

$$4. \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (10.36)$$

$$\Rightarrow \left\{ -\frac{\partial B_y}{\partial z}, \frac{\partial B_x}{\partial z}, 0 \right\} = \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}, \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t}, 0 \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} = c^2 \frac{\partial B_x}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{B}) \quad (10.37)$$

Il nous reste à combiner les systèmes (A) et (B).

Prenons la dérivée de (A) par rapport au temps

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_x}{\partial t} \right) = -\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_y}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} \end{cases}, \text{ mais, de (B) : } \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial B_y}{\partial z} \quad (10.38)$$

$$\text{Donc } \frac{\partial}{\partial z} \left(-c^2 \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}, \text{ ou} \quad (10.39)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = 0}; \quad \text{avec la même procédure on trouve} \quad (10.40)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0} \quad \text{et idem pour } E_x, B_x. \quad (10.41)$$

Ces équations couplent les variations spatiales et temporelles des champs, en donnant lieu à des ondes qui se propagent à vitesse $c \simeq 3 \times 10^8$ m/s.

10.5 L'équation d'onde et la solution générale

En considérant les équations de Maxwell dans le vide dans leur forme différentielle, et une géométrie simple, et en assumant que les champs varient uniquement sur une direction (z), nous avons vu que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ doivent satisfaire à une équation d'onde.

Mais que signifie satisfaire à une équation d'onde ?

→ cas générique $A = A(z, t)$ [à une dimension], équation d'onde (ou équation de “d'Alembert”)

bert")

$$\boxed{\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0}$$

La solution générale a la forme $A(z, t) = g(z - ct) + h(z + ct)$ avec g, h fonctions arbitraires.

En utilisant la notation générale pour la dérivée, $\frac{dg}{dx} = g'$; $\frac{d^2g}{dx^2} = g''$:

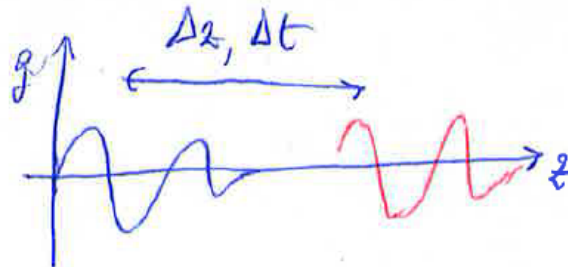
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = g'' + h''$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = g' \frac{\partial}{\partial t}(z - ct) + h' \frac{\partial}{\partial t}(z + ct) = g' \cdot (-c) + h' \cdot (c)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -cg'' \cdot (-c) + ch'' \cdot (+c) = c^2(g'' + h'')$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = g'' + h'' - \frac{1}{c^2} c^2 (g'' + h'') = 0 \quad \square$$

Quelle est la signification de g, h ? Considérons une certaine forme pour g



Après la distance Δz et le temps Δt , nous avons $g(z + \Delta z - ct - c\Delta t)$. Ce terme a la même forme que $g(z - ct)$ toujours, pour autant que $\Delta z - c\Delta t = 0 \Rightarrow \frac{\Delta z}{\Delta t} = c$.

Ceci veut dire qu'une perturbation (de n'importe quelle forme) se propage (à travers l'espace et le long du temps) avec la vitesse $c = \frac{\Delta z}{\Delta t}$, sans donner lieu à un transport de masse.

Note 10.6. Le terme $g(z - ct)$ nous donne une propagation qui avance dans le temps vers les z croissants (vers la droite $+z$). On aurait pu choisir $h(z + ct)$: ceci nous aurait donné une perturbation qui se propage dans la direction opposée ($-z$), donc vers la gauche.

Donc notre onde électromagnétique peut être exprimée comme

$$E_{x,y}(z, t) = g(z - ct) + h(z + ct).$$

Mettons ensemble $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en se rappelant que $\frac{\partial E_x}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial B_y}{\partial z}$. Considérons la propagation

dans la direction $+z$ uniquement

$$\vec{E} = \{f(z - ct); \quad g(z - ct); \quad 0\}$$

$$\vec{B} = \left\{ -\frac{1}{c}g(z - ct); \quad \frac{1}{c}f(z - ct); \quad 0 \right\}$$

g, f sont des fonctions arbitraires, indépendantes entre elles.

Note 10.7. E_x est indépendant de E_y , B_x est indépendant de B_y , mais B_x et E_y et B_y et E_x , sont couplés.

Propriétés

$$(1) \quad \vec{E} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} \perp \vec{B}$$

$$(2) \quad \vec{E} \times \vec{B} \text{ donne la direction de propagation}$$

$$(3) \quad \frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = c$$

$$(4) \quad \text{Les ondes électromagnétiques sont transversales (les composantes non-nulles de } \vec{E} \text{ et } \vec{B} \text{ sont } \perp \text{ à la direction de propagation)}$$

$$(5) \quad \text{Vitesse de propagation } c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

A la place de considérer des fonctions génériques g et f , on peut se rappeler du théorème de Fourier, et du formalisme de la transformée de Fourier, et exprimer la solution en termes d'"ondes planes".

