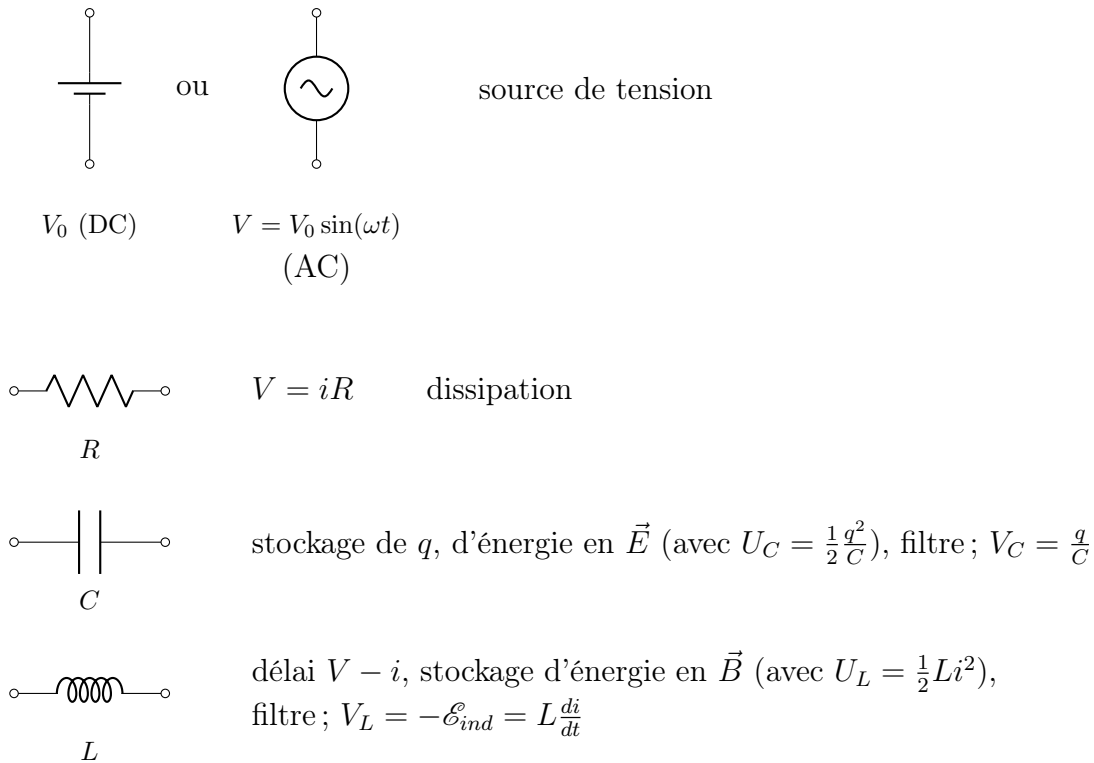


Densité d'énergie

$$\boxed{\frac{dU_L}{d(\text{volume})} = \frac{1}{2\mu_0} B^2} \quad (9.18)$$

Résumé des composants des circuits que nous avons vus jusque là



Note 9.13. C : $V_C = \frac{Q}{C} = \frac{\int i dt}{C}$: la tension à travers C est l'intégrale du courant $\rightarrow$ intégrateur.

L : $V_L = -L \frac{di}{dt}$: la tension à travers L est la dérivée du courant $\rightarrow$ différentiateur

Ces deux propriétés sont très utiles pour les circuits électroniques.

9.4 Circuits AC et impédance complexe

Circuits à courant alternatif (AC)

Représentation complexe

$$V(t) = V_0 e^{i\omega t} = V_0 \cos \omega t + i V_0 \sin \omega t \quad (9.19)$$

On peut considérer la tension “vraie”, ou “**physique**”, comme la partie imaginaire de la tension complexe (on pourrait aussi choisir la partie réelle, selon notre choix de convention pour la phase).

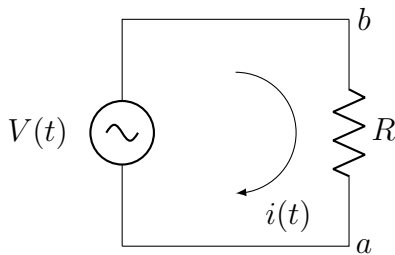
Cette représentation simplifie énormément les calculs, parce que les équations différentielles deviennent de facto des équations algébriques.

Dans ce contexte, on définit l'impédance d'un élément

$$Z = \frac{V(t)}{i(t)} \quad (Z \in \mathbb{C}) \quad (9.20)$$

(c'est une généralisation du concept de résistance).

