peuvent tourner et s'aligner avec le champ $\vec{E}$.

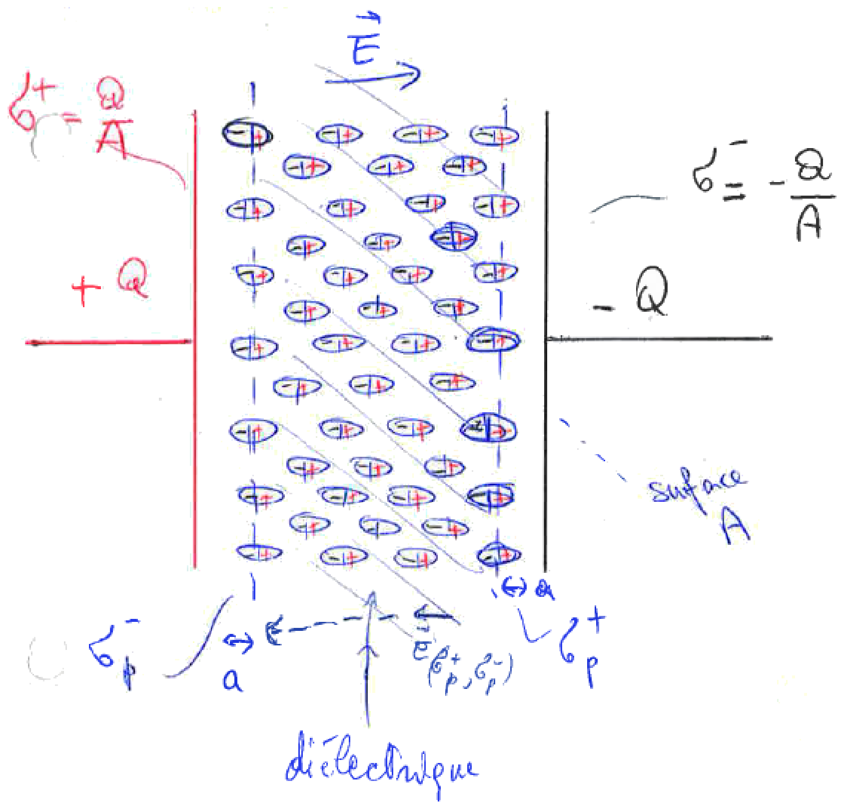


Déf. $\vec{P} = n\vec{p}$ "polarisation", où n est le nombre de dipôles par unité de volume.
Ça dépend du matériau, mais aussi du champ $\vec{E}$!
En effet plus grand est $|\vec{E}|$, plus grande est la valeur de $|\vec{P}|$ (et la direction sera la même que $\vec{E}$)

$$\vec{P} = const. \times \vec{E} = (\varepsilon_0 \chi)\vec{E} \quad \textbf{où on définit} \quad \chi \text{ "susceptibilité" diélectrique}$$

$$\chi \text{ est un scalaire sans dimensions}; \quad \chi > 0.$$

Vision microscopique à l'intérieur du condensateur avec diélectrique



Toutes les charges des dipôles se compensent, excepté pour les deux couches externes. Celles-ci ont une densité de charge superficielle de σ_p^+ et σ_p^-.
Ces couches non-équilibrées ont une épaisseur de $\sim a$ (la taille des dipôles). Ces densités de charge superficielle créent un champ qui à l'intérieur du matériel s'oppose au champ original, et le diminue.
Combien de charges de polarisation ne sont pas équilibrées ?
\# de charges non-équilibrées $= \underbrace{n}_{\frac{\#\text{ de dipôles}}{\text{volume}}} \times \underbrace{aA}_{\text{volume}} = naA$

Densité superficielle

$$|\sigma_p^+| = |\sigma_p^-| = \frac{Q_p^{tot}}{A} = \frac{q\overbrace{naA}^{\#\,charges}}{A} = qna = np = P \tag{4.9}$$

$$\Rightarrow |\sigma_p^+| = |\sigma_p^-| = P \tag{4.10}$$

Champ total, réduit par l'effet de la polarisation :

$$E = \underbrace{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}_{\text{vide}} + \underbrace{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}_{\text{vide}} - \frac{|\sigma_p^+|}{2\varepsilon_0} - \frac{|\sigma_p^-|}{2\varepsilon_0} = \underbrace{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}}_{E_0} - \underbrace{\frac{P}{\varepsilon_0}}_{\frac{\varepsilon_0\chi E}{\varepsilon_0}=\chi E} = E_0 - \chi E \tag{4.11}$$

$$\Rightarrow E(1+\chi) = E_0 \tag{4.12}$$

$$E = \frac{E_0}{1+\chi} \stackrel{def.}{=} \frac{E_0}{K} \quad \text{avec} \quad K \stackrel{def.}{=} 1+\chi \quad \text{“constante diélectrique”} \tag{4.13}$$