10.6 Transformée de Fourier et ondes planes

Fonctions périodiques : $f(t) = f(t + nT) \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots$

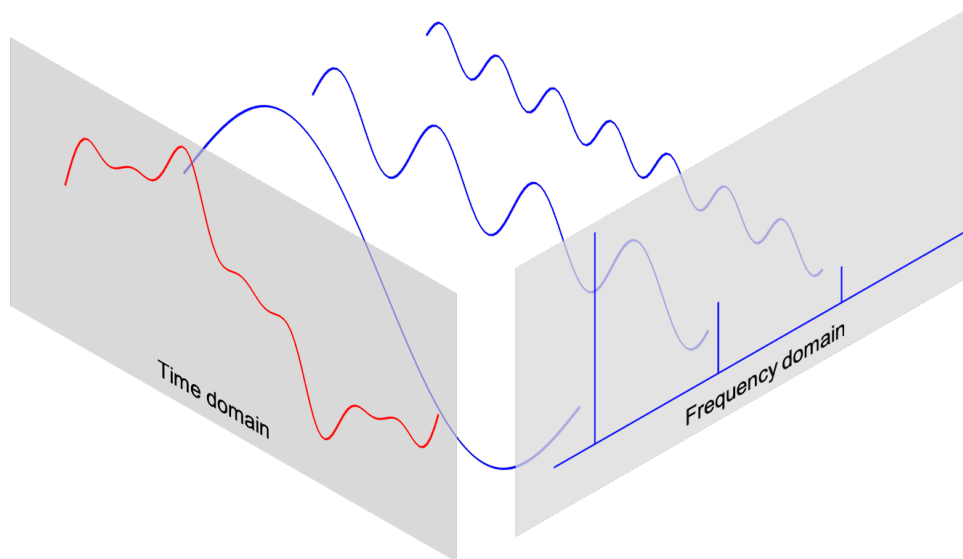
$f(t)$ peut être exprimée comme une combinaison linéaire de fonctions sinusoïdales (sin ou cos) :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)] \quad ; \quad \frac{a_0}{2} = \bar{f} \begin{array}{l} \text{moyenne de } f(t) \text{ sur} \\ \text{une période} \end{array}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \quad ; \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T} n$$

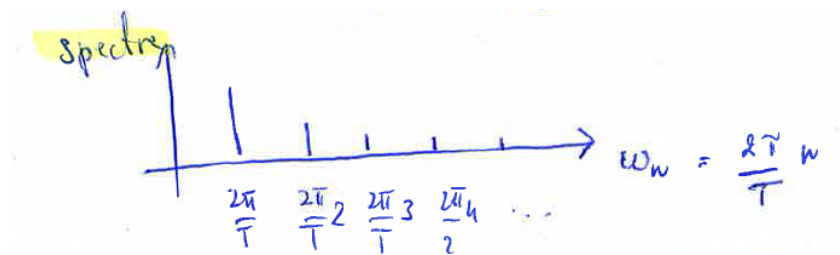
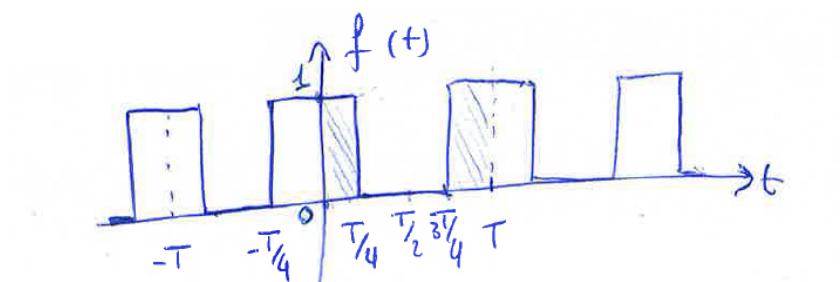
$$\text{et } \begin{cases} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega_n t) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega_n t) dt \end{cases}$$

Ex. visuel

Où les harmoniques sont les termes de la somme pris individuellement :

$$f_n = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t). \quad (10.42)$$

Le 'spectre' est l'ensemble des valeurs des coefficients a_n, b_n

Ex. de calcul

fonction paire $\rightarrow b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \left[1 \times \frac{T}{4} + 1 \times \overbrace{\left(T - \frac{3}{4}T \right)}^{\frac{T}{4}} \right] = 1$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt = \frac{2}{T} \frac{T}{2\pi n} \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \Big|_0^{\frac{T}{4}} + \frac{2}{T} \frac{T}{2\pi n} \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \Big|_{\frac{3}{4}T}^T =$$

$$= \frac{1}{\pi n} \left\{ \sin\left(\frac{2\pi n}{T} \frac{T}{4}\right) + \sin\left(\frac{2\pi n}{T} T\right) - \sin\left(\frac{2\pi n}{T} \frac{3}{4}T\right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi n} \left\{ \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \underbrace{\sin\left(\frac{3}{2}\pi n\right)}_{= -\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)} \right\} = \frac{2}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

Le terme $\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ donne 0 pour n pair, et ± 1 pour n impair :