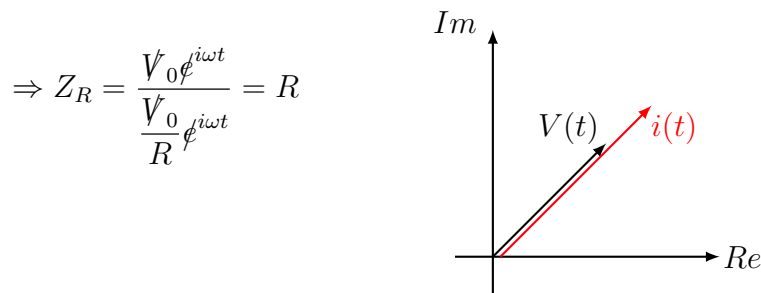
1. Pour une **résistance R** : 
(dissipation)



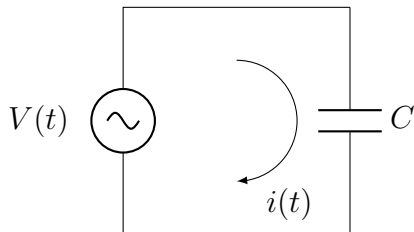
$$V(t) - Ri(t) = 0 \quad (9.21)$$

$$V_0 e^{i\omega t} - Ri(t) = 0 \quad (9.22)$$

$$i(t) = \frac{V_0}{R} e^{i\omega t} \quad (9.23)$$



2. **Condensateur C** : 
(stockage charge et énergie électrique)

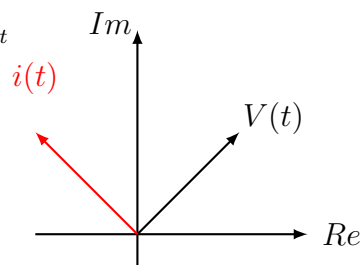


$$V(t) - \frac{Q(t)}{C} = 0 \quad (9.24)$$

$$Q(t) = CV(t) \quad (9.25)$$

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C \frac{dV(t)}{dt} = C \frac{d}{dt}(V_0 e^{i\omega t}) = CV_0 i\omega e^{i\omega t} \quad (9.26)$$

$$\Rightarrow \left[Z_C \equiv \frac{V_0 e^{i\omega t}}{CV_0 i\omega e^{i\omega t}} = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C} \right] \quad (9.27)$$

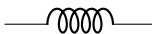


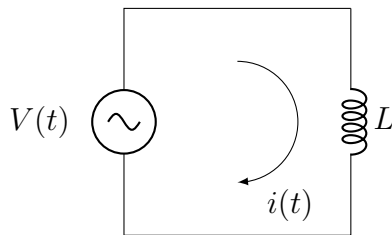
Note 9.14. Attention à ne pas confondre le courant $i(t)$ avec l'unité imaginaire i .

On peut écrire $i(t) = i\omega CV_0 e^{i\omega t} = e^{i\frac{\pi}{2}} \omega CV_0 e^{i\omega t} = \omega CV_0 e^{i\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}$

↑
le courant a une avance de phase de $\frac{\pi}{2}$ (90°)

[Il faut d'abord un courant pour charger la capacité et créer une tension.]

3. **Inducteur L :** 
(stockage énergie magnétique)



$$V(t) - L \frac{di(t)}{dt} = 0 \quad (9.28)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{V}{L} = \frac{V_0}{L} e^{i\omega t} \quad (9.29)$$

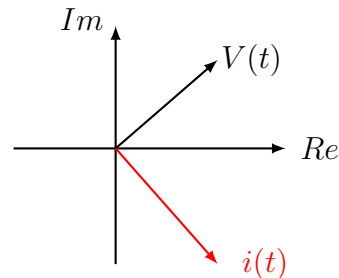
$$\Rightarrow i(t) = \int di = \int \frac{di}{dt} dt = \frac{V_0}{i\omega L} e^{i\omega t} = -\frac{iV_0}{\omega L} e^{i\omega t} = \frac{V_0}{\omega L} e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{i\omega t} = \frac{V_0}{\omega L} e^{i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

↑
le courant a un retard de phase de $\frac{\pi}{2}$ (90°)

(9.30)

[Loi de Lenz : “inertie” par rapport aux variations...]

$$\text{Impédance } Z_L = \frac{V_0 e^{i\omega t}}{\frac{V_0}{i\omega t} e^{i\omega t}} = i\omega L \quad (9.31)$$

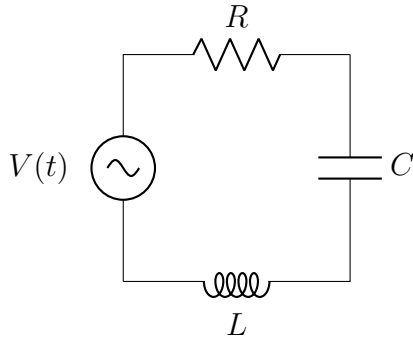


Note 9.15. Un des grands avantages de cette représentation avec nombres complexes et impédances est que les impédances se combinent comme des résistances ($\sum Z_i = Z_{tot}$ en série, et $\left[\sum \frac{1}{Z_i}\right]^{-1} = Z_{tot}$ en $\parallel$).