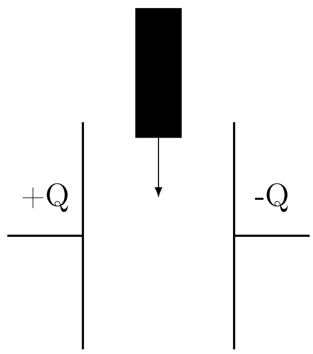
des fois on l'indique avec ε_r
“permittivité relative”

$$K > 1 \text{ car } \chi > 0$$

K donne le facteur de réduction du champ (et donc du potentiel) à cause de la présence du diélectrique et sa charge de polarisation à la surface.

On peut maintenant qualifier l'augmentation de C :

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{Ed} = \frac{QK}{dE_0} = KC_0 \tag{4.14}$$



où C_0 est la valeur de la capacité sans diélectrique.

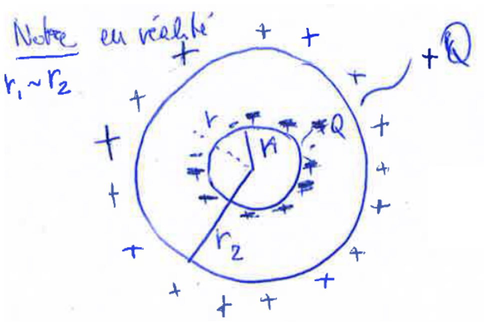
La capacité est donc augmentée d'un facteur K (le même que le facteur de réduction de E) $E \to \frac{E_0}{K}$; $V \to \frac{V_0}{K}$.
Dans la pratique, on choisit des diélectriques avec une grande valeur de K pour augmenter le valeur de C.

Ex. de valeurs de K

matériel	$K = 1 + \chi$
vide	1
air	1.0006
plexiglas	3.4
eau	80 (20°)
ethanol	23
céramique	~ 5000
verre	$5 - 15$

Effets biologiques : beaucoup d'interactions en biologie sont liées aux forces électrostatiques dans les fluides (en grande majorité, eau). Si on remplace l'eau avec d'autres liquides qui ont des valeurs très différentes de K, par ex. l'alcool, ces interactions sont fortement influencées !

Ex. Cellule vue comme un condensateur sphérique. Quelle est sa capacité ? Et la valeur du champ ? Ou de la densité de charge ?



$$E(r) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} \tag{4.15}$$

$$V_{out} - V_{in} = \Delta V = +\int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}dr =$$

$$= +\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] > 0 \tag{4.16}$$

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right) > 0 \tag{4.17}$$

Capacité :

$$C = \frac{|Q|}{|\Delta V|} = \frac{\cancel{Q}}{\frac{\cancel{Q}}{4\pi\varepsilon_0}\left|\left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}\right)\right|} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{r_1 r_2}{|r_1 - r_2|} \tag{4.18}$$

Cellule :

$$\begin{cases} r_1 \sim r_2 \sim 10^{-5}\,\mathrm{m} \quad (= 10\,\mu\mathrm{m}) \\ r_1 - r_2 \sim 6 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad C \simeq 4\pi\varepsilon_0 \frac{(10^{-5})^2}{6 \cdot 10^{-9}} \cong \frac{12 \times 8.8 \times 10^{-12} \times 10^{-10}}{6 \times 10^{-9}} \cong 1.8 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F} \simeq 2\,\mathrm{pF}$$

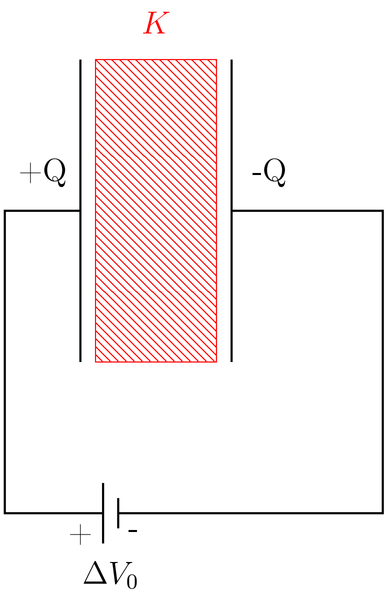
A partir de C on peut calculer la charge sur la surface de la cellule : $|Q| = C|\Delta V|$, et typiquement $|\Delta V| \sim 0.1\,\mathrm{V} = 100\,\mathrm{mV}$

