

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Mécanique I

Notes de cours

17 novembre 2024

Table des matières

0	Rappels mathématiques	5
1	Vecteurs	5
1.1	Coordonnées cartésiennes	5
1.2	Dérivées de vecteurs par rapport au temps	6
1.3	Norme	7
1.4	Produit scalaire	7
1.5	Produit vectoriel	7
2	Trigonométrie	8
3	Dérivées, primitives, intégrales	10
3.1	Dérivée	10
3.2	Primitive	11
3.3	Intégrale	11
4	Développement limité	12
1	Cinématique	13
1	Référentiel, Repère	13
2	Trajectoire, vitesse, accélération	13
3	Coordonnées cartésiennes	15
4	Coordonnées polaires	16
5	Coordonnées curvilignes	17
6	Coordonnées cylindriques	18
7	Coordonnées sphériques	19
8	Mouvement circulaire en coordonnées cylindriques	20
2	Référentiel accélérés	21
1	Introduction et notation	21
2	Position, vitesse et accélération	21
3	Analyse et cas particuliers	22
3.1	Cas particulier 1	22
3.2	Cas particulier 2	23
3.3	Cas particulier 3	24
3	Lois de Newton	26
1	Introduction	26
2	Masse et Quantité de Mouvement	26
3	Première loi de Newton	26
4	Deuxième loi de Newton	27
5	Troisième loi de Newton	27
6	Bilan des Forces	27
7	Référentiel non Galiléen	28
7.1	Exemple 1 :	28
7.2	Exemple 2 :	29
7.3	Exemple 3 :	29

4	Balistique	31
1	Poids d'un objet	31
2	Cas d'un lancer vertical (1D)	31
3	Cas général	31
4	Trajectoire, hauteur maximale, point d'impact	32
5	Portée maximale ou atteindre une cible	33
6	Temps de vol	33
7	Parabole de sûreté	34
8	Effet de la rotation de la Terre	34
5	Forces	37
1	Réaction d'un support	37
2	Forces de frottement secs	38
3	Roulement d'une roue	38
4	Frottements fluides	39
5	Tension dans une corde	40
6	Force de rappel d'un ressort	41
7	Poussée d'Archimède	42
6	Travail, Énergie, Principes de conservation	43
1	Travail d'une force, puissance	43
2	Énergie cinétique	44
3	Énergie potentielle et énergie mécanique	44
4	Lien entre force et énergie potentielle	46
5	Énergie potentielle et équilibre	46
7	Chocs ; Systèmes de masse variable	48
1	Motivation	48
2	Centre de masse ; référentiel centre de masse	49
3	Types de chocs	50
4	Chocs élastiques	50
4.1	Cas particulier : Choc frontal ($b=0$) de deux particules	50
4.2	Choc non-frontal de deux palets cylindriques	51
5	Choc mou	52
6	Système de masse variable : fusée	53
8	Oscillateur harmonique	56
1	Oscillations libres non amorties	56
2	Oscillateurs non amortis et énergie	59
3	Oscillations amorties	61
3.1	Méthode générale de résolution d'une telle équation	62
3.2	Analyse des résultats	63
4	Oscillations forcées	64
4.1	Méthode de résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 avec second membre	65
4.2	Analyse des résultats	67

9	Moment Cinétique ; Gravitation	70
1	Moment cinétique et moment d'une force	70
2	Force Centrale	72
3	Gravitation	72
4	Analyse énergétique de la Force Gravitationnelle	74
10	Dynamique du solide indéformable	78
1	Centre de Masse et Lois de Newton	78
1.1	Enoncé des Lois	78
1.2	Solides spécifiques	79
1.3	Superposition de deux solides	79
1.4	Solide à trou	79
2	Statique	80
3	Energie (cinétique) de rotation	81
4	Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe	83
4.1	Tige : Masses aux extrémités	83
4.2	Cylindre mince creux	84
4.3	Tige : Masse linéique	84
4.4	Solides usuels, pleins et homogènes	85
4.5	Théorème de Steiner	86
4.6	Solides composés et Solides à trous	87
5	Application	88
6	Moment Cinétique d'un Solide	89
7	Solide qui Roule	92
8	Tenseur d'inertie (hors programme)	94
11	Application du solide indéformable	96
1	Chute d'une Barre et Pendule Physique	96
1.1	Problèmes et Généralités	96
1.2	Chute d'une Barre	97
2	Mouvement Gyroscopique	100

Chapitre 0

Rappels mathématiques

L'analyse de problèmes physiques nécessite un certain nombre d'outils mathématiques. L'objectif de ce chapitre est de rappeler les bases mathématiques des vecteurs, dérivées, primitives, intégrales et développement limité.

