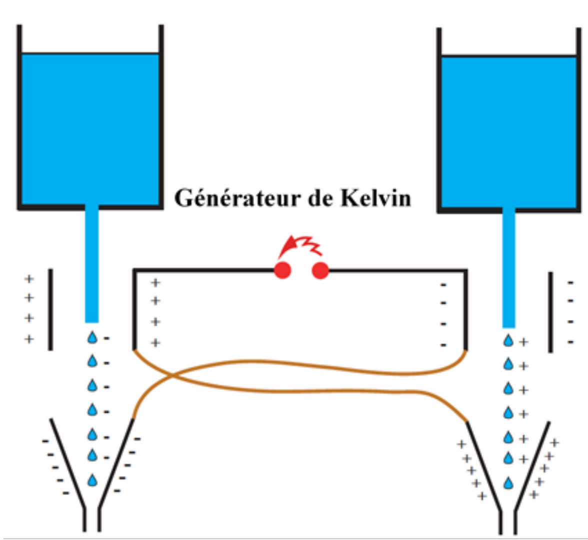
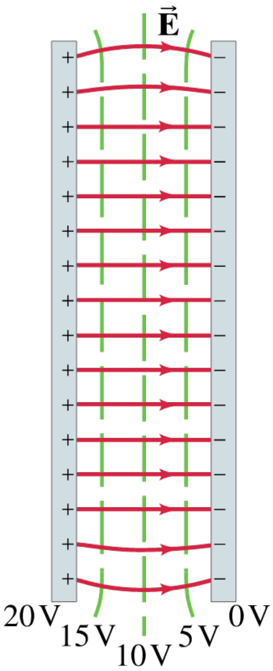
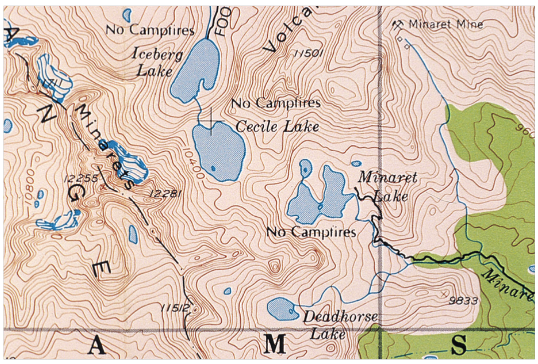
Chapitre 3

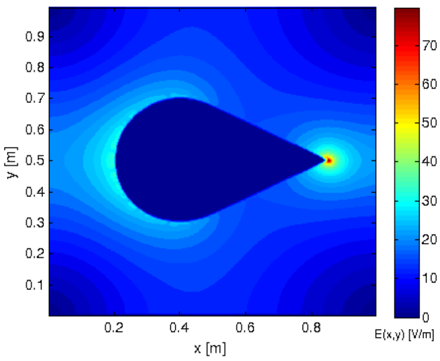
Potentiel électrique

Alessandro Volta (1745-1827)









3.1 Energie potentielle électrique

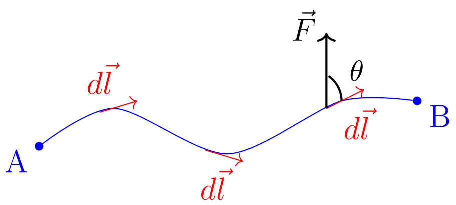
On commence la discussion avec une expérience ‘challenge’.

$\boxed{\textbf{DEMO 1}}$ **Générateur de Kelvin**

Cette expérience contient beaucoup d’éléments de la physique que nous avons vu jusqu’à maintenant, et que nous allons voir cette semaine.
Observez-la le long du cours, et réfléchissez sur l’explication ! Qu’est-ce qui cause la décharge électrique ? On a l ’impression que de l’énergie électrique est générée : d’où vient-elle ? “Qui” fait le travail nécessaire pour la générer ?

Rappel énergie potentielle en général.

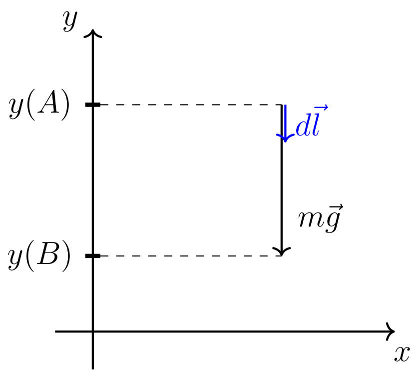
Travail fait par une force sur un corps qui va de A à B : $W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_A^B F cos\theta dl$



Note 3.1. *$\vec{F}$ n’est pas forcément alignée avec $d\vec{l}$!*

Force ‘conservative’ : $W_{A\to B}$ ne dépend pas du chemin. Donc le travail dépend uniquement du point initial et du point final. En particulier, le travail net est nul lorsque l’on revient ou point initial.
Dans ce cas $W_{A\to B} = U(A) - U(B)$: le travail peut être exprimé comme la différence entre deux quantités scalaires associées aux deux points dans l’espace, le départ et l’arrivée. En effet, c’est la même quantité scalaire <u>évaluée</u> aux deux points. C’est l’énergie potentielle.

