Mécanique générale, classe inversée.

Semaine 24-27/09 2024

Changement d'organisation pour l'exo à rendre

Actuellement

exos

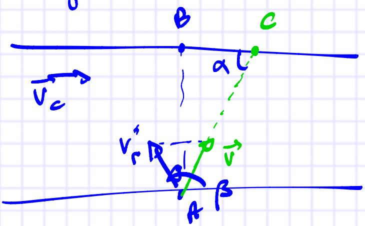
Semaine n → Mercredi .... Mercredi $(n+1)$

n .... mise à disposition Vendredi 19h .... Vendredi 19h $(n+1)$

⇒ Mise à disposition vendredi semaine n à rendre vendredi semaine $(n+1)$ sujet semaine (n).

testé 1 semaine ; mis au vote.

Retour Logan



$$\alpha(V_c, V_r, \beta)$$

$$|\vec{V}|(V_c, V_{rame}, \beta)$$

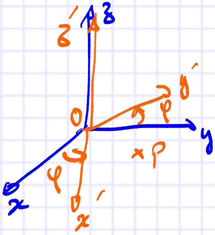
ω = cte

Exercice 1 : on jongle avec les référentiels

On considère un référentiel $\mathcal{R}'(O, x', y', z')$ en rotation uniforme dans $\mathcal{R}(O, x, y, z)$. Les origines des référentiels sont confondues et la rotation se fait selon l'axe (Oz) confondu avec (Oz') à la vitesse angulaire ω. Un point P se déplace dans $\mathcal{R}'$

1– P a comme coordonnées $(x', y', 0)$ dans $\mathcal{R}'$ Exprimer ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ en fonction de x', y' et ω.

2– Donner le lien entre $\vec{v}_{\mathcal{R}}(P)$ et $\vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$ ainsi que entre $\vec{a}_{\mathcal{R}}(P)$ et $\vec{a}_{\mathcal{R}'}(P)$ en appliquant les simplifications possibles.



de centre O

P se déplace maintenant selon un mouvement circulaire uniforme de rayon r, dans le plan (O, x', y'), dans $\mathcal{R}'$ à la vitesse angulaire ω'

$\varphi = \omega t$

(à $t = 0$ $\varphi = 0$)

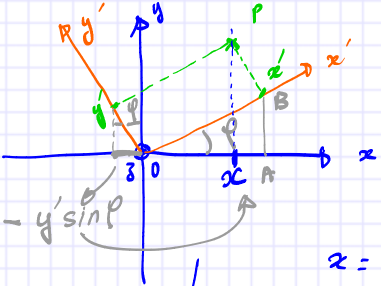
3– Exprimer $\vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$ et $\vec{a}_{\mathcal{R}'}(P)$ à l'aide de coordonnées cylindriques liées à P

4– En déduire $\vec{v}_{\mathcal{R}}(P)$ et $\vec{a}_{\mathcal{R}}(P)$ à l'aide des expressions trouvées en 2, avec les mêmes coordonnées cylindriques utilisées en 3. Que remarquez-vous ? Est-ce logique ?

5– Représentez sur le dessin de terme de l'accélération de Coriolis

On considère un référentiel $\mathcal{R}'$ (O, x', y', z') en rotation uniforme dans $\mathcal{R}$ (O, x, y, z). Les origines des référentiels sont confondues et la rotation se fait selon l'axe (Oz) confondu avec (Oz') à la vitesse angulaire ω. Un point P se déplace dans $\mathcal{R}'$

1– P a comme coordonnées $(x', y', 0)$ dans $\mathcal{R}'$ Exprimer ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ en fonction de x', y' et ω.



~~OAB rectangle~~

~~$\cos\varphi = \frac{OA}{OB} = \frac{x}{x'}$~~

~~$x = x'\cos\varphi$~~

FAUX !