Circuit RLC en AC

$V(t)$ est imposé : $V(t) = V_0 \sin(\omega t) = \text{Im}(V_0 e^{i\omega t})$, ou, en notation complexe, $V_0 e^{i\omega t}$

Les éléments sont en série, donc :



$$Z_{\text{tot}} = Z_R + Z_C + Z_L =$$

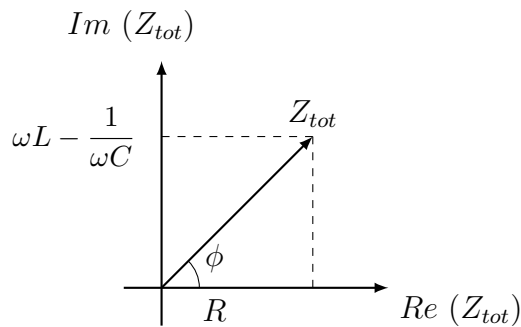
$$= R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L =$$

$$= R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

$$i(t) = \frac{V(t)}{Z_{\text{tot}}} = \frac{V(t)}{R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} \quad (9.47)$$

$$Z_{\text{tot}} = |Z_{\text{tot}}| e^{i\phi} \text{ avec } \begin{cases} |Z_{\text{tot}}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \\ \phi = \arctan \left[\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right] \end{cases} \quad (9.48)$$

Graphiquement



$$\tan(\phi) = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

On peut écrire $i(t)$ comme

$$i(t) = \frac{V_0 e^{i\omega t}}{|Z_{\text{tot}}|} e^{-i\phi} = \frac{V_0 e^{i\omega t} e^{-i \arctan \left[\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right]}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} = i_0(\omega) e^{i\omega t} e^{-i\phi} \quad (9.49)$$

Trois points limites sont particulièrement intéressants :

$$(1) \quad \omega \rightarrow 0 \Rightarrow i(t) \sim \frac{V_0 e^{i\omega t} e^{-i \arctan(-\frac{1}{\omega RC})}}{\sqrt{\frac{1}{(\omega C)^2}}} = V_0 e^{i\omega t} \omega C e^{-i \overbrace{\arctan(-\infty)}^{-\frac{\pi}{2}}} = V_0 e^{i\omega t} \omega C e^{i\frac{\pi}{2}} \quad (9.50)$$

le condensateur domine le comportement du circuit

$$(2) \quad \omega \rightarrow \infty \Rightarrow i(t) \sim \frac{V_0 e^{i\omega t} e^{-i \arctan(+\infty)}}{\omega L} = V_0 e^{i\omega t} \frac{1}{\omega L} e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad (9.51)$$

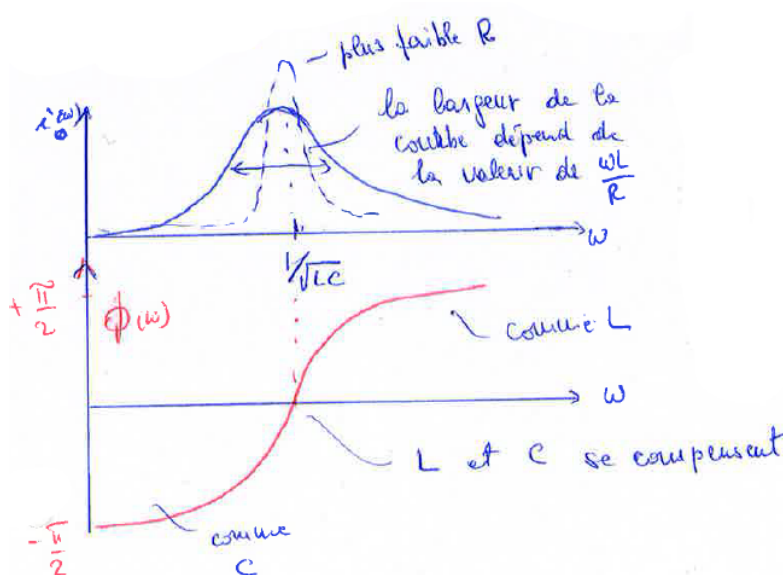
l'inducteur domine le comportement du circuit

$$(3) \quad \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad \text{“résonance”} \quad (9.52)$$

$$i(t) = \frac{V_0 e^{i\omega t} e^{-i \arctan(0)}}{R} = \frac{V_0 e^{i\omega t}}{R} \quad (9.53)$$

