

Test de mi-semestre

Exercice 1 (25 points)

Un plan infini est chargé uniformément avec une densité de charge $\sigma = 10^{-5}$ C/m². Le plan contient un trou qui a la forme d'un anneau circulaire de rayon interne $R_i = 1$ cm et de rayon externe $R_e = 2$ cm.

- a) Calculez le champ électrique en tout point de l'axe perpendiculaire au plan (parallèle à $\hat{z}$) et passant par le centre de l'anneau, pour $z > 0$. On définit $z = 0$ comme le centre de l'anneau. Montrez que le champ suit l'expression :

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{R_e^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R_i^2 + z^2}} \right)$$

- b) Que vaut ce champ en $z = 0$, et en $z \rightarrow \infty$? Comparez au cas sans trou.

Deux charges (de taille négligeable) sont placées sur l'axe z : d'abord la charge $q_1 = 2 \cdot 10^{-7}$ C est placée et tenue fixe en $z_1 = 10$ cm, et ensuite la charge $q_2 = 1 \cdot 10^{-7}$ C est placée en $z_2 = 5$ cm et peut bouger librement.

- c) Calculez la force totale qui agit sur q_2 . Dans quel sens q_2 se déplacera-t-elle ? Est-ce que le sens aurait été différent si la valeur de q_2 était 10 fois plus élevée ?
- d) On considère le système formé par le plan (avec le trou) et la charge q_1 toujours fixe en z_1 (la charge q_2 est enlevée du problème). Calculez l'expression de la variation du potentiel électrique entre les positions z_i et z_f , avec $z_1 < z_i < z_f$.

Indications : $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m

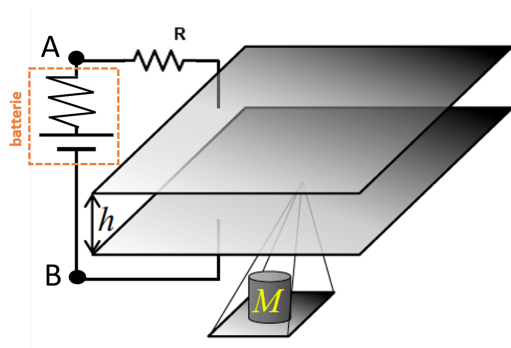
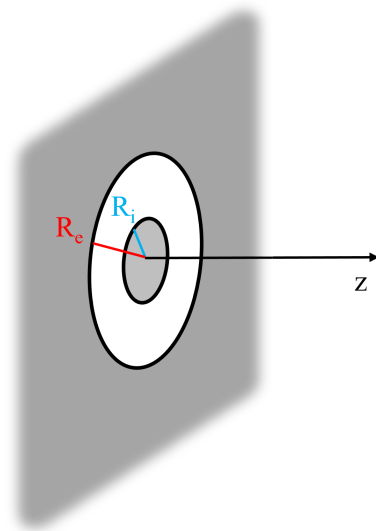
- On définit l'élément de surface d'un anneau circulaire comme : $dS = r dr d\phi$ (ϕ l'angle du tour du cercle).
- On donne les primitives suivantes :

$$\int \frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx = -\frac{1}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \quad \text{et} \quad \int \frac{x}{(x^2 + a^2)^{1/2}} dx = (x^2 + a^2)^{1/2}$$

Exercice 2 (25 points)

Un condensateur à faces carrées planes et parallèles de surface $A = 40$ cm² et de masse négligeable a un petit poids de $M = 5$ g attaché sur sa face inférieure (voir figure). La face supérieure est attachée rigidement à un soutien mécanique. On connecte une résistance $R = 20$ Ω et une batterie de résistance interne $r = 1$ Ω en série avec le condensateur.

- a) Calculez la capacité du condensateur si à équilibre la distance entre les plaques est de $h_a = 4$ mm, avec de l'air entre les plaques.
- b) Calculez la force électromotrice $\mathcal{E}$ de la batterie pour que l'équilibre avec une distance entre les plaques de $h_a = 4$ mm soit maintenu, ainsi que la charge du condensateur dans ces conditions.



c) Si on remplit l'espace entre les deux faces avec un fluide de constante diélectrique $K_f = 4$, quelle sera la nouvelle valeur de h_f (avec la force électromotrice trouvée en (a), maintenue constante) ? Calculez aussi la nouvelle capacité et la charge sur les deux faces.

On continue dans la configuration de la question (c) avec le fluide diélectrique. Maintenant la plaque inférieure aussi est fixe (h_f ne peut plus changer). Au moment t_0 la batterie (avec aussi sa résistance interne) est remplacée par une résistance $R_A = 10 \text{ k}\Omega$.

d) Combien de temps passe à partir de t_0 avant qu'un courant de $i_{min} = 20 \text{ mA}$ ne circule dans le circuit ? Quelle puissance a été dissipée dans le circuit jusqu'à ce moment-là ?

Indications :

- $g = 9.81 \text{ m/s}^2$;
- $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$.
- $\sqrt{A} \gg h_{a,f}$

Exercice 3 (25 points)

Une batterie donnant une force électromotrice de $\mathcal{E} = 1 \text{ V}$ est connectée aux extrémités d'une résistance de $R = 10 \text{ }\Omega$. La résistance est constituée de deux cylindres de matériaux différents, avec une résistivité de ρ_1 et $\rho_2 = 2\rho_1$, respectivement. La section des cylindres est de $A = 3 \text{ mm}^2$ et la longueur de chaque cylindre est de $L = 1 \text{ cm}$.

Calculez (pour des conditions stationnaires) :

- a) La valeur de ρ_1 (en Ωm).
- b) La puissance dissipée dans chaque cylindre.
- c) La densité de charge superficielle accumulée à l'interface entre les deux cylindres (indication : utilisez la loi de Gauss).

Une résistance est composée par un cylindre creux de longueur D , de rayon interne $r_i = 2 \text{ mm}$ et rayon externe $r_e = 4 \text{ mm}$. Sa résistivité varie linéairement le long de sa longueur entre $x = 0$ et $x = D$ comme :

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{x}{D} \right), \quad (1)$$

avec $\rho_0 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ }\Omega\text{m}$. Cette résistance est ajoutée au circuit pour la question suivante, en parallèle avec celle composée par les deux cylindres.

- d) Quelle doit être la longueur D de cette résistance pour que la résistance équivalente du circuit soit $R_{eq} = 8 \text{ }\Omega$?

Indications : $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$.