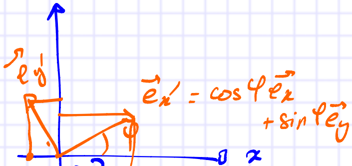
$x = \underbrace{x'\cos\varphi}_{OA} - y'\sin\varphi$

juste mais "dangereux"

$\vec{OP}$ dan R' $\qquad \vec{OP} = x'\,\vec{e}_{x'} + y'\,\vec{e}_{y'}$

$$\vec{e}_{x'} = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y$$

$$\vec{e}_{y'} = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y$$



$$\vec{OP} = x'\left[\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y\right] + y'\left[-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y\right]$$

$$= \underbrace{\left[x'\cos\varphi - y'\sin\varphi\right]}_{x}\vec{e}_x + \underbrace{\left[x'\sin\varphi + y'\cos\varphi\right]}_{y}\vec{e}_y$$

$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$; $y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$; $\varphi = \omega t$

$$\begin{cases} x = x' \cos \omega t - y' \sin \omega t \\ y = x' \sin \omega t + y' \cos \omega t \end{cases}$$

fonction de x', y', ω et t

on peut avoir $x'(t)$ et $y'(t)$

2 - $\vec{v}_R(P) = \vec{v}_{R'}(P) + \vec{v}_R(A) + \vec{\omega} \wedge \vec{AP}$ A origine de $\mathcal{R}'$

dans l'exercice $A \equiv O \Rightarrow \vec{v}_R(A) = \vec{0}$ $\quad \underline{\vec{a}_R(A) = \vec{0}}$

$\vec{AP} = \vec{OP}$

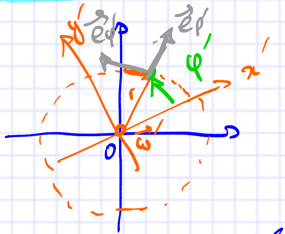
$$\boxed{\vec{v}_R(P) = \vec{v}_{R'}(P) + \vec{\omega} \wedge \vec{OP}}$$

$$\vec{a}_R(P) = \vec{a}_{R'}(P) + \cancel{\vec{a}_R(A)} + \cancel{\dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{AP}} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \underbrace{\vec{AP}}_{\vec{OP}}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{R'}(P)$$

$\vec{\omega}$ ne dépend pas du temps $\dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$ [rotation uniforme]

$$\boxed{\vec{a}_R(P) = \vec{a}_{R'}(P) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OP}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{R'}(P)}$$

3 -



P en rotation dans R' avec $\omega' = \text{cte}$ autour de O

dans R' : P décrit un mouvement circulaire uniforme

coordonnées polaires $\rightarrow \vec{e}_{\rho'}, \vec{e}_{\varphi'}$

Vecteurs de base polaires dans R sont les mêmes que dans R' !

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{e}_\rho &= \vec{e}_{\rho'} \\ \vec{e}_\varphi &= \vec{e}_{\varphi'} \end{aligned}}$$

$$\vec{v}_{R'}(P) = r\omega' \vec{e}_\varphi$$ (mouvement circulaire uniforme avec vitesse angulaire ω')

$$\vec{a}_{R'}(P) = -r\omega'^2 \vec{e}_\rho$$ accélération centripète $\dot{\varphi}' = \omega'$

4. $$\vec{v}_R(P) = \vec{v}_{R'}(P) + \vec{\omega} \wedge \vec{OP} = r\omega'\vec{e}_\varphi + \vec{\omega}\wedge\vec{OP}$$

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z \qquad \vec{OP} = r\vec{e}_\rho$$

$$\vec{v}_R(P) = r\omega'\vec{e}_\varphi + \omega\vec{e}_z \wedge r\vec{e}_\rho = r\omega'\vec{e}_\varphi + r\omega(\underbrace{\vec{e}_z\wedge\vec{e}_\rho}_{+\vec{e}_\varphi})$$

$e_z\ e_\rho\ e_\varphi\ e_z\ e_\rho\ e_\varphi\ e_z \ldots$

$$\vec{v}_R(P) = r\omega'\vec{e}_\varphi + r\omega\vec{e}_\varphi = r(\omega+\omega')\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a}_R(P) = \underbrace{\vec{a}_{R'}(P)} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OP}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{R'}(P)$$

$$-r\omega'^2 \vec{e}_\rho + \omega\vec{e}_3 \wedge (r\omega\vec{e}_\varphi) + 2(\omega\vec{e}_3) \wedge (r\omega'\vec{e}_\varphi)$$

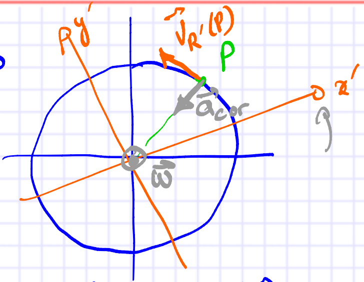
$$-r\omega'^2 \vec{e}_\rho + r\omega^2 (\underbrace{\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_\varphi}_{-\vec{e}_\rho}) + 2r\omega\omega' (\underbrace{\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_\varphi}_{-\vec{e}_\rho})$$