<u>Ex.</u> gravitation

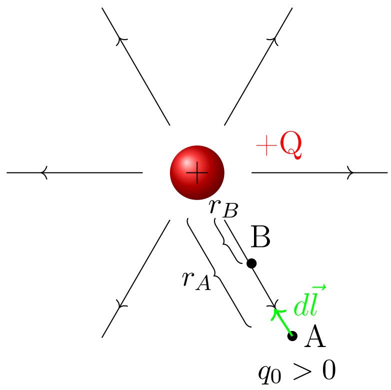


$$\begin{aligned} W_{A\to B} &= \int_{y(A)}^{y(B)} m\vec{g}\cdot d\vec{l} \\ &= -\int_{y(A)}^{y(B)} mgdy \\ &= -mg[y(B) - y(A)] \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$W_{A\to B} = -mg[y(B) - y(A)] = \underbrace{\underbrace{mgy(A)}_{U(A)} - \underbrace{mgy(B)}_{U(B)}}_{>0\text{: la gravité a fait du travail}} = -\Delta U \tag{3.2}$$

note convention
$\Delta U = U(final) - U(initial)$

⇒ **énergie potentielle gravitationelle** est $\boxed{mg \times (hauteur)}$;
Si nous poussons un poid vers le haut, nous faisons du travail positif, et le travail fait par la gravité est négatif.
Par analogie : énergie potentielle électrique.



On considère une charge ponctuelle Q (>0). On veut rapprocher une charge de test q_0 (>0) de A à B.
Quel est le travail ?
On devra investir du travail nous-mêmes, comme pour faire remonter un poids dans le champ gravitationnel.

Le travail fait par la force électrique devrait être négatif.

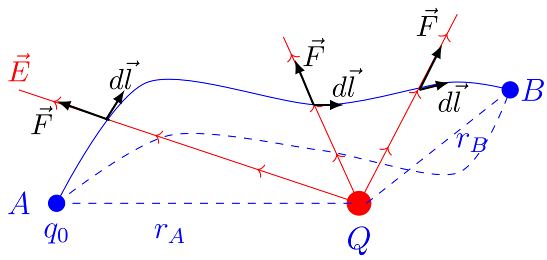
$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_A^B q_0\vec{E}\cdot d\vec{l} =; \qquad \text{mais } \vec{E} \text{ est dirigé comme } -d\vec{l}(\text{ou } dr) \tag{3.3}$$

$$= -q_0\int_A^B Edl = q_0\int_A^B Edr; \qquad \text{mais } E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}; \tag{3.4}$$

$$W_{A\to B} = \frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^B \frac{1}{r^2}dr = \frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right] < 0; \qquad \text{car } r_A > r_B; [Q, q_0 > 0] \tag{3.5}$$

Note 3.2. *$W_{A\to B} < 0$ aussi si $Q, q_0 < 0$: même signe → répulsion, on doit toujours 'pousser' pour rapprocher les charges.*

Si $Q > 0, q_0 < 0$ ou $Q < 0, q_0 > 0 \Rightarrow W_{A\to B} > 0$ (attraction)
Est-ce qu'on peut attribuer une énergie potentielle au champ électrique ? Oui, mais seulement si on démontre que $W_{A\to B}$ est indépendant du chemin !



$\vec{E}$ est dirigé radialement

$$\vec{F} = q_0\vec{E} = \frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{r} \tag{3.6}$$

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^B \frac{1}{r^2}\hat{r}\cdot d\vec{l} \tag{3.7}$$

Mais $\hat{r}\cdot d\vec{l} = dr$: seulement la composante radiale du déplacement compte et contribue au travail.
Donc :

$$W_{A\to B} = \frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^B \frac{dr}{r^2} = \frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right] \qquad \text{c'est indépendant du chemin !} \tag{3.8}$$

On peut donc attribuer une énergie potentielle au champ électrique, qui est conservatif.

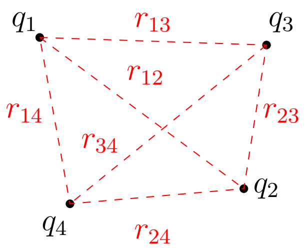
Note 3.3. *Comme toutes les forces radiales*

$$W_{A\to B} \overset{\text{déf}}{=} U(A) - U(B) = -\Delta U \tag{3.9}$$

$$\text{avec} \quad \boxed{U(r) = \frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}} \tag{3.10}$$

Energie potentielle associée aux deux charges q_0, Q à distance r

Comme U est définie par rapport à une référence (donc à une constante près), on peut choisir $U(\infty) = 0$ comme référence. Avec ce choix, $U(r)$ correspond à l'énergie/travail nécessaire à amener deux charges de distance infinie à une distance r.
Et pour plusieurs charges ? $\Rightarrow$ **principe de superposition**
Le champ est en effet conservatif pour toute distribution de charges. L'énergie totale sera la somme des énergies associées à chaque paire de charges.