1 Vecteurs

Un vecteur est caractérisé par :

- sa **norme**, c'est à dire sa longueur,
- sa **direction**, qui est la droite qui le porte,
- son **sens**, sur cette droite.

Un vecteur servira donc à représenter une grandeur pour laquelle, en plus de la "valeur" (norme), il est important de connaître le sens et la direction. Typiquement, ce sont les déplacements, les vitesses, les accélérations et les forces (un bilan des forces s'effectue à l'aide de vecteurs).

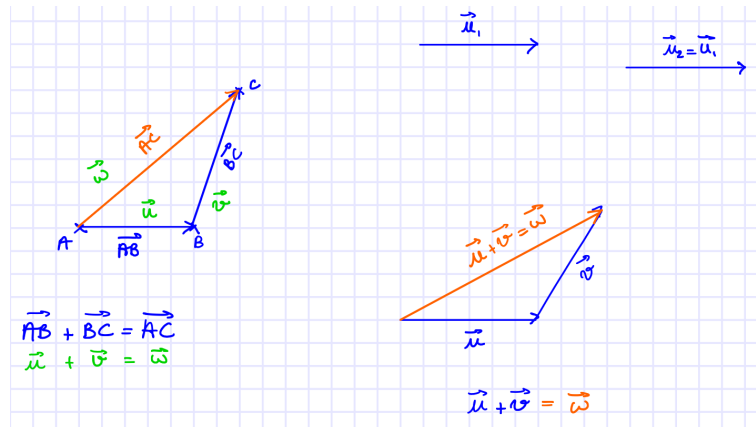


FIGURE 1 – Exemple d'additions vectorielles

Pour rappel, la Figure 1 démontre les notions d'égalité entre vecteurs (même norme, sens, direction) et d'indépendance du point d'attache (notamment pour l'addition vectorielle). Cependant, lorsqu'on travaille avec des forces $\vec{F}$, le point d'application est une caractéristique importante (mécanique du solide) : le poids s'applique par exemple au centre de masse de l'objet.

1.1 Coordonnées cartésiennes

Afin de manipuler les vecteurs dans l'espace (à 3 dimensions), il est commode de les décomposer selon leurs composantes cartésiennes ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$).

On fait partir le vecteur de l'origine du repère, les composantes du vecteur sont alors les coordonnées cartésiennes de son extrémité A : voir Figure 2.

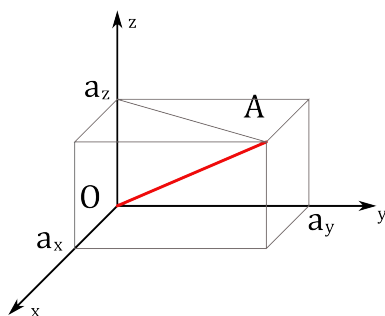


FIGURE 2 – Ici, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ a comme composantes a_x, a_y, a_z

Le vecteur $\vec{a}$ peut s'écrire grâce aux composantes et aux vecteurs de base du repère :

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z \quad (1)$$

Si $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ sont fixes dans l'espace, on pourra noter verticalement les composantes du vecteur $\vec{a}$:

$$\vec{a} \left| \begin{array}{c} a_x \\ a_y \\ a_z \end{array} \right. \quad (2)$$

La **somme** de deux vecteurs se calcule par la somme de ses composantes :

$$\vec{a} \left| \begin{array}{c} a_x \\ a_y \\ a_z \end{array} \right. + \vec{b} \left| \begin{array}{c} b_x \\ b_y \\ b_z \end{array} \right. = \vec{a} + \vec{b} \left| \begin{array}{c} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{array} \right. \quad (3)$$

Les **composantes** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'obtiennent par la soustraction des coordonnées des points B et A .

$$A \left| \begin{array}{c} x_A \\ y_A \\ z_A \end{array} \right. ; B \left| \begin{array}{c} x_B \\ y_B \\ z_B \end{array} \right. \implies \overrightarrow{AB} \left| \begin{array}{c} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{array} \right. \quad (4)$$