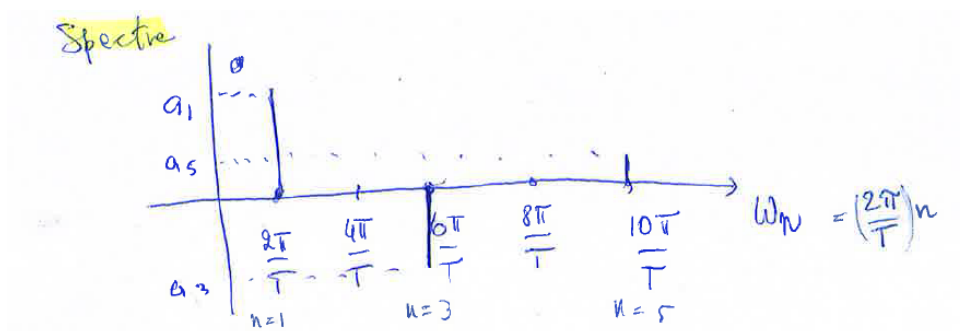
$$n = 1 \rightarrow +1$$

$$n = 3 \rightarrow -1$$

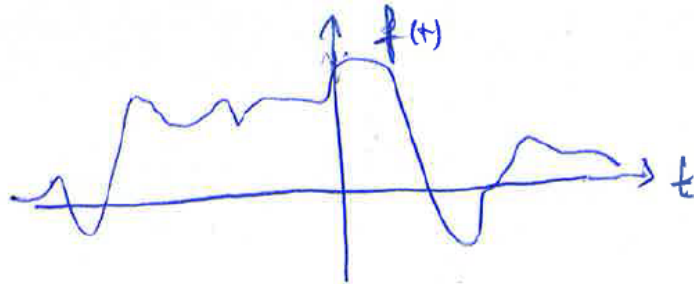
$$n = 5 \rightarrow +1$$

$$n = 7 \rightarrow -1$$

...



Fonctions non-périodiques (continues, et allant à 0 à l' ∞)



Dans ce cas on peut toujours exprimer la fonction comme combinaison (somme continue, donc intégrale) de fonctions sinusoïdales, mais on doit avoir un “continu” de valeurs de ω sur lesquelles intégrer.

On peut écrire

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega) \cos(\omega t) + B(\omega) \sin(\omega t)] d\omega$$

avec

$$\begin{cases} A(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \\ B(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \end{cases}$$

C'est encore plus pratique pour le calcul d'utiliser la notation complexe :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad ; \quad \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

$\tilde{f}(\omega)$ s'appelle la ‘transformée de Fourier de $f(t)$ ’, ou son spectre de Fourier.

Ex. pulse :



En revenant aux ondes e.m. on peut imaginer les champs électrique et magnétique comme décomposés en spectre de Fourier.

Note 10.8. Pour les ondes on doit considérer une transformation et dans l'espace et dans le temps, car les champs varient en $\vec{x}$ et t . La variable “conjuguée” à la variable temporelle t , comme déjà vu, est la fréquence angulaire ω , alors que la variable “conjuguée” à la variable spatiale $\vec{x}$ est le nombre d'onde $\vec{k}$.

La décomposition en générale peut s'écrire comme

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \tilde{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} d\vec{k} d\omega$$

$$\tilde{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \vec{E}(\vec{x}, t) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} d\vec{x} dt \longleftarrow \tilde{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) \text{ "spectre" de } \vec{E}(\vec{x}, t)$$

Note 10.9. Dans la transformée de Fourier on introduit des quantités complexes. Rien de préoccupant ... car on peut considérer que les quantités physiques correspondent aux parties réelles (ou imaginaires) de ces éléments. Considérer ceci correspond à choisir les termes de l'expansion en "cos", ou en "sin", respectivement.

10.7 Ondes planes, fréquence, période, nombre d'onde et longueur d'onde

Pour une composante donnée du champ de l'onde qui se propage le long de z ou on donc des termes en "sin" ou en "cos". Choisissons le "cos" :

$$E = \sum E_n \cos(k_n z - \omega_n t) \quad \text{ou} \quad E = \int \tilde{E} \cos(kz - \omega t) d\omega dk$$

$$\text{ou} \quad E = \text{Re} \left\{ \int \tilde{E} e^{i(kz - \omega t)} dk d\omega \right\}$$

Chaque terme sinusoïdal est une onde plane.

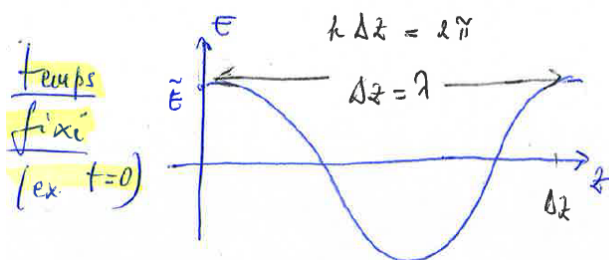
$$E = \tilde{E} \cos(kz - \omega t) = \tilde{E} \cos \left[k \left(z - \frac{\omega}{k} t \right) \right]$$

Cette fonction est effectivement de la forme $g(z - \omega t)$ (solution générale de l'équation d'onde), pour autant que $\boxed{\frac{\omega}{k} = c}$ vitesse de phase.

ω = fréquence angulaire $[\omega] = \text{rad/s}$

k = nombre d'onde $[k] = 1/\text{m}$

$E = \tilde{E} \cos(kz - \omega t)$ est une fonction à double périodicité (en z et en t)



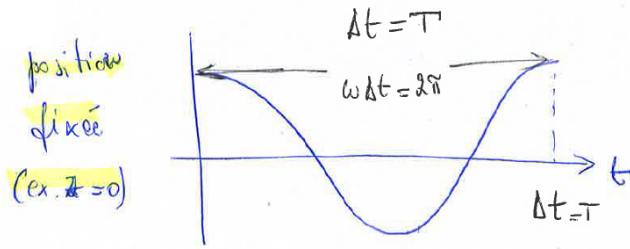
$$\Delta z = \frac{2\pi}{k} = \lambda \quad \text{"longueur d'onde"}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{"nombre d'onde"}$$

Car

$$E(z, t) = \tilde{E} \cos(kz - \omega t) = E(z + \lambda, t) = \tilde{E} \cos(k(z + \lambda) - \omega t)$$

si $k\lambda = 2\pi$.



$$\omega \Delta t = 2\pi$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{“période”}$$

Car

$$E(z, t) = \tilde{E} \cos(kz - \omega t) = \tilde{E}(z, t + T) = \tilde{E} \cos[kz - \omega(t + T)]$$

$$\text{si } \omega T = 2\pi \quad ; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\text{fréquence}}$$

La vitesse de phase $c = \frac{\omega}{k}$ peut aussi être écrite comme

$$\frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{T} \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \times \text{fréquence} = c$$

On peut visualiser à travers des démos le fait que les ondes peuvent être le résultat de la superposition d’ondes monochromatiques, donc de composantes de Fourier.