C'est beaucoup plus simple de sommer les énergies que les champs, car c'est une somme de scalaires. La seule difficulté est ne pas compter les paires à double...

$$U_{tot} = \sum_{i<j} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}; \tag{3.11}$$

3.2 Le potentiel électrique

L'énergie est une propriété de la distribution de charges considérée, pas de l'espace. Maintenant, nous appliquons la même idée que nous avons utilisée pour passer de la force au concept de champ, en considérant l'effet par unité de charge.

$$\Rightarrow \text{Déf. potentiel électrique} = \frac{\text{énergie potentielle électrique}}{\text{unité de charge}}$$

$$\boxed{V = \frac{U}{q_0}} \tag{3.12}$$

Pour une charge ponctuelle

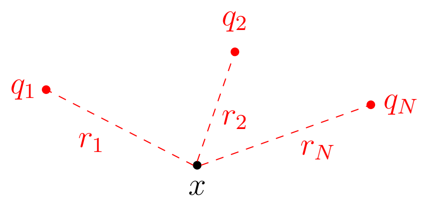
$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \tag{3.13}$$

Comme pour U, V est défini en relation à un point, ici $r = \infty, V(r \to \infty) = 0$

Unités : $\quad [V] = \dfrac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}} = $ “Volt” [de Alessandro Volta...]

Plusieurs charges

$$V(\vec{x}) = \sum_j \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_j}{r_j} \tag{3.14}$$



Distribution de charges continue :

$$V = \int_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{r} \qquad S \text{ : distribution de charges} \tag{3.15}$$

Signification de V :

$$W_{A\to B} = U(A) - U(B) \Rightarrow \frac{W_{A\to B}}{q_0} = V(A) - V(B) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{‘différence de potentiel} \\ \text{entre A et B’}}}{-\Delta V} \tag{3.16}$$

$-\Delta V$ est donc le travail par unité de charge fait par la force électrique lorsque les charges sont bougées de A à B.

$$W_{A\to B} = -q_0 \Delta V \tag{3.17}$$

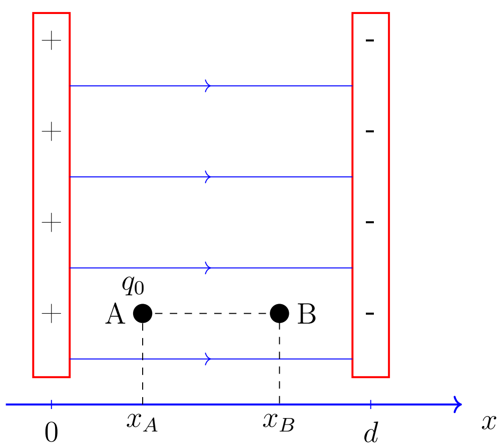
$$\text{et} \quad V(A) - V(B) = -\Delta V = \frac{W_{A\to B}}{q_0} = \frac{1}{\cancel{q_0}} \int_A^B \cancel{q_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}; \tag{3.18}$$

$$V(A) = V(B) + \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \tag{3.19}$$

$$\text{Si on choisit } B \to \infty \qquad V(A) = -\int_\infty^A \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{et} \quad V(\infty) = 0 \tag{3.20}$$

Relation entre V et $\vec{E}$

<u>Ex.</u> deux plaques parallèles

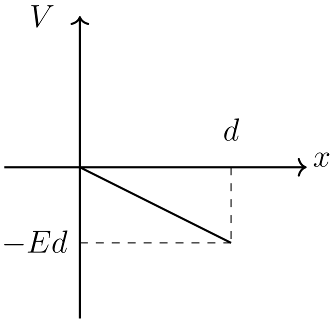


$$W_{A\to B} = \int_A^B q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = U(A) - U(B)$$

$$\overset{\substack{\text{E=const. et} \\ \text{dirigé selon x}}}{=} \int_{x_A}^{x_B} q_0 E dx$$

$$= q_0 E (x_B - x_A) \tag{3.21}$$

$$U(A) = -q_0 E x_A; \qquad \text{en général } U(x) = -q_0 E x, \qquad \text{et} \qquad \boxed{V(x) = -Ex}$$

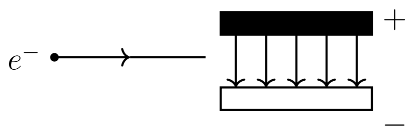


Mais cette fois-ci on ne peut pas prendre $V(\infty) = 0$, mais plutôt $V(x = 0) = 0$ [et $U(x = 0) = 0$]

Si on va d'une plaque à l'autre $V(d) = -Ed$.
En effet, V est plus bas à la plaque négative [pour une charge test $q_0 > 0$ on "descend" dans le potentiel, alors que pour une charge test $q_0 < 0$ on "remonte"].
Visualisons la "descente" on la "remontée" d'un faisceau d'électrons dans ce type de potentiel, avec un champ uniforme entre deux plaques, mais en présence d'une vitesse initiale $v \neq 0$.

Note 3.4. *La gravité ici n'a aucun effet...*

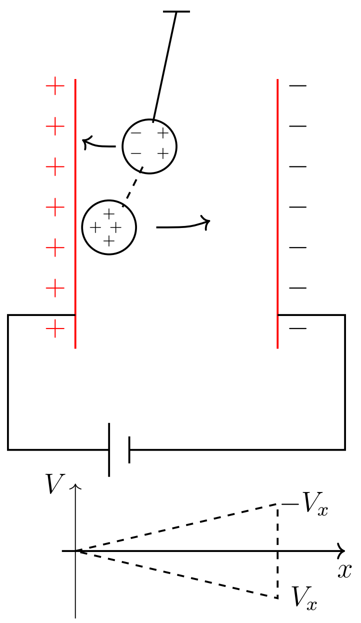
DEMO Déviation électrostatique d'un faisceau d'électrons.