la résistance domine le comportement du circuit

Graphiquement



La réponse maximale (max. courant pour tension donnée) est obtenue pour

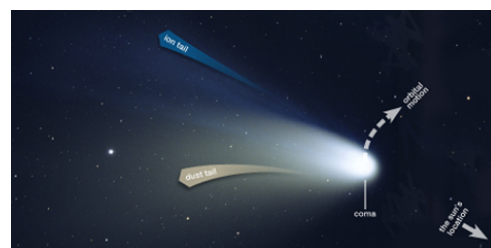
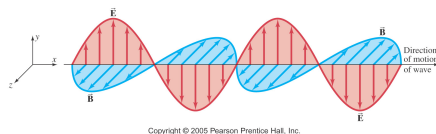
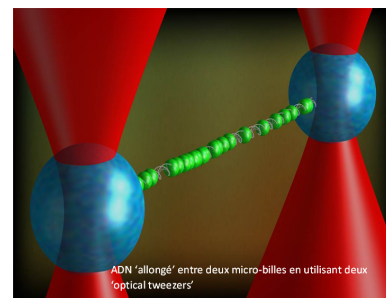
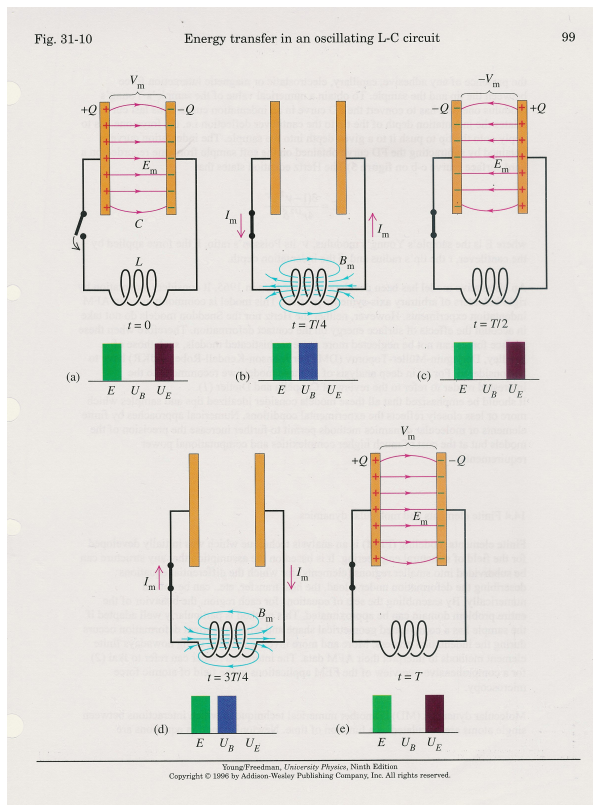
$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

“fréquence de résonance”

Ces circuits RLC, avec leur comportement dynamique (oscillations, changement de caractéristiques entre capacitatives, inductives et résistives selon la fréquence, déphasages etc.) ont beaucoup d'applications pratiques. Mais ils ont aussi un rôle fondamental dans l'avancement de notre connaissance des phénomènes électromagnétiques.

Chapitre 10

Equations de Maxwell et ondes électromagnétiques



10.1 Oscillations électromagnétiques

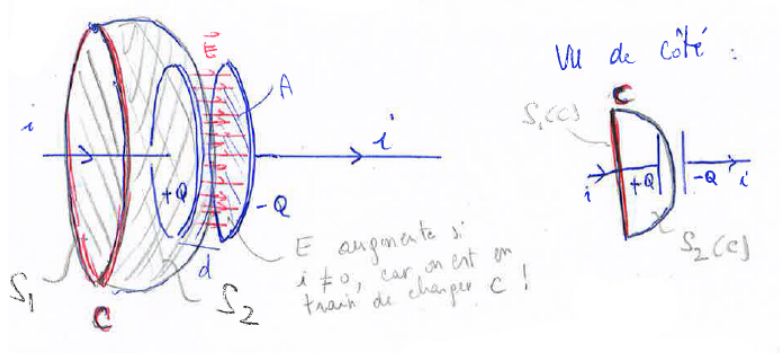
Nous sommes prêts pour mettre ensemble ce que nous avons appris sur l'électromagnétisme et voir comment un modèle complet peut nous amener à la découverte des ondes... donc à la lumière.

Rappel sur ce que nous savons de $\vec{E}$, $\vec{B}$:

$\textcircled{\vec{E}}$	$\textcircled{\vec{B}}$	
$\vec{F} = q\vec{E}$	$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$	← effet produit par le champ
$\oint_{S \text{ fermé}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{en S}}{\epsilon_0}$	$\oint_{S \text{ fermé}} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$	← pas des charges magnétique libres
Relation $\textcircled{\vec{E}} \Leftrightarrow \textcircled{\vec{B}}$		
$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = ?$ <i>C : chemin fermé</i>	$-\frac{d}{dt} \oint_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{A}$	← ‘manque’ le ‘courant’ de charges magnétiques [car il n’y a pas de charges magnétiques libres]
$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{entouré en } C}$ $\updownarrow$ i qui perce la surface $S(C)$ $\updownarrow$ $+$? ← manque le flux de $\vec{E}$ pour avoir une symétrie		

Cette idée de chercher une symétrie entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$ est venue du génie de Maxwell ($\sim 1860-70$). En plus de remarquer un manque de symétrie pour les flux de $\vec{E}$ et $\vec{B}$, Maxwell remarque un paradoxe avec la charge d'un condensateur, apparemment incohérent avec la loi d'Ampère.