Exemples ondes radio FM :

$$\lambda = \frac{c}{f} \cong \frac{3 \times 10^8}{100 \times 10^6} \simeq 3 \text{ m}$$

Les antennes radio sont de cet ordre de dimensions. Téléphone portable :

$$f \simeq 3 \times 10^9 \text{ Hz} \quad ; \quad \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{3 \times 10^9} \text{ m} = 10 \text{ cm}$$

Utilisons cette représentation en terme d’ondes planes pour retrouver les relations entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans le vide.

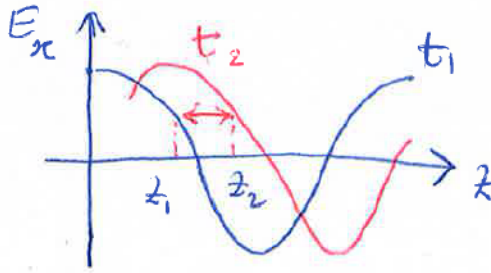
Prenons une onde qui se propage le long de z , comme au début de la discussion, avec

$$\text{uniquement } \begin{cases} E_x \neq 0 \\ B_y \neq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} E_y = 0 \\ B_x = 0 \end{cases}$$

$$\vec{E}(z, t) = \{E_x(z, t), 0, 0\} \quad ; \quad \vec{B}(z, t) = \{0, B_y(z, t), 0\}$$

avec

$$\begin{cases} E_x(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \\ B_y(z, t) = B_0 \cos(\omega t - kz) \end{cases}$$



Pour que la forme ne change pas :

$$\omega t_1 - kz_1 = \omega t_2 - kz_2$$

$$\Rightarrow k(z_2 - z_1) = \omega(t_2 - t_1)$$

et

$$z_2 - z_1 = \frac{\omega}{k}(t_2 - t_1) > 0 \Rightarrow z_2 > z_1, \quad \text{et} \quad \frac{\omega}{k} = \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1}$$

Calculons $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ pour ces ondes planes :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{y} \left(-\frac{\partial E_x}{\partial z} \right) = \hat{y} \left(-\frac{\partial B_y}{\partial t} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} [E_0 \cos(\omega t - kz)] = E_0(-k)[- \sin(\omega t - kz)] = -\frac{\partial}{\partial t} [B_0 \cos(\omega t - kz)]$$

$$\Rightarrow E_0 k \sin(\omega t - kz) \underset{\forall t, \forall z}{=} \omega B_0 \sin(\omega t - kz) \Rightarrow \boxed{B_0 = \frac{k}{\omega} E_0 = \frac{E_0}{c}}$$

Résumé :

- Nous avons vu comment on arrive à des équations d'ondes à partir du système de Maxwell. Nous avons mentionné que l'équation d'onde, par ex. pour une composante du champ électrique, a la forme $\frac{\partial^2 E_{y,x}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_{y,x}}{\partial t^2} = 0$

La solution générale a la forme $E_{y,x}(z, t) = g(z - ct) + h(z + ct)$ où g et h sont des fonctions arbitraires. g et h décrivent la propagation à vitesse c d'une perturbation le long de la direction z .

- Nous avons dit qu'il est utile de considérer que g et h sont (comme toutes les fonctions satisfaisant certaines conditions de régularité) le résultat d'une combinaison linéaire de fonctions sinusoïdales (ou, dans la notation complexe, de fonctions exponentielles). Cette combinaison est sous forme d'intégrale pour les ondes en général non-sinusoïdales.

Les champs sont donc le résultat d'une somme (ou une intégrale) de composantes élémentaires, chacune desquelles est une "onde plane" :

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \text{const.} \times \text{Re} \left\{ \int \underbrace{\vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}}_{\text{ondes planes } (\equiv \text{"couleurs"})} d\vec{k} d\omega \right\} \quad (10.43)$$

(en notation réelle : $\vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$)

Note 10.10. Dans ce formalisme de la transformée de Fourier, on peut appliquer la correspondance $\begin{cases} \vec{\nabla} & \Rightarrow & i\vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial t} & \Rightarrow & -i\omega \end{cases}$ [équations différentielles $\rightarrow$ algébriques]

$$\begin{aligned} \text{car } \vec{\nabla} \left(\begin{smallmatrix} \times \\ \cdot \end{smallmatrix} \right) \vec{E}(\vec{x}, t) &= \text{const.} \times \text{Re} \left\{ \int \vec{\nabla} \left(\begin{smallmatrix} \times \\ \cdot \end{smallmatrix} \right) \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x})} e^{-i\omega t} d\vec{k} d\omega \right\} = \\ &= \text{const.} \times \text{Re} \left\{ \int \underbrace{i\vec{k} \left(\begin{smallmatrix} \times \\ \cdot \end{smallmatrix} \right) \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}}_{i\vec{k} \left(\begin{smallmatrix} \times \\ \cdot \end{smallmatrix} \right) \text{onde plane}} d\vec{k} d\omega \right\} \end{aligned} \quad (10.44)$$