Quelle direction prendra le faisceau ?

Observons le même effet, mais sans vitesse initiale, et avec un objet visible macroscopiquement.

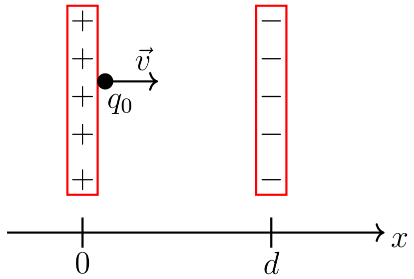
DEMO



La balle se charge d'un côté, et "descend" dans son énergie potentielle de l'autre côté, où elle prend de la charge de signe opposé. Elle "re-descend" de l'autre côté encore, et ainsi de suite...

Utilisation du concept de potentiel

Dans la pratique, on applique une différence de potentiel (="voltage" ou "tension") pour obtenir un travail ; la question est : combien d'énergie acquièrent les charges ?
<u>Ex.</u> on applique ΔV entre deux plaques ; q_0 à gauche, à repos.



Energie de q_0 à $x = d$?

$$\Delta V = V(d) - V(0) = -E \cdot d + E \cdot 0 =$$

$$= -E \cdot d \tag{3.22}$$

$$\Rightarrow E = -\frac{\Delta V}{d} \tag{3.23}$$

Note 3.5. *E est mesuré aussi en* $[E] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

<u>Énergie</u>

$$\cancel{K_0} + U_0 = \overbrace{K_d}^{\text{cinétique}} + \overbrace{U_d}^{\text{potentielle}} \quad \Rightarrow \quad K_d = U_0 - U_d = q_0(V_0 - V_d) = -q_0 \Delta V = q_0 E d \tag{3.24}$$

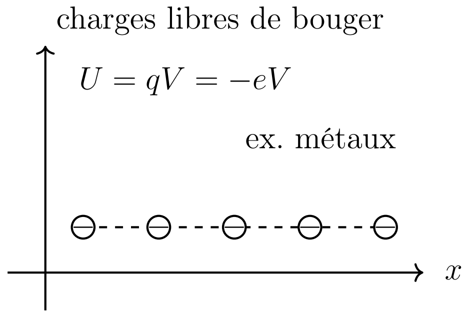
Donc $$\frac{1}{2}mv^2 = -q_0 \Delta V = q_0 E d \tag{3.25}$$

La particule chargée acquiert de l'énergie car le champ/force fournit du travail.

Note 3.6. *Les téléviseurs à tube cathodique fonctionnaient comme ça avec des plaques qui contrôlent l'énergie (→ intensité et couleur) et la trajectoire, des électrons (position sur l'écran).*

Classification simple de matériaux vis-à-vis de la possibilité d'avoir des charges qui bougent à l'intérieur.

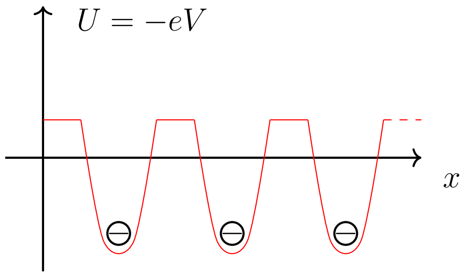
<u>Conducteurs</u>
vision microscopique



les électrons peuvent 'rouler' facilement (sans travail). Ils ne sont pas piégés à un endroit particulier.

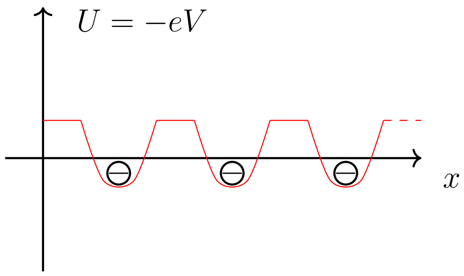
Note 3.7. *En réalité les effets quantiques ne sont pas négligeables...*

Isolants



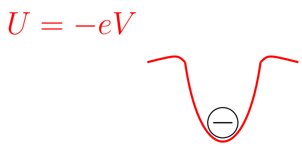
pas de ‘roulement’ libre pour les électrons. Seulement des petites oscillations autour de l’équilibre.

Semi-conducteurs
(entre les deux)

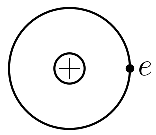


comme les isolants, mais les puits sont peu profonds, et les électrons peuvent sortir et transporter de la charge.

