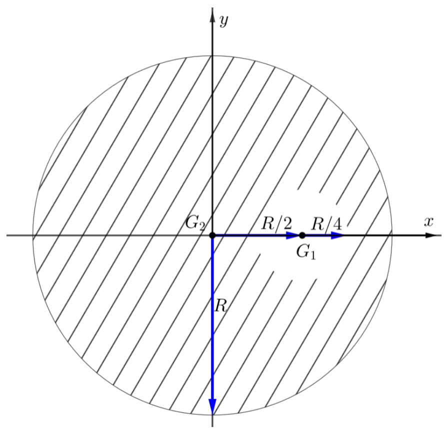
Exercices

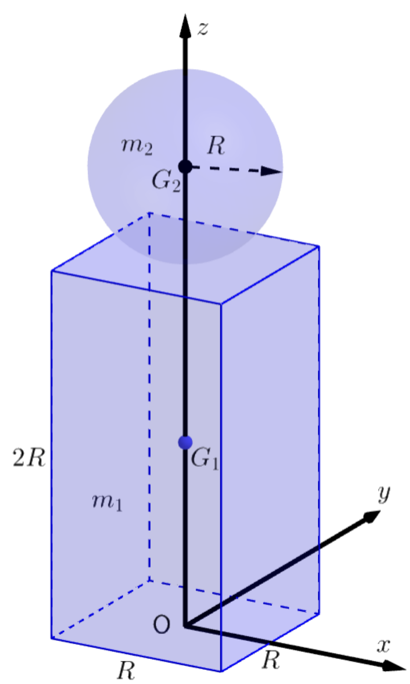
Exercice 1

Soit un solide formé par un disque homogène d'épaisseur négligeable avec un trou.
Calculer la position du centre de masse.



Exercice 2

Soit un solide composé de 2 parties de même masse volumique ρ : une sphère de rayon R collée à un parallelipipède de hauteur $2R$ et de côté R.
Calculer la position du centre de masse G dans le repère donné.

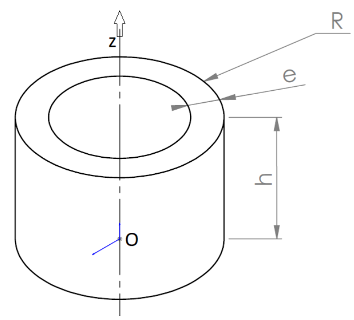


Exercice 3

Calculer le moment d'inertie de la Terre, son énergie cinétique de rotation lié à la rotation sur elle même en 24h et son énergie cinétique de translation liée à la vitesse sur son orbite autour du soleil.

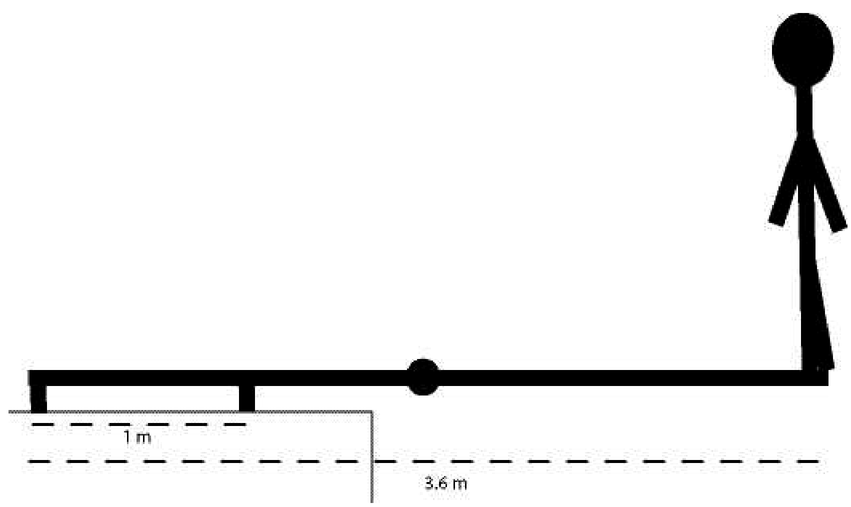
Exercice 4

Calculez le moment d'inertie d'un cylindre creux d'épaisseur e et de masse M par rapport à son axe de révolution. On rappelle le moment d'inertie d'un cylindre plein de masse M_1 : $I_{Oz} = \frac{1}{2}M_1R^2$.



Exercice 5

Une femme de 50 kg est debout sur un plongeoir de 30 kg, d'une longueur de 3.6m. Les supports du plongeoir sont à une distance de 1.0m l'un de l'autre.Le plongeoir est fixé au premier support à gauche. Trouver la forcée exercée par chacun des supports sur le plongeoir.



Solutions

Solution 1

$\overrightarrow{OG} = \frac{m_2\overrightarrow{OG_2}-m_1\overrightarrow{OG_1}}{m}$ Plaque : densité surfacique.