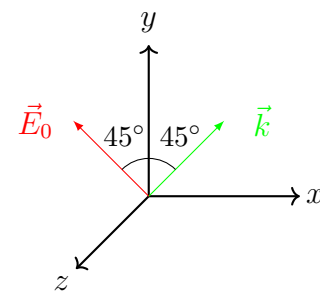
et

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{x}, t) &= \text{const.} \times \text{Re} \left\{ \int \vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \frac{\partial}{\partial t} (e^{-i\omega t}) d\vec{k} d\omega \right\} = \\ &= \text{const.} \times \text{Re} \left\{ \int \underbrace{(-i\omega) \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}}_{-i\omega \times \text{onde plane}} d\vec{k} d\omega \right\} \end{aligned} \quad (10.45)$$

$\Rightarrow$ Vérification de la relation entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega \vec{B}$ et $\vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E} = \left(\text{comme } \frac{\omega}{k} = c \right) = \frac{1}{c} \frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E}$

Exemple d'exercice

on a
$$\begin{cases} \vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{\hat{x}}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{y}}{\sqrt{2}} \right] \\ \vec{E}_0 = -\frac{E_0}{\sqrt{2}}\hat{x} + \frac{E_0}{\sqrt{2}}\hat{y} \end{cases}$$



$\Rightarrow$ Exprimez $\vec{E}(\vec{x}, t)$ comme onde plane, et trouvez $\vec{B}(\vec{x}, t)$

Solution :

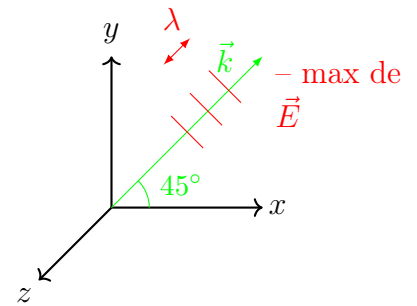
$$\vec{k} \cdot \vec{x} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) = \frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda}(x + y)$$

$$\vec{E}(x, y, t) = E_0 \left(-\frac{\hat{x}}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{y}}{\sqrt{2}} \right) \cos \left[\frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda}(x + y) - \omega t \right]$$

$$\vec{B}(x, y, t) = \frac{1}{c} \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{k} = \frac{E_0}{c} \cos \left[\frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda}(x + y) - \omega t \right] \times \underbrace{\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix}}_{1 \times \hat{z}}$$

$$= \frac{E_0}{c} \hat{z} \cos \left[\frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda}(x + y) - \omega t \right]$$

Cette onde se propage dans le vide à l'infini.



10.8 Densité d'énergie dans les ondes électromagnétiques, vecteur de Poynting, intensité et pression de radiation

$$\text{Densité d'énergie des champs électromagnétique : } u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (10.46)$$

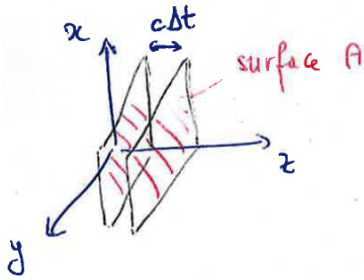
$$\text{Mais dans les ondes électromagnétique : } B = \frac{E}{c} \quad (10.47)$$

$$\text{donc } u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{E^2}{2\mu_0} \underbrace{\frac{1}{c^2}}_{\varepsilon_0 \mu_0} = \varepsilon_0 E^2 : \quad (10.48)$$

la densité d'énergie peut être exprimée uniquement en fonction de E .

Les densités d'énergie de E et B sont les mêmes (dans les ondes électromagnétique dans le vide)

Cette énergie 'voyage' à vitesse c .



Sur l'intervalle de temps Δt , l'onde couvre une distance de $\Delta z = c\Delta t$. Donc, l'onde transporte une énergie ΔU à travers A , donnée par :

$$\Delta U = u \times \text{volume} = u \times A c \Delta t = \varepsilon_0 E^2 A c \Delta t \quad (10.49)$$

La puissance qui passe par unité de surface est donc :

$$\frac{\text{puissance}}{\text{surface}} = \frac{\Delta U}{A \Delta t} = \frac{\varepsilon_0 E^2 A c \Delta t}{A \Delta t} = \varepsilon_0 E^2 c \quad (10.50)$$

Mais

$$Bc = E \Rightarrow \frac{\text{puissance}}{\text{surface}} = \varepsilon_0 E^2 c = \varepsilon_0 E \overbrace{(Bc)}^E = \varepsilon_0 c^2 E B \underset{c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}}{=} \frac{1}{\mu_0} E B \stackrel{\text{déf.}}{=} S \quad (10.51)$$

Cette quantité S donne le flux d'énergie d'une onde électromagnétique. Mais si on veut aussi décrire la direction, on doit définir $\vec{S}$ comme vecteur, dirigé selon la direction de propagation de l'onde.

$$\underline{\text{Déf.}} \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad \text{vecteur de Poynting} \quad (10.52)$$

$$|\vec{S}| = \frac{1}{\mu_0} |\vec{E} \times \vec{B}| = \frac{1}{\mu_0} EB, \quad \text{car } \vec{E} \perp \vec{B} \quad (10.53)$$

$\vec{S}$ mesure le flux instantané d'énergie :

$$[|\vec{S}|] = \left[\frac{1}{\mu_0} \right] [E][B] = \left[\frac{\text{Tm}}{\text{A}} \right]^{-1} \frac{\text{V}}{\text{m}} \text{T} = \frac{\text{A}}{\text{mT}} \frac{\text{V}}{\text{m}} \text{T} = \frac{\text{VA}}{\text{m}^2} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

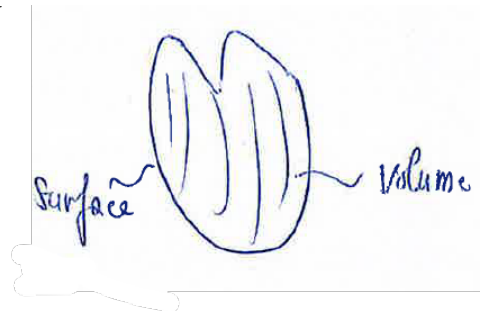
Note 10.11. Avec une densité d'énergie électromagnétique et un flux d'énergie électromagnétique on doit pouvoir établir une loi de conservation pour l'énergie électromagnétique sous forme d'équation de continuité.