Ces structures sont plus ou moins fixes pour les solides, mais peuvent bouger pour les liquides et le gaz.
Par ex. dans un gaz (e.g. H)



on peut ‘libérer’ l’électron et ioniser la gaz



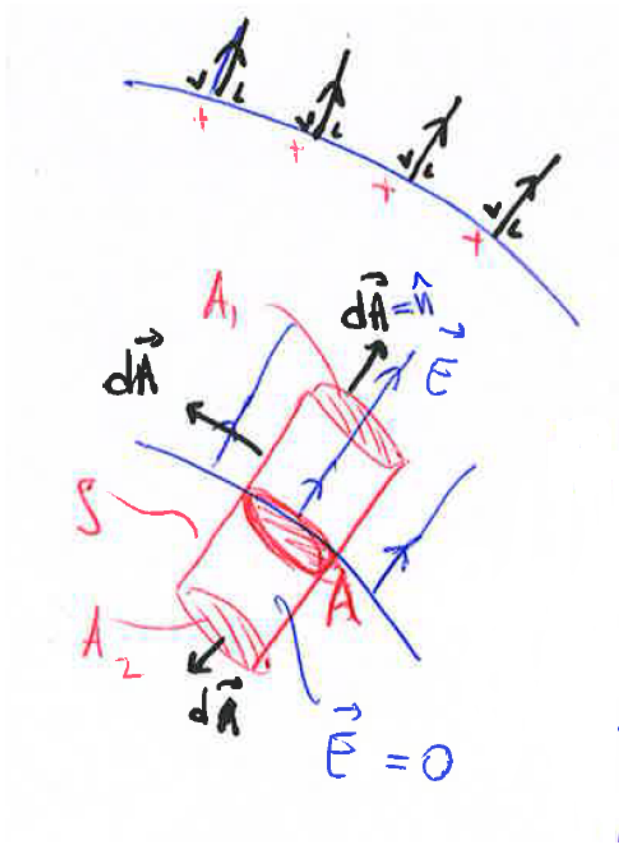
3.3 Propriétés des conducteurs dans des champs électrostatiques

(1) $\vec{E} = 0$ à l’intérieur (si non, les charges bougeraient) ;

(2) Pas de charges à l’intérieur, seulement sur la surface (Gauss) ;

(3) $\vec{E}$ est $\perp$ à la surface, car c’est à la surface que les charges se trouvent ; et toute composante du champ électrique parallèle à la surface les ferait bouger, chose pas admise dans une situation d’équilibre électrostatique.

(4)

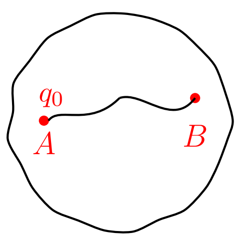


$$\text{Si } \sigma = \frac{dq}{da} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n} \tag{3.26}$$

$$\text{Car } \Phi_E^S = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_{A_1} \vec{E}\cdot d\vec{A} + \underbrace{\int_{\text{côté}} \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{=0 \text{ car } \vec{E}\perp d\vec{l}} + \underbrace{\int_{A_2} \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{=0 \text{ car } E=0} = \int_{A_1} \vec{E}\cdot d\vec{A} \tag{3.27}$$

$$\text{Donc} \qquad \Phi_E^S = \int_{A_1} \vec{E}\cdot d\vec{A} = E\cancel{A} = \frac{Q_{\text{en S}}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \cancel{A}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}} \tag{3.28}$$

(5) Le potentiel est constant - les conducteurs sont ‘équipotentiels’

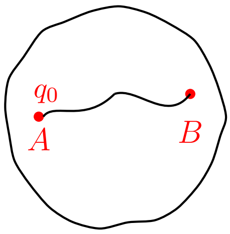


$$V(A) - V(B) = \frac{1}{q_0}\int_A^B q_0 \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \qquad \text{car } \vec{E} = 0 \tag{3.29}$$

$$\Rightarrow V(A) = V(B) \qquad \forall A, B \tag{3.30}$$

Donc on ne fait pas de travail pour déplacer les charges (quasi-statiquement ! on ignore le frottement) sur un conducteur.

Question : pouvons-nous inverser l’argument et dire que $\vec{E} = 0$ toujours sur les surfaces équipotentielles ? NON, pas en général !



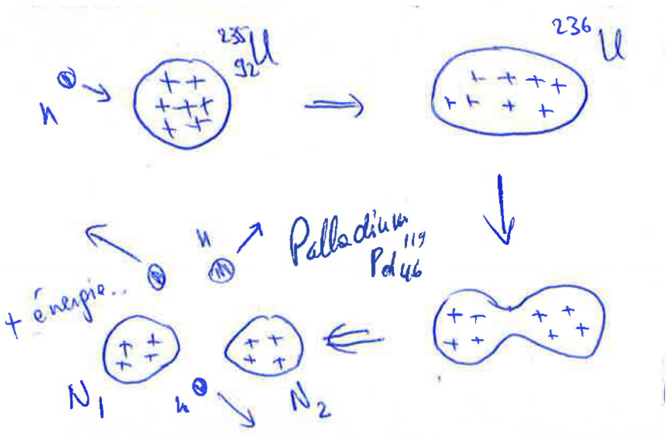
Si $V(A) = V(B), \forall A, B$, ça implique que le travail est nul : $\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ si $d\vec{l}$ est le long une surface équipotentielle.

Mais cela n'implique pas forcément $\vec{E} = 0$: on pourrait avoir $\vec{E} \perp d\vec{l}$

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{E} = 0 \\ \vec{E} \perp d\vec{l} \end{cases} \quad \text{donc...}$$

(6) En général, $\vec{E} \perp$ surfaces équipotentielles.