Surface : $S = \pi R^2 - \pi \left(\frac{R}{4}\right)^2$

$$S = \pi[\frac{15}{16}R^2]$$

$m = S\rho_S \Rightarrow \; m_2 = \rho_S \pi R^2$

$$\Rightarrow \; m_1 = \rho_S \pi \left(\frac{R}{4}\right)^2 = \rho_S \pi \frac{R^2}{16}$$

$\overrightarrow{OG} = \frac{m_2\cancel{\overrightarrow{OO}}-\cancel{\rho_S\pi}\left(\frac{R}{4}\right)^2\cdot\frac{R}{2}\vec{e}_x}{\cancel{\pi\rho_S}\frac{15}{16}R^2}$

$\overrightarrow{OG} = -\frac{R^{\cancel{3}}}{2\times\cancel{16}} \times \frac{\cancel{16}}{15}\frac{1}{R^2}\vec{e}_x = -\frac{1}{30}R\vec{e}_x$

Solution 2

$\overrightarrow{OG_1} = R\vec{e}_z \quad \overrightarrow{OG_2} = 3R\vec{e}_z$

$m_1 = 2\rho R^3 \quad m_2 = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$

$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OG_1}+m_2\overrightarrow{OG_2}}{m_1+m_2} = \frac{2\cancel{\rho}R^3\cdot R\vec{e}_z+\frac{4}{3}\pi\cancel{\rho}R^3\cdot 3R\vec{e}_z}{2\cancel{\rho}R^3+\cancel{\rho}\frac{4}{3}\pi R^3}$

$\overrightarrow{OG} = R\cdot\frac{2+4\pi}{2+\frac{4}{3}\pi}\vec{e}_z$

Solution 3

Inertie de la Terre : $I_G = 98\cdot 10^{36}$ kg m^2

Energie de rotation sur elle-même : $E_{c,rot} = 257\cdot 10^{27}$J

Energie de rotation autour du soleil : $E_{c,rot} = 27\cdot 10^{32}$J

Solution 4

Densité du matériau : $\rho \Rightarrow \rho = \frac{M}{V}$

$$V = \underbrace{h\pi R^2}_{V_1} - \underbrace{h\pi(R-e)^2}_{V_2}$$

V_1 volume du cylindre exterieur, V_2 volume du "trou"
$I_{Oz} = I^1_{Oz} - I^2_{Oz}$ moment d'inertie du cylindre plein - moment d'inertie du "trou".

$$I^1_{Oz} = \frac{1}{2}M_1R^2 \text{ et } I^2_{Oz} = \frac{1}{2}M_2(R-e)^2$$

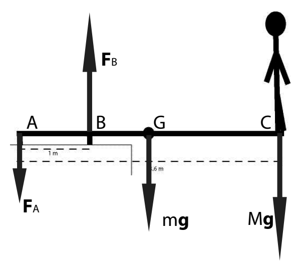
$$I_{Oz} = \frac{1}{2}M_1R^2 - \frac{1}{2}M_2(R-e)^2 = \frac{1}{2}\rho h\pi R^2 R^2 - \frac{1}{2}\rho h\pi(R-e)^2(R-e)^2$$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{h\pi R^2 - h\pi(R-e)^2}$$

$$I_{Oz} = \frac{1}{2}M\cancel{\pi h}\frac{R^4-(R-e)^4}{\cancel{h\pi}(R^2-(R-e)^2)} = \frac{1}{2}M\frac{\cancel{(R^2-(R-e)^2)}(R^2+(R-e)^2)}{\cancel{(R^2-(R-e)^2)}}$$

$$I_{Oz} = \frac{1}{2}M[R^2+(R-e)^2]$$

Solution 5



$\vec{R} = \vec{0}$: $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_m + \vec{F}_M = \vec{0}$. En tenant compte des sens des forces, on peut écrire pour les amplitudes : $-F_A + F_B - F_m - F_M = 0 \Rightarrow F_B = mg + Mg + F_A$.
$\vec{M}_G = \vec{0}$: $AG \cdot F_A - BG \cdot F_B - GC \cdot F_M = 0 \Rightarrow F_B = \frac{AG \cdot F_A - GC \cdot Mg}{BG}$.
En combinant ces deux équations, il vient :
$F_A = \frac{BG(M+m)g + GC \cdot Mg}{AG - BG}$ et $F_B = \frac{AG(M+m)g + GC \cdot Mg}{AG - BG}$
A.N. : $AG = 1.8$ m, $BG = 0.8$ m, $GC = 1.8$ m, $m = 30$ kg et $M = 50$ kg, donc : $F_A = 1510.74$ N et $F_B = 2295.54$ N.
NB : On aurait bien sûr pu prendre la somme des moments par rapport à un autre point que G (par exemple A ou B)