Problème de la charge d'un condensateur ($i = \text{const.}$; mais la charge, donc E , augmente)



$$\begin{aligned} \text{Ampère :} \quad & \text{avec } S_1 : \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{entouré en } S_1} = \mu_0 i \Rightarrow B \neq 0_{\text{sur } C} \\ & \text{avec } S_2 : \oint_C \underbrace{\vec{B} \cdot d\vec{l}}_{=B2\pi r} = \mu_0 i_{\text{entouré en } S_2} = 0 \Rightarrow B = 0_{\text{sur } C} \end{aligned}$$

Les deux donnent deux résultats différents ! Comment est-ce possible ? Qu'est-ce qu'il y a de spécial entre les plaques de C ?? $\Rightarrow$ un champ électrique qui change (même si $i = \text{const.}$).

10.2 Courant de déplacement

Idée de Maxwell : il doit y avoir un autre type de courant, et pour respecter les symétries $\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$, ça devrait être lié au flux de $\vec{E}$ (en particulier, à sa variation - dans ce cas, son augmentation). Il ne s'agit pas d'un courant dans le sens qu'il y a un mouvement 'physique' de charges qui se déplacent sur un conducteur, mais c'est un courant dans le sens qu'il y a une variation de q dans le temps, $i_D = \frac{dq}{dt}$. Calculons i_D

$$i_D = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(CV) = C \frac{dV}{dt} \quad (i_D : \text{"courant de déplacement"}) \quad (10.1)$$

mais $\frac{V}{d} = E$, et, pour un condensateur à deux faces parallèles, comme dans le dessin, $C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$

$$\Rightarrow i_D = C \frac{dV}{dt} = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \frac{d}{dt}(E d) = \varepsilon_0 A \frac{dE}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt}(EA) = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (10.2)$$

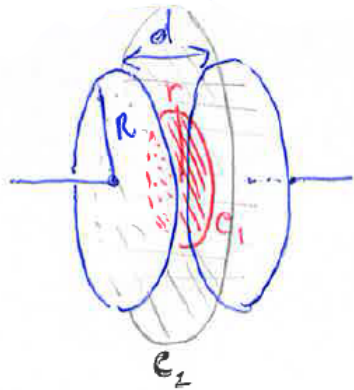
Voilà ce qui manquait ! Donc

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{entouré}} + \mu_0 i_D = \mu_0 i_{\text{entouré}} + \underbrace{\mu_0 \varepsilon_0}_{\text{const.} = \frac{1}{c^2}} \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (10.3)$$

Cette construction a l'air purement mathématique. Comment peut-on se convaincre de l'existence de i_D ?

$\rightarrow$ en mesurant les conséquences de i_D , notamment le champ magnétique créée par i_D , et le comparant avec la valeur calculée.

Calcul de B produit par le courant de déplacement i_D



$$B = ?$$

Ampère (avec i_D)

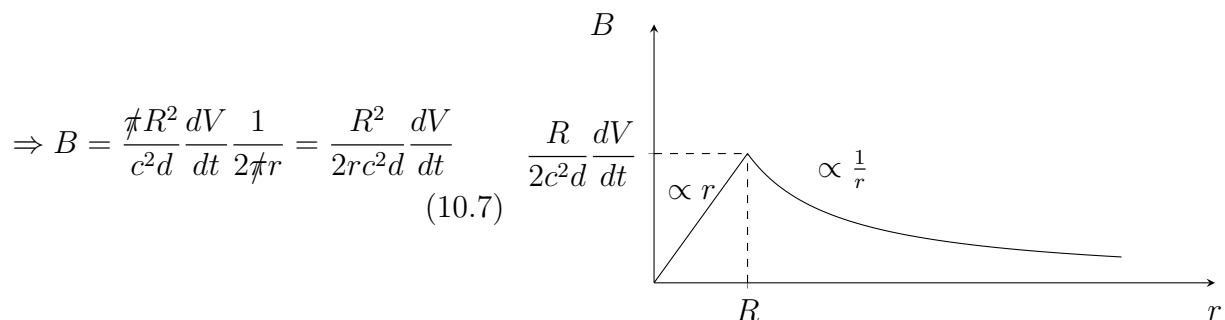
$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \underbrace{j_{\text{entouré}}}_{=0} + \mu_0 i_D = \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$\begin{aligned} \text{(a) } r < R \quad \oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= B 2\pi r = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} (E \pi r^2) = \frac{\pi r^2}{c^2} \frac{dE}{dt} \\ &= \frac{\pi r^2}{c^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{V}{d} \right) = \frac{\pi r^2}{c^2 d} \frac{dV}{dt} \end{aligned} \quad (10.4)$$

$$\Rightarrow \text{on trouve } B = \frac{\pi r^2}{c^2 d} \frac{dV}{dt} \frac{1}{2\pi r} = \frac{r}{2c^2 d} \frac{dV}{dt} \quad (10.5)$$

$$\begin{aligned} \text{(b) } r \geq R \quad \oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= B 2\pi r = \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} (E \pi R^2) = \\ &= \frac{\pi R^2}{c^2 d} \frac{dV}{dt} \end{aligned} \quad (10.6)$$

$\uparrow$
 car en dehors des
 plaques du condensateur
 le champ $E = 0$



Ce champ est réel et peut être mesuré !