Exercice de calcul d'énergie potentielle électrique : fission nucléaire.



<u>Énergie relâchée ?</u> (calcul fait sans connaître la physique nucléaire !)

distance moyenne proton-proton
$d \simeq 10^{-14}$ m

Énergie potentielle du noyau d'Uranium

$$U(Z = 92) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2} \frac{(91 \cdot 92)}{d} e^2 \tag{3.31}$$

Énergie potentielle des deux noyaux résultants de la fission :

$$U(Z = 46) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2} \frac{(45 \cdot 46)}{d} e^2 \tag{3.32}$$

Différence

$$\Delta U = U(Z = 92) - 2U(Z = 46) = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 d} \left[\frac{91 \cdot 92}{2} - 45 \cdot 46 \right] =$$

$$\cong 2.7 \times 10^{-11}\,\mathrm{J} \qquad \text{pour une réaction} \tag{3.33}$$

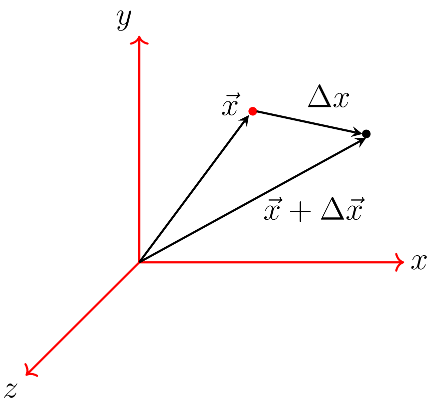
1kg de $^{235}U \rightarrow \frac{1000}{235} \times N_A$ atomes $= 2.55 \times 10^{24}$ atomes
Donc $\Delta U_{tot} = 2.55 \times 10^{24} \times 2.7 \times 10^{-11}\,\mathrm{J} \cong 7 \times 10^{13}\,\mathrm{J} \sim 20000$ tonnes de TNT...

3.4 Le champ électrique comme dérivée du potentiel

Concept de gradient et relation entre $\vec{E}$ et V.
Si

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}, \tag{3.34}$$

peut on trouver $\vec{E}$ à partir de V ?
V est une sorte d'intégrale de $\vec{E}$, donc $\vec{E}$ sera une sorte de dérivée de V.
Considérons deux points proches (supposons $|\Delta\vec{x}|$ petit)



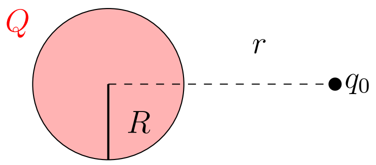
$$\begin{aligned} &V(\vec{x} + \Delta\vec{x}) - V(\vec{x}) = \\ &= \int_{\vec{x}+\Delta\vec{x}}^{\vec{x}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\vec{x}}^{\vec{x}+\Delta\vec{x}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \\ &\quad (\text{car } \vec{E} \simeq \text{ const. sur un petite distance}) \;= \\ &\cong - \vec{E} \cdot \int_{\vec{x}}^{\vec{x}+\Delta\vec{x}} d\vec{l} = -\vec{E} \cdot \Delta\vec{x} = \\ &= - \{E_x, E_y, E_z\} \{\Delta x, \Delta y, \Delta z\} = \\ &=(-E_x)\Delta x + (-E_y)\Delta y + (-Ez)\Delta z; \end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\text{mais} \qquad V(\vec{x} + \Delta\vec{x}) - V(\vec{x}) = \frac{\partial V}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\Delta z \qquad \forall \Delta x, \Delta y, \Delta z \quad \text{petits} \tag{3.36}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V, \qquad \vec{\nabla} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\} \tag{3.37}$$

Donc on peut bien trouver $\vec{E}$ à partir de V, qui est une quantité scalaire, pour laquelle l'application du principe de superposition est plus simple. La direction de $\vec{E}$ est donc celle le long de laquelle le potentiel décroît le plus rapidement.

Ex. de calcul simple : sphère métallique



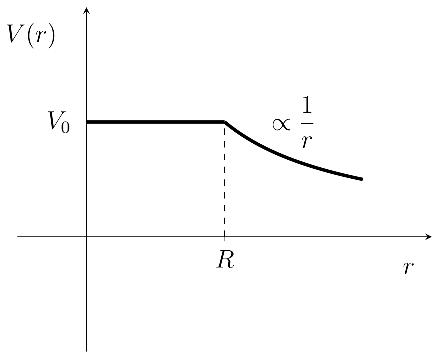
$V(r) = V_0 \quad \text{const. pour} \quad r \leq R$

$V(r) = ? \quad \text{pour} \quad r > R?$

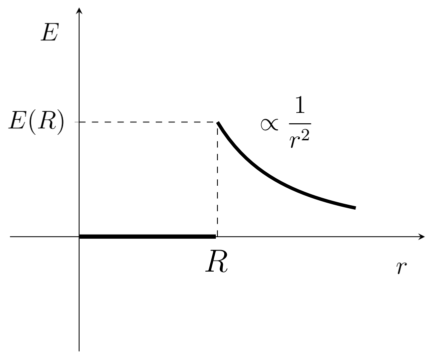
$\vec{E}(r) = ?$

$$V(r) = \frac{U(r)}{q_0} = \frac{1}{q_0}\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq_0}{r}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \tag{3.38}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} = \left[-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\hat{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{r} \tag{3.39}$$