Espace vide pas de sources de champs électromagnétique, donc ni charges, ni courant ; donc pas de travail par $\vec{E}$, qui serait $\vec{E} \cdot \vec{j}$ (par unité de volume) : u varie uniquement s'il y a un flux ("in" ou "out" du volume en question).

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{Volume}} u dV = - \int_{\text{Surface}} \vec{S} \cdot d\vec{A} = - \int_{V(S)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{S}) dV \quad (10.54)$$

En forme différentielle :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0 \quad (\text{'théorème de Poynting'}) \quad (10.55)$$



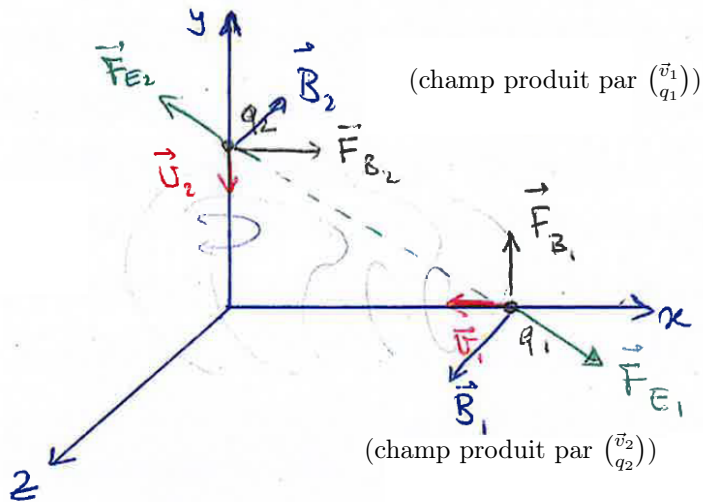
Démonstration mathématique :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right)}_{\vec{S}} &= \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\left[\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \right]}_{\text{identité vectorielle}} = \frac{1}{\mu_0} \left[-\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial |\vec{B}|^2}{\partial t} - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial |\vec{E}|^2}{\partial t} \right] = -\frac{1}{\mu_0} \left[\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \right) \right] = \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \right] = -\frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \quad (10.56)$$

Une onde électromagnétique transporte de l'énergie. Est-ce qu'elle transporte d'autres quantités physiques ?

Transporter de l'information implique transporter de l'énergie.

Note 10.12. Interaction électrique et magnétique entre deux charges ponctuelles en mouvement rectiligne uniforme : il semble y avoir un problème avec la loi d'action et réaction !



$$\vec{F}_{E2} = -\vec{F}_{E1} \quad \text{OK!}$$

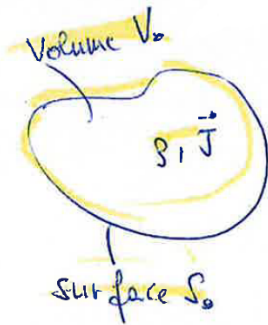
$$\text{Mais : } \vec{F}_{B2} \neq -\vec{F}_{B1} \quad !$$

(même pour $v \ll c$)

Comme résoudre ce problème ? Si la 3^{ème} loi de Newton n'est pas valable, alors la loi de conservation de la quantité de mouvement est aussi remise en question !

$$\left(\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \frac{d}{dt}(\vec{p}_{tot}) = 0 \right)$$

Idée (solution) ! : il y a une quantité de mouvement associée aux champs électromagnétiques. Comment la déterminer ? Ébauche d'une démonstration.



Dans le volume V_0 il y a des particules chargées, qui donnent lieu à une densité de charge et de courant ρ et $\vec{J}$. La quantité de mouvement totale dans le volume, $\vec{p}_{\text{méc.}}$, varie parce qu'il y a la force électromagnétique.

$$\frac{d\vec{p}_{\text{méc.}}}{dt} = \vec{\text{force}} = \int_{V_0} \underbrace{(\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B})}_{\text{densité de force} = \frac{\text{force}}{\text{volume}}} dV \quad (10.57)$$

On peut manipuler l'intégrale (on ne la fait pas ici), et on obtient :

$$\frac{d\vec{p}_{\text{méc.}}}{dt} = \underbrace{-\varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_{V_0} \vec{S} dV}_{\text{variation de la quantité de mouvement associée au champ électromagnétique en } V_0} - \underbrace{\vec{\Phi}_{qdm}}_{\text{flux de quantité de mouvement à travers la surface } S_0} \quad (10.58)$$

- On peut conclure que la densité de quantité de mouvement associée au champ électromagnétique est :

$$\left[\vec{g} = \varepsilon_0 \mu_0 \vec{S} = \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{S} \right] \quad (10.59)$$

$|\vec{S}|$ peut être écrite comme $|\vec{S}| = cu \Rightarrow \boxed{g = \frac{u}{c}}$

- Rappel : vous avez vu en relativité que $\boxed{\text{énergie}^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$, et que pour une particule de masse au repos $m_0 = 0$, par ex. un photon, $\text{énergie}^2 = p^2 c^2$, ou $\text{énergie} = pc$, donc $p = \frac{\text{énergie}}{c}$ (ça correspond à $g = \frac{u}{c}$, sauf que g et u sont ‘par unité de volume’).
- On peut aussi dire que le champ électromagnétique est un gaz de particules de masse au repos nul (les photons).