Note 10.1. Le concept de courant de déplacement permet en effet d'appliquer les règles de Kirchhoff (en particulier, celle des noeuds) en présence de condensateurs C . Si non, comment pourrait-on avoir un courant "à travers" un condensateur ?

En effet, un "vrai" courant rentre d'un côté (un courant "de conduction" qui amène des charges), et un courant de déplacement sort de l'autre.

10.3 Équations de Maxwell en forme intégrale et différentielle

Voici la vision complète des champs électriques et magnétiques $\vec{E}(\vec{x}, t)$, $\vec{B}(\vec{x}, t)$, décrit par les équations de Maxwell en forme intégrale :

$$\oint_{S_{\text{fermé}}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{en } S}}{\varepsilon_0}; \quad \oint_{S_{\text{fermé}}} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0; \quad (10.8)$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_{S_C} \vec{B} \cdot d\vec{A}; \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{entouré}} + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_{S_C} \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (10.9)$$

Note 10.2. La loi d'Ampère généralisée est valable aussi dans un milieu (matériau) magnétique : μ_0 doit juste être remplacé par μ (perméabilité relative du matériau).

Note 10.3. La loi d'Ampère généralisée est valable aussi dans l'espace vide, où il ne peut y avoir aucun courant de conduction. Ceci a des implications très profondes : $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont liés partout, y compris dans le vide, pour autant qu'ils varient dans le temps !

L'échange d'énergie entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$ peut se faire sans un circuit matériel (ex. LC), et peut donner lieu à la propagation d'ondes, c'est à dire des perturbations qui se propagent à vitesse constante, en général sans changer de forme. Ces perturbations transportent de l'énergie, de la quantité de mouvement, de l'information, mais en général pas de masse. Essayons de trouver la forme différentielle des équations de Maxwell, et à partir de ça les équations des ondes électromagnétiques.

Pour ça, nous avons besoin de deux théorèmes mathématiques :

1. Théorème de Gauss ou de la divergence

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{V(S)} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV \quad (10.10)$$

↑
volume correspondant à la surface fermée S

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \text{ ou } \text{div}(\vec{E}) \quad \text{“divergence de } \vec{E}\text{”} \quad (10.11)$$

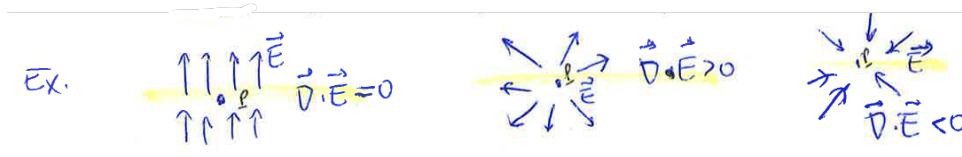
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}; \quad \text{c'est un “flux par unité de volume”} \quad (10.12)$$

Note 10.4. $\vec{\nabla}$ est un opérateur, mais dans la pratique peut être traité comme un vecteur : $\vec{\nabla} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\} \cdot \{E_x, E_y, E_z\} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (10.13)$$

$\vec{\nabla}$ est ‘prêt’ à être appliqué à n'importe quel champ vectoriel.

Note 10.5. $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ mesure effectivement le degré de divergence du vecteur $\vec{E}$ en un point donné (P).



2. Théorème de Stokes

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{S(C)} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} \quad (10.14)$$

↑
surface correspondante au circuit fermé C

$\vec{\nabla} \times \vec{B}$ ou $\text{curl}(\vec{B})$ ‘curl of $\vec{B}$ ’ en anglais, ou ‘rotationnel de $\vec{B}$ ’ en français

(10.15)

$\vec{\nabla} \times$ est une sorte d’intégrale de boucle par unité de surface. (10.16)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{x} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \quad (10.17)$$

- $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ mesure à quel point $\vec{B}$ “s’enroule” au tour du point considéré. Ex.



Rappel $\vec{\nabla} \cdot$ et $\vec{\nabla} \times$ sont des opérateurs différentiels.

- Nous sommes prêts à manipuler les équations de Maxwell en forme intégrale.