$(V(r \to \infty) = 0)$



Et si l'objet n'est pas sphérique ?

$$\text{métal} \equiv \text{conducteur} = \begin{cases} \text{surface équipotentielle} \\ \text{charge uniquement sur la surface} \end{cases}$$

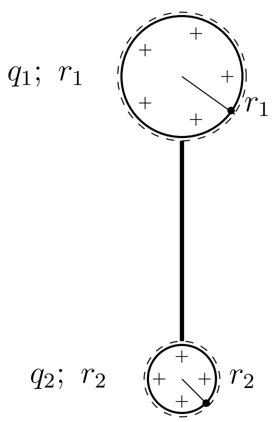
Est-ce que les charges vont se repartir uniformément sur la surface ?

3.5 Surfaces équipotentielles

$\boxed{\textbf{DEMO}}$ Effet d'une pointe
on observe que la charge est plus grande sur la pointe d'un objet métallique que sur le reste de sa surface

Effet de pointe

Prenons deux sphères conductrices connectées, donc au même potentiel (comme si c'était le même seul conducteur)



$$V_1(r_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1} = V_2(r_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2} = V \tag{3.40}$$

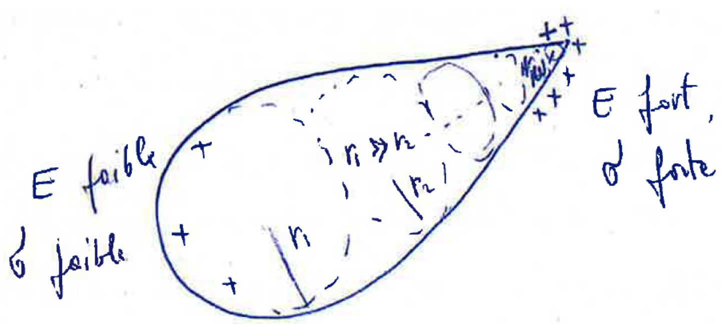
$$E_1(r_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1^2} = \frac{V}{r_1} \overset{r_1 \gg r_2}{\ll} \frac{V}{r_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2^2} = E_2(r_2) \tag{3.41}$$

En effet $\quad \dfrac{E_1(r_1)}{E_2(r_2)} = \dfrac{r_2}{r_1}$: plut petit est le rayon, plus grand est E! (3.42)

Si on considère la densité de charge sur la surface,

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \sigma_1 = \varepsilon_0 E_1 \ll \sigma_2 = \varepsilon_0 E_2 \tag{3.43}$$

Avec un objet non-rond, mais avec une courbure différente à différents endroits :



On peut voir l'objet comme composé de N sphères avec rayons $r_1, r_2, ..., r_N$, et $r_N \ll r_1$. Toutes les sphères sont au même potentiel :

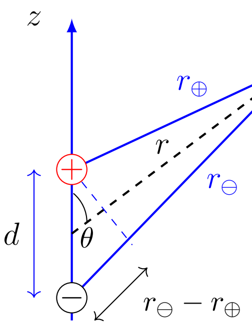
$$V_j = \frac{Q_j}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_j}; \qquad \text{avec} \quad V_j = V_0 \qquad \forall j = 1, 2, ..., N \tag{3.44}$$

$$\text{et} \qquad Q_j = 4\pi\varepsilon_0 r_j V_0; \qquad \text{densité de charge} \quad \sigma_j = \frac{Q_j}{\text{surface}_j} \tag{3.45}$$

$$\sigma = \frac{Q_j}{4_j^2} = \frac{\cancel{4}\cancel{\pi}\varepsilon_0 \cancel{r_j} V_0}{\cancel{4}\cancel{\pi} r_j^{\cancel{2}}} = \frac{\varepsilon_0 V_0}{r_j} \propto \frac{1}{r_j} \qquad \text{plus petit est } r_j, \text{ plus grande est la densité de charge.} \tag{3.46}$$

<u>Ex.</u> de calculs de potentiel et de champ ($\vec{E} = -\vec{\nabla} V$)

(1) Dipôle électrique $\qquad V(P) = ? \qquad E(P) = ?$



↖ on veut calculer le potentiel, puis E à cet endroit

(on se rappelle qu'on avait calculé $E \propto \dfrac{1}{(\text{distance})^3}$ mais seulement sur l'axe du dipôle)

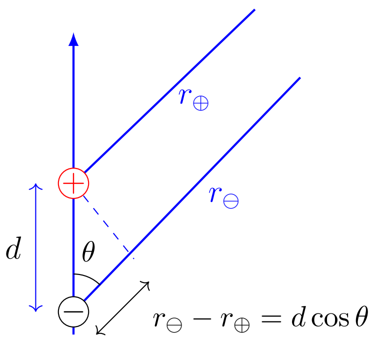
Principe de superposition

$$V = V_\oplus + V_\ominus = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_\oplus} + \frac{-q}{r_\ominus}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_\ominus - r_\oplus}{r_\ominus r_\oplus} \tag{3.47}$$