• Dans la plupart des cas pratiques, les effets de la quantité de mouvement et surtout de l’énergie associées à une onde ne sont pas instantanés, mais se manifestent sur un temps macroscopique (ex. chauffage, transmission des informations, etc.).

On doit donc considérer des moyennes temporelles.

Déf. Intensité $I \equiv |\vec{S}| = \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{S}| dt$ (moyenne temporelle sur une période de l’onde).

Si on considère des ondes planes, à 1-D

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{S}| dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{\mu_0} E_0 \cos(kx - \omega t) B_0 \cos(kx - \omega t) dt = \\ &= \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \underbrace{\left[\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(kx - \omega t) dt \right]}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0 = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2 \end{aligned} \quad (10.60)$$

$[I] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$, comme $[S]$ naturellement, mais I donne lieu à des effets bien plus facilement mesurables.

- La même moyenne temporelle se fait pour u et g :

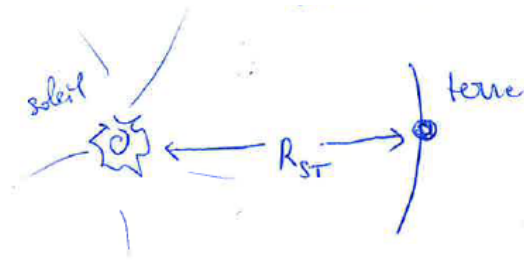
$$\bar{u} = \frac{|\vec{S}|}{c} = \frac{I}{c}$$

$$\bar{u} = \varepsilon_0 E_0^2 \overline{\cos^2(kx - \omega t)} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 = \frac{I}{c}$$

$$\bar{g} = \frac{1}{c^2} \bar{S} = \frac{1}{c^2} I = \frac{1}{2c} \varepsilon_0 E_0^2 \quad \Rightarrow \quad I = \bar{g} c^2, \quad \boxed{\bar{g} = \frac{I}{c^2}}$$

Ex. 1 Émission de lumière par le soleil.

$P_{\text{tot}} \cong 4 \times 10^{26} \text{ W}$; distance soleil-terre : $R_{ST} \simeq 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$. Quelle est la valeur maximale de $|\vec{E}|$ et $|\vec{B}|$ sur notre corps, lorsque nous sommes exposés au soleil ?



Intensité à la distance correspondante à la terre (à l'extérieur de l'atmosphère) :

$$I = \frac{P_{\text{tot}}}{\text{surface sphère de rayon } R_{ST}} = \frac{P_{\text{tot}}}{4\pi R_{ST}^2} = \frac{4 \times 10^{26} \text{ W}}{4\pi \times (1.5 \times 10^{11})^2 \text{ m}^2} \cong 1400 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Note 10.13. Si on considère que notre corps a une surface de $\sim 1 \text{ m}^2$ cela correspond à $\sim 140 \text{ W}$: très grand !

Note 10.14. En considérant la moyenne sur toute la surface de la terre (donc sur toutes les saisons) on devrait corriger par le facteur :

$$\frac{\pi R_{\text{terre}}^2}{4\pi R_{\text{terre}}^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1400}{4} \sim 350 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Note 10.15. L'atmosphère nous protège, car elle absorbe $\sim 20\%$ de la radiation, et diffuse/réfléchit $\sim 30\%$, donc elle réduit de $\sim 50\%$ la puissance. Donc, au max du rayonnement (été) :

$$I_{\text{terre réel}}^{\text{max}} \sim \frac{I}{2} = 700 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Comme $I_{\text{terre réel}}^{\text{max}} = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0} = \frac{E_{0,\text{max}}^2}{2\mu_0 c} \Rightarrow E_{0,\text{max}} = \sqrt{2\mu_0 c I_{\text{terre réel}}^{\text{max}}} =$

$$= \sqrt{2 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 3 \times 10^8 \times 700}$$

$$E_{0,\text{max}} \simeq 726 \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (\text{assez grand!})$$

$$\Rightarrow B_{0,\text{max}} = \frac{E_{0,\text{max}}}{c} = 2.4 \times 10^{-6} \text{ T} \quad (\text{assez petit...})$$

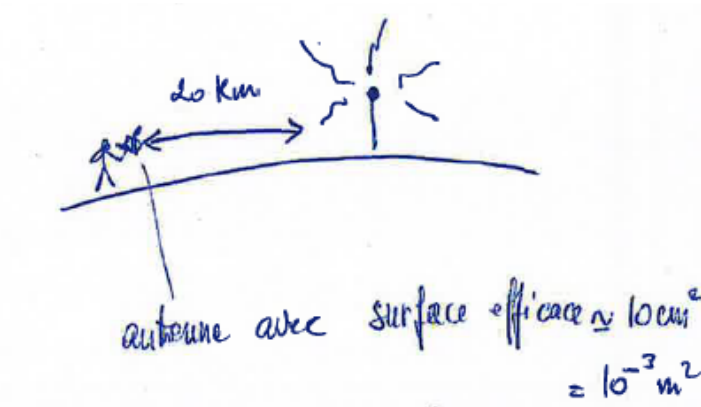
Ex. 2 Station radio $P_{\text{tot}} \simeq 10 \text{ kW}$

puissance reçue dans notre appareil radio ?