1. Loi de Gauss

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} \stackrel{\text{théorème de la divergence}}{=} \int_{V(S)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV = \frac{Q_{\text{en } S}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{V(S)} \rho dV \quad (10.18)$$

avec $\rho = \frac{dq}{dV}$ densité de charge ; en général $\rho = \rho(\vec{x}, t)$

$$\Rightarrow \int_{V(S)} \left\{ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right\} dV = 0 \quad \text{pour tout volume } V(S) \quad (10.19)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \quad (10.20)$$

Cette équation met en relation le champ électrique $\vec{E}$ et sa source, la densité de charge ρ .

2. Lois du flux de $\vec{B}$ (n'a pas de nom particulier...)

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{V(S)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dV = 0 \quad \text{pour tout } V(S) \quad (10.21)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0} \quad (10.22)$$

Cette équation indique la propriété de $\vec{B}$ de ne pas avoir de 'charges' libres

3. Loi de Faraday

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \stackrel{\text{théorème de Stokes}}{=} \int_{S(C)} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = \quad (10.23)$$

$$= -\frac{d}{dt} \int_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = - \int_{S(C)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \quad (10.24)$$

note : $\frac{d}{dt} \Phi_B$ devient $\frac{\partial}{\partial t}$ pour $\vec{B}$, car $\vec{B} = B(\vec{x}, t)$

$$\Rightarrow \int_{S(C)} \left\{ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \text{pour tout } S(C) \quad (10.25)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad \text{cette équation lie } \vec{E} \text{ et } \vec{B} \text{ directement} \quad (10.26)$$

4. Loi d'Ampère

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} \stackrel{\text{th. de Stokes}}{=} \oint_{S(C)} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} = \mu_0 i + \overbrace{\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_{S(C)} \vec{E} \cdot d\vec{A}}^{\mu_0 i_D} \quad (10.27)$$

$$\parallel \parallel$$

$$\mu_0 i = \mu_0 \int_{S(C)} \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad \frac{1}{c^2} \int_{S(C)} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

$$\text{Donc } \int_{S(C)} \left\{ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \vec{J} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \text{pour tout } S(C) \quad (10.28)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \quad (10.29)$$

Cette équation relie $\vec{B}$ à sa source, $\vec{J}$, et au champ $\vec{E}$ (dont la variation dans le temps aussi produit un champ $\vec{B}$).

Résumé

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; & \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

- $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont couplés.
- Les sources des champs sont ρ et $\vec{J}$.

10.4 Ondes électromagnétiques à partir des équations de Maxwell

Considérons le système de Maxwell dans le vide : $\begin{cases} \rho = 0 \\ \vec{J} = 0 \end{cases}$ (pas de source $\Leftrightarrow$ pas de charges)

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0; & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; & \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Combien d'équations ? 2 scalaires + 2 vectorielles $\Rightarrow 2 + 2 \times 3 = 8$

Combien d'inconnus ? $E_x, E_y, E_z; B_x, B_y, B_z \Rightarrow 6$

$\Rightarrow$ système "sur-déterminé" !

Mais les 8 équations ne sont en effet pas toutes indépendantes :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = 0 \quad \text{toujours, et} \quad \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E})}_{=0} = -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}_{=0} = 0$$

La même chose pour $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = 0$

Pour résoudre le système, choisissons une géométrie simple. Supposons que les champs varient uniquement le long de z :

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{E} = \vec{E}(z, t) \\ \vec{B} = \vec{B}(z, t) \end{cases}$$

$$1. \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_z = \text{const.} \quad (10.30)$$

Mais je ne peux pas avoir $E_z = \text{const.} \neq 0$ partout, car cela correspondrait à une énergie infinie : $U_E = \int \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$

Donc $E_z = \text{const.} = 0 \Rightarrow$ ondes transversales !

$$2. \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{même raisonnement que pour } E_z \quad (10.31)$$

$$B_z = \text{const.} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{ondes transversales !} \quad (10.32)$$

$$3. \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (10.33)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = \hat{x} \left(-\frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (10.34)$$

$$\text{On peut écrire} \quad \left\{ -\frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z}, 0 \right\} = \left\{ -\frac{\partial B_x}{\partial t}, -\frac{\partial B_y}{\partial t}, 0 \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial t} \end{cases} \quad (\text{A}) \quad (10.35)$$

$$4. \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (10.36)$$

$$\Rightarrow \left\{ -\frac{\partial B_y}{\partial z}, \frac{\partial B_x}{\partial z}, 0 \right\} = \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}, \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t}, 0 \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} = c^2 \frac{\partial B_x}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{B}) \quad (10.37)$$

Il nous reste à combiner les systèmes (A) et (B).

Prenons la dérivée de (A) par rapport au temps

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_x}{\partial t} \right) = -\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_y}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} \end{cases}, \text{ mais, de (B) : } \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial B_y}{\partial z} \quad (10.38)$$

$$\text{Donc } \frac{\partial}{\partial z} \left(-c^2 \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}, \text{ ou} \quad (10.39)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = 0}; \quad \text{avec la même procédure on trouve} \quad (10.40)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0} \quad \text{et idem pour } E_x, B_x. \quad (10.41)$$

Ces équations couplent les variations spatiales et temporelles des champs, en donnant lieu à des ondes qui se propagent à vitesse $c \simeq 3 \times 10^8$ m/s.