1.2 Dérivées de vecteurs par rapport au temps

En physique, il arrive que les vecteurs soient des fonctions du temps t :

$$\vec{a}(t) = a_x(t) \vec{e}_x + a_y(t) \vec{e}_y + a_z(t) \vec{e}_z \quad (5)$$

Nous aurons ainsi besoin de calculer leurs dérivées par rapport au temps. Lorsque les vecteurs de base ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) ne dépendent pas du temps, on peut écrire :

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt} \vec{e}_x + \frac{da_y}{dt} \vec{e}_y + \frac{da_z}{dt} \vec{e}_z \quad (6)$$

$$\text{ou en notation verticale : } \frac{d\vec{a}}{dt} \left| \begin{array}{c} da_x/dt \\ da_y/dt \\ da_z/dt \end{array} \right. \quad (7)$$

Dans certains cas, les vecteurs de base seront aussi dépendants du temps : ($\vec{e}_{x'}(t), \vec{e}_{y'}(t), \vec{e}_{z'}(t)$). Il faut donc appliquer la règle de la dérivée d'un produit :

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \underbrace{\frac{da_{x'}}{dt} \vec{e}_{x'} + a_{x'} \frac{d\vec{e}_{x'}}{dt}}_{\frac{d}{dt}(a_{x'} \vec{e}_{x'})} + \underbrace{\frac{da_{y'}}{dt} \vec{e}_{y'} + a_{y'} \frac{d\vec{e}_{y'}}{dt}}_{\frac{d}{dt}(a_{y'} \vec{e}_{y'})} + \underbrace{\frac{da_{z'}}{dt} \vec{e}_{z'} + a_{z'} \frac{d\vec{e}_{z'}}{dt}}_{\frac{d}{dt}(a_{z'} \vec{e}_{z'})} \quad (8)$$

1.3 Norme

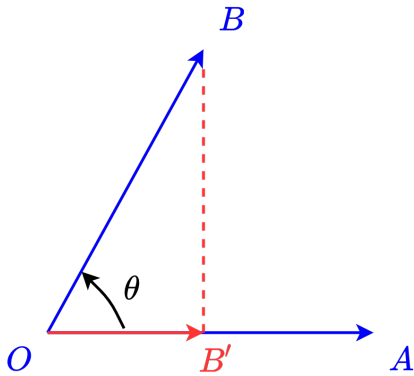
La **norme** d'un vecteur est par définition la longueur du segment sous-tendu. Pour un vecteur $\vec{AB}$ donné, sa norme est la longueur du segment $[AB]$.

La norme de $\vec{a}$ s'obtient en calculant la racine carrée de la somme des composantes au carré (en coordonnées cartésiennes) :

$$\|\vec{a}\| := \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (9)$$

On pourra noter $a = \|\vec{a}\|$ et ainsi désigner la norme du vecteur vitesse $\vec{v}$ par v .

1.4 Produit scalaire



La Figure 3 permet de visualiser l'opération produit scalaire entre les vecteur $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$:

$$\begin{aligned} \vec{OA} \cdot \vec{OB} &= \|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\| \cos(\widehat{\vec{OA}, \vec{OB}}) \\ &= \|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\| \cos \theta \\ &= \|\vec{OA}\| \|\vec{OB'}\| \end{aligned}$$

où $\vec{OB'}$ est la projection du vecteur $\vec{OB}$ sur $\vec{OA}$. Le produit scalaire permet donc de **calculer la norme de la projection d'un vecteur**.

FIGURE 3 – Produit scalaire entre $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$, avec projection $\vec{OB'}$.

Quelques remarques concernant le produit scalaire :

- Pour $\theta = \pi/2$, c'est à dire $\vec{OA} \perp \vec{OB}$ (orthogonalité) on a $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$
- Lorsque $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ sont colinéaires et de même sens, on a $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\|$
- Lorsque $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ sont colinéaires et de sens opposé, on a $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -\|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\|$

En reprenant la Figure 2 et l'Eq.1, on peut extraire les composantes d'un vecteur en prenant son produit scalaire avec les vecteurs de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i, \quad i = x, y, z. \quad (10)$$

1.5 Produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires se définit comme l'unique vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que :

- le vecteur $\vec{w}$ est **orthogonal** aux deux vecteurs donnés $\implies$ direction de $\vec{w}$;
- la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est de **sens direct** $\implies$ sens de $\vec{w}$;
- $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})| \implies$ norme de $\vec{w}$.

Si $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ (en particulier $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$).