Note 3.8. *Les dipôles qui nous intéressent, comme ceux qui caractérisent les molécules polaires, telles que H_2O, sont très petits, et on s'intéresse aux valeurs de V et de E à des distances beaucoup plus grandes que la séparation des charges, $r \gg d$.*

Donc on peut considérer que $r_\oplus$ et $r_\ominus$ sont approximativement parallèles :

$$\begin{cases} r_\ominus - r_\oplus \simeq d\cos\theta \\ r_\ominus r_\oplus \simeq r^2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow V \cong \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} \tag{3.48}$$

A partir de V on peut immédiatement calculer E : comme $\vec{E} = \vec{E}(r,\theta)$ on utilise les coordonnées polaires

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \tag{3.49}$$

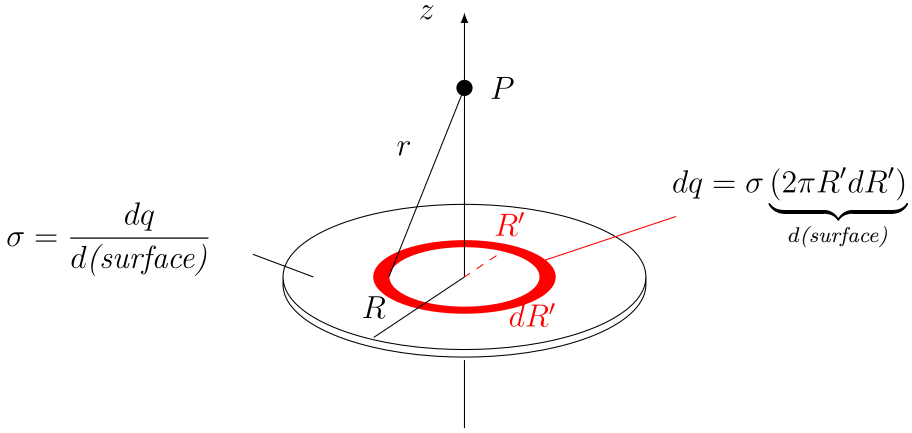
$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}\right\} = +\frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^3} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^3}; \tag{3.50}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}\right) = \frac{1}{r}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^2}\sin\theta = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{3.51}$$

Sur l'axe vertical, $\begin{cases}\sin\theta = 0 \\ \cos\theta = 1\end{cases}$, et $\vec{E} = E(r)\hat{r} = \dfrac{p}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{\hat{r}}{r^3}$.

(Même résultat trouvé en faisant le calcul de E à partir de la formule).

(2) Potentiel dû à une distribution continue de charge : disque chargé uniformément.
$V(P) = ?;\ E(P) = ?$



La contribution de chaque anneau infinitésimal chargé avec dq au potentiel est :

$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} = \frac{\sigma\,\cancel{2}\cancel{\pi}R'dR'}{{}_2\cancel{4}\cancel{\pi}\varepsilon_0}\frac{1}{r}; \qquad r = \sqrt{z^2+R'^2} \tag{3.52}$$

Donc
$$dV = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{R'dR'}{\sqrt{z^2+R'^2}}; \tag{3.53}$$

Potentiel total (principe de superposition pour distribution continue) :

$$V = \int dV = \int_0^R \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{R'dR'}{\sqrt{z^2+R'^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{z^2+R'^2}\right]_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{z^2+R^2}-z) \tag{3.54}$$

Note 3.9. *On a pris le cas* $z \geq 0$

$\rightarrow$ Champ électrique $\vec{E}(z)$ sur l'axe vertical ?
Symétrie : $\vec{E}$ ne peut pas avoir une autre direction que $\hat{z}$

$$\Rightarrow \vec{E} = E_z\hat{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}\hat{z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{z^2+R^2}-z)\right]\hat{z} =$$

$$= -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}\left[\frac{1}{\cancel{2}}(z^2+R^2)^{-1/2}\cancel{2}z - 1\right] = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} - 1\right]\hat{z} =$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]\hat{z}; \tag{3.55}$$

Note 3.10. $\lim_{z\to 0} E_z(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, *comme pour un plan infini !*

Si on reprend la loi de Gauss, ensemble avec la relation entre $\vec{E}$ et V, on arrive à une équation très compacte et générale pour V.

Loi de Gauss (en version 'intégrale') :

$$\Phi_E^S = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{\text{en S}}}{\varepsilon_0} \tag{3.56}$$

Mais il y a un théorème mathématique ("de la divergence") qui dit :

$$\int_{\text{Surface}} \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_{\text{Volume}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dV \qquad \vec{B} \equiv \text{vecteur générique} \tag{3.57}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \equiv div \equiv \text{divergence de ...} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\} \cdot \tag{3.58}$$

$$\Rightarrow \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_{\text{Volume}} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \overbrace{\int_{\text{Volume}} (\rho dV)}^{\text{Q en S}} \tag{3.59}$$

Loi de Gauss en version 'locale' ou différentielle :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{3.60}$$

Mais $\quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (3.61)

Équation de Poisson : $\quad \left[\nabla^2 \equiv \text{laplacien} \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right]$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{3.62}$$

Relie source (densité de charge) et potentiel.

Si $\rho = 0 \Rightarrow \nabla^2 V = 0,$ équation de Laplace. (3.63)