$$\Rightarrow \quad |Q| \simeq 2{\cdot}10^{-12}{\cdot}0.1\,\mathrm{C} = 2{\cdot}10^{-13}\,\mathrm{C}; \quad N = \frac{Q}{e} = \frac{2\cdot 10^{-13}\,\mathrm{C}}{1.6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}} \cong 10^{6} \text{ charges élémentaires}$$

Densité de charge à la surface :

$$\sigma \sim \frac{|Q|}{4\pi r_1^2} \simeq \frac{|Q|}{4\pi r_2^2} \simeq \frac{2\cdot 10^{-13}\,\mathrm{C}}{12\cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}^2} = \frac{1}{6}\cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} \simeq 0.17\times 10^{-3}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$$

Mais quand on <u>mesure</u>, on trouve $\sigma_{\text{réel}} \sim 10\sigma$: pourquoi ? Parce que la membrane a des propriétés diélectriques, qui font que $C \to KC_0$, avec $K \sim 10$!
En effet, en réalité, $C \sim 20\,\mathrm{pF}$, et pas $2\,\mathrm{pF}$!
<u>Énergie stockée</u> dans un condensateur avec diélectrique.
On a vu que l'énergie stockée est $U_{\text{stockée}} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2$.
Considérons maintenant un condensateur avec diélectrique, auquel on applique une différence de potentiel ΔV_0



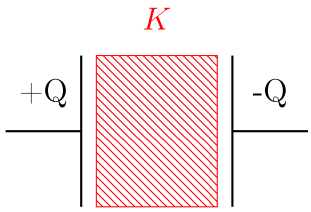
$$Q_0 = (KC_0)\Delta V_0$$

$$\text{ou} \quad \Delta V_0 = \frac{Q_0}{KC_0}$$

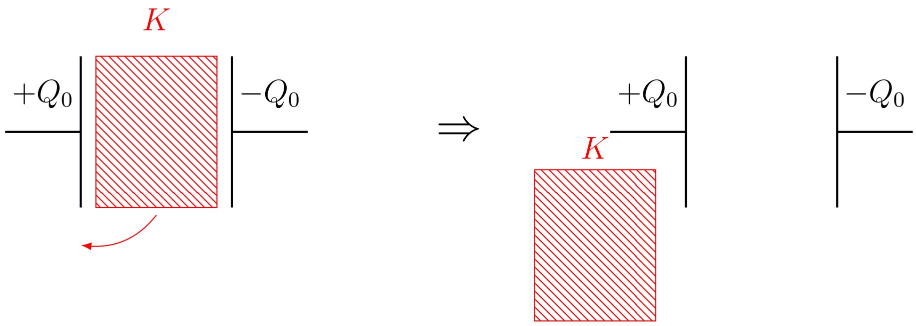
C_0 est la capacité du condensateur sans diélectrique

Détachons la batterie, en laissant donc la même charge Q_0 sur les plaques du condensateur. L'énergie stockée est donc

$$U_{avant} = \frac{1}{2}\underbrace{(KC_0)}_{C}\Delta V_0^2$$



Maintenant enlevons le diélectrique



$Q_0 = const.$
(on n'a pas enlevé la charge!)

Que vaut ΔV ? $\Delta V = \frac{Q_0}{C_0}$ (il n'y a plus de K !) Donc $\Delta V = K\Delta V_0$: la tension a augmenté ! Et l'énergie ?

$$\Rightarrow U_{apres} = \frac{1}{2}C_0\Delta V^2 = \frac{1}{2}C_0K^2\Delta V_0^2 = \underbrace{\frac{1}{2}(KC_0)\Delta V_0^2}_{U_{avant}} \times K = U_{avant} \times K \tag{4.19}$$

Donc l'énergie a augmenté

$$U_{après} - U_{avant} = (K-1)U_{avant} \tag{4.20}$$

D'où vient cette énergie ?
Idée : Nous avons dû faire un travail pour "sortir" le diélectrique du condensateur, donc ça vient de nous !
Donc, si on doit faire un travail pour extraire le diélectrique, en augmentant l'énergie du système, ça veut dire que le diélectrique devrait naturellement être attiré à l'intérieur du condensateur.