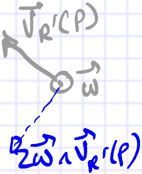
$$= -[r\omega'^2 + r\omega^2 + 2r\omega\omega']\vec{e}_\rho = -r[\underbrace{\omega^2 + 2\omega\omega' + \omega'^2}_{(\omega+\omega')^2}]\vec{e}_\rho$$

$$\vec{a}_R(P) = -r(\underbrace{\omega+\omega'}_{\Omega = \omega+\omega'})^2 \vec{e}_\rho$$

$$\vec{a}_R(P) = -r\Omega^2\vec{e}_\rho$$

$\omega > 0$
$\omega' > 0$





Calcul de $\vec{a}_R(P) \ldots = \ldots \quad + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{R'}(P)}_{\vec{a}_{cor}}$

$$= \underbrace{-2 r \omega \omega' \vec{e}_\rho}_{\text{vers } -\vec{e}_\rho}$$

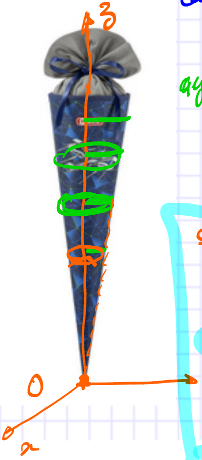
fixe dans R

Exercice 2

Un enfant s'amuse à faire tourner une bille dans un "cornet surprise" après en avoir retiré le contenu. C'est une "boite" en forme de cône (un peu comme un cornet de glace. Il lance sa bille dedans, en s'assurant qu'elle reste toujours en contact avec la parroi du cornet.

1– quel est le système de coordonnées le plus adapté à la description du mouvement de la bille ?

2– exprimer la vitesse et l'accélération de la bille dans ce système de coordonnées, en identifiant les termes qui se simplifient.



Cartésien, x, y, z variant

cylindrique
ρ varie
z ''
φ varie

sphérique
r varie
φ varie
θ fixe donné par l'ouverture du cône

Coordonnées sphériques

r varie $\quad \dot{r} \quad \ddot{r} \neq 0$

$\theta = cte \quad \dot{\theta} = 0 \quad \ddot{\theta} = 0$

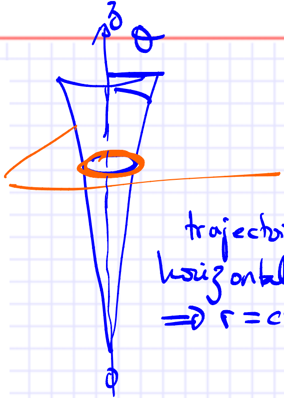
φ varie $\quad \dot{\varphi} \neq 0 \quad \ddot{\varphi} \neq 0$

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

2-

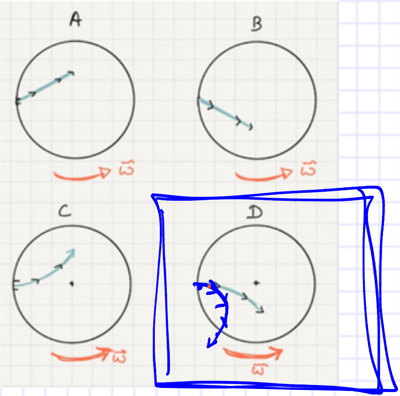
$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + \cancel{r\dot{\theta}\vec{e}_\theta} + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned}
a_r &= \ddot{r} - \cancel{r\dot{\theta}^2} - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta \\
a_\theta &= \cancel{r\ddot{\theta}} + \cancel{2\dot{r}\dot{\theta}} - r\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta \\
a_\varphi &= r\ddot{\varphi}\sin\theta + \cancel{2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta
\end{aligned}$$



trajectoire horizontale $\Rightarrow r = \text{cte}$

Jet d'eau



Nous mettons le plateau sur lequel est fixé le jet d'eau en rotation dans le sens trigonométrique (vu de dessus). Une caméra qui tourne en même temps permet de filmer dans le référentiel du plateau tournant. A quoi va ressembler le jet d'eau vu de dessus?

A	0%
B	0%
C	0%
D	0%

No votes