$$E_0^{\text{reçue}} = ?$$

$$\Rightarrow I(r) = \frac{P_{\text{tot}}}{4\pi r^2} \Rightarrow P_{\text{reçue}} = I(r = 20 \text{ km}) \times (\text{surface efficace}) =$$

$$\cong \frac{P_{\text{tot}}}{4\pi(2 \times 10^4)^2} \times 10^{-3} \text{ m}^2 \cong P_{\text{tot}} \times 2 \times 10^{-13} = 2 \times 10^{-9} \text{ W} = 2 \text{ nW}$$

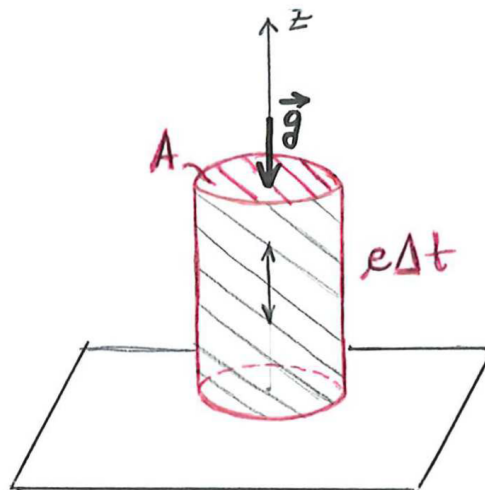
 $(\Rightarrow \text{petite valeur, on doit amplifier pour entendre quelque chose...})$ **Pression de radiation**

Comme nous avons vu, les ondes électromagnétiques transportent, en plus de l'énergie, de la quantité de mouvement. Si une onde 'frappe' une surface, elle lui cède de la quantité de mouvement, comme si c'était des particules de gaz (d'ailleurs on peut penser au gaz de photons...).

Déf.

$\Delta \vec{p}$: quantité de mouvement transportée
à la surface A sur l'intervalle Δt

$$\Delta \vec{p} = c \vec{g} A \Delta t$$



Absorbeur parfait : l'onde ne 'rebondit' pas. La force est donc :

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = c \vec{g} A = -\frac{I}{c} A \hat{z}$$

$\uparrow$
 en moyenne $\vec{g} = \frac{I}{c^2}$

et la pression est : pression = $\frac{F}{A} = \frac{I}{c}$

Miroir parfait : l'onde rebondit (à 100%)

$$\vec{F} = 2 \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = -2 \frac{I}{c} A \hat{z}$$

et la pression : pression = $\frac{F}{A} = 2 \frac{I}{c}$

Note 10.16. On a considéré la force moyenne sur le temps (c'est ça qui compte pour la pression), donc I , et pas $S(I = \bar{S})$.

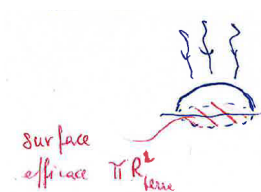
Ex. numérique :



la pression due au rayonnement solaire sur un miroir sur terre est (au max) :

$$p_{\text{miroir}} = 2 \frac{I_{\text{terre}}^{\text{réel}}}{c} = 2 \times \frac{700}{3 \times 10^8} \frac{\text{N}}{\text{m}} \cong 5 \times 10^{-6} \text{ Pa}$$

Force sur la terre entière :



$$p_{\text{miroir}}/2 \times \pi R_{\text{terre}}^2 \cong 5 \times \frac{10^{-6}}{2} \times \pi \times (6 \times 10^6)^2 \cong 30 \times 10^7 \text{ N}$$

car la terre n'est pas un bon réflecteur

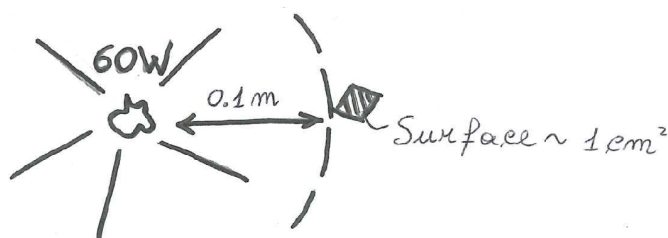
$$= 30000 \text{ tonnes}$$

DEMO Radiomètre de Crooks

On penserait que cette manip. 'visualise' bien la pression de radiation. Mais, est-ce vrai ?

Check quantitatif : l'ampoule a une puissance de 60 W.

Distance $\sim 0.1 \text{ m}$



La force sur la surface absorbante est

$$\begin{aligned}
 F &= \text{pression} \times \text{surface} = \frac{I}{c} \times \text{surface} = \overbrace{\left[\frac{P_{\text{tot}}}{4\pi(0.1 \text{ m})^2} \right]}^I \frac{1}{c} \times 10^{-4} \text{ m}^2 = \\
 &= \frac{60 \times 10^{-4}}{4\pi \times 0.1^2 \times 3 \times 10^8} \text{ N} = 1.6 \times 10^{-10} \text{ N} \quad \text{très petit !}
 \end{aligned}$$

et ça devrait tourner dans le sens inverse !

Note 10.17. *Celle-ci serait la différence de force entre la face absorbante et la face réfléchissante.*

C'est très difficile de construire un appareil qui est sensible à cette force... de plus, on voit que l'effet disparaît si on fait un vide très poussé. Explication ?

⇒ Idée : les faces noires (absorbantes) se chauffent plus rapidement, ce qui crée une différence de température entre le côté noir et le côté 'miroir'. Les molécules qui tapent contre les faces noires (plus chaudes), le font avec plus d'énergie que celles qui tapent contre les faces miroir (plus froides).

Ex. comètes : la forme de la queue des comètes est déterminée par une compétition entre la gravitation, d'un côté, et la pression de radiation du soleil, de l'autre.