10.5 L'équation d'onde et la solution générale

En considérant les équations de Maxwell dans le vide dans leur forme différentielle, et une géométrie simple, et en assumant que les champs varient uniquement sur une direction (z), nous avons vu que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ doivent satisfaire à une équation d'onde.

Mais que signifie satisfaire à une équation d'onde ?

→ cas générique $A = A(z, t)$ [à une dimension], équation d'onde (ou équation de “d'Alembert”)

bert")

$$\boxed{\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0}$$

La solution générale a la forme $A(z, t) = g(z - ct) + h(z + ct)$ avec g, h fonctions arbitraires.

En utilisant la notation générale pour la dérivée, $\frac{dg}{dx} = g'$; $\frac{d^2g}{dx^2} = g''$:

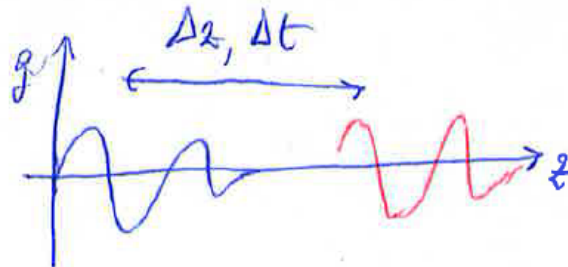
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = g'' + h''$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = g' \frac{\partial}{\partial t}(z - ct) + h' \frac{\partial}{\partial t}(z + ct) = g' \cdot (-c) + h' \cdot (c)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -cg'' \cdot (-c) + ch'' \cdot (+c) = c^2(g'' + h'')$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = g'' + h'' - \frac{1}{c^2} c^2 (g'' + h'') = 0 \quad \square$$

Quelle est la signification de g, h ? Considérons une certaine forme pour g



Après la distance Δz et le temps Δt , nous avons $g(z + \Delta z - ct - c\Delta t)$. Ce terme a la même forme que $g(z - ct)$ toujours, pour autant que $\Delta z - c\Delta t = 0 \Rightarrow \frac{\Delta z}{\Delta t} = c$.

Ceci veut dire qu'une perturbation (de n'importe quelle forme) se propage (à travers l'espace et le long du temps) avec la vitesse $c = \frac{\Delta z}{\Delta t}$, sans donner lieu à un transport de masse.

Note 10.6. Le terme $g(z - ct)$ nous donne une propagation qui avance dans le temps vers les z croissants (vers la droite $+z$). On aurait pu choisir $h(z + ct)$: ceci nous aurait donné une perturbation qui se propage dans la direction opposée ($-z$), donc vers la gauche.

Donc notre onde électromagnétique peut être exprimée comme

$$E_{x,y}(z, t) = g(z - ct) + h(z + ct).$$

Mettons ensemble $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en se rappelant que $\frac{\partial E_x}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial B_y}{\partial z}$. Considérons la propagation

dans la direction $+z$ uniquement

$$\vec{E} = \{f(z - ct); \quad g(z - ct); \quad 0\}$$

$$\vec{B} = \left\{ -\frac{1}{c}g(z - ct); \quad \frac{1}{c}f(z - ct); \quad 0 \right\}$$

g, f sont des fonctions arbitraires, indépendantes entre elles.

Note 10.7. E_x est indépendant de E_y , B_x est indépendant de B_y , mais B_x et E_y et B_y et E_x , sont couplés.

Propriétés

$$(1) \quad \vec{E} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} \perp \vec{B}$$

$$(2) \quad \vec{E} \times \vec{B} \text{ donne la direction de propagation}$$

$$(3) \quad \frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = c$$

$$(4) \quad \text{Les ondes électromagnétiques sont transversales (les composantes non-nulles de } \vec{E} \text{ et } \vec{B} \text{ sont } \perp \text{ à la direction de propagation)}$$

$$(5) \quad \text{Vitesse de propagation } c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

A la place de considérer des fonctions génériques g et f , on peut se rappeler du théorème de Fourier, et du formalisme de la transformée de Fourier, et exprimer la solution en termes d'"ondes planes".

10.6 Transformée de Fourier et ondes planes

Fonctions périodiques : $f(t) = f(t + nT)$; $n = 1, 2, 3, \dots$

$f(t)$ peut être exprimée comme une combinaison linéaire de fonctions sinusoïdales (sin ou cos) :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)] \quad ; \quad \frac{a_0}{2} = \bar{f} \text{ moyenne de } f(t) \text{ sur une période}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \quad ; \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T} n$$

$$\text{et } \begin{cases} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega_n t) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega_n t) dt \end{cases}$$