Le produit vectoriel de deux vecteurs se calcule par le produit croisé des composantes deux par deux selon la méthode suivante :

$$\vec{a} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} ; \quad \vec{b} \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \wedge \vec{b} \begin{vmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -a_1 b_3 + a_3 b_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{vmatrix} \quad (11)$$

La formule obtenue en Eq.11 implique que $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$. Il est utile de connaître les identités du produit vectoriel entre les vecteurs de base du repère cartésien orthonormé direct $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z \quad (12)$$

$$\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_x \quad (13)$$

$$\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x = \vec{e}_y \quad (14)$$

2 Trigonométrie

En physique, nous utiliserons souvent les angles en **radians**. Le cercle complet fait 2π radians. Cette définition permet de relier directement la longueur de l'arc de cercle à l'angle et au rayon par $l = R\theta$ avec θ en radians.

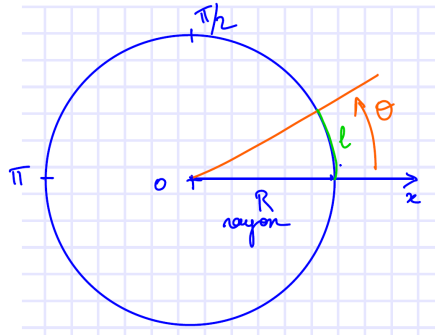


FIGURE 4 – Cercle trigonométrique et longueur d'arc. θ est défini par rapport à l'axe (Ox) .

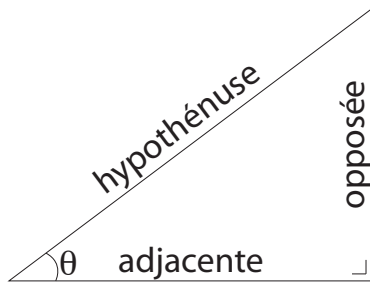


FIGURE 5 – Trigonométrie dans le triangle rectangle

Les quantités trigonométriques sin, cos, tan sont reliées aux longueurs des côtés du triangle rectangle de la manière suivante :

$$\sin \theta = \frac{\text{opposé}}{\text{hypothénuse}} \quad (15)$$

$$\cos \theta = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypothénuse}} \quad (16)$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} \quad (17)$$

Les identités trigonométriques peuvent s'avérer utiles pour la résolution de problèmes, en particulier :

- $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$, $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$
- $\sin(\pi/2 - \theta) = \cos(\theta)$, $\cos(\pi/2 - \theta) = \sin(\theta)$
- $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$, $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$
- $\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$, $\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$

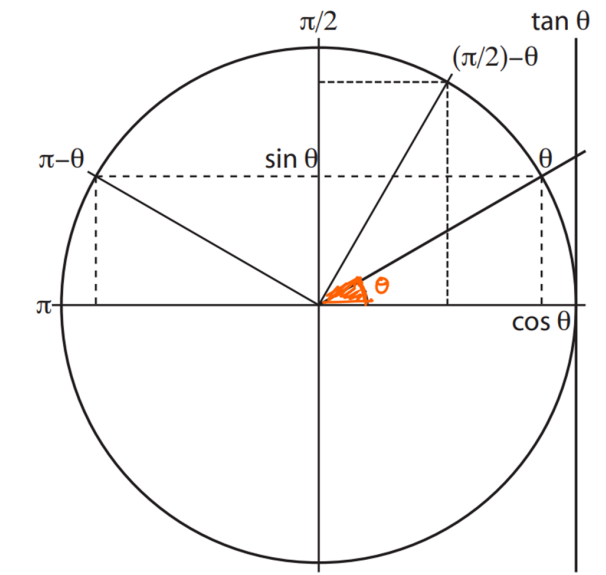


FIGURE 6 – Trigonométrie dans le cercle

- $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, pour tout angle θ .
- $\tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

Il est courant d'utiliser **vecteurs et trigonométrie** en même temps, par exemple lorsque vous aurez à trouver les composantes d'un vecteur dont vous connaissez la norme, et l'angle qu'il fait par rapport à un axe de référence. En d'autres termes, la projection d'un vecteur donné sur des axes (pas forcément verticaux ou horizontaux).

Sur la Figure 7, on décompose le poids $\vec{P}$ en deux composantes selon les axes x et y . L'angle d'inclinaison α peut être reporté à plusieurs endroits sur la figure afin d'en déduire $\vec{P} = P \sin \alpha \vec{e}_x - P \cos \alpha \vec{e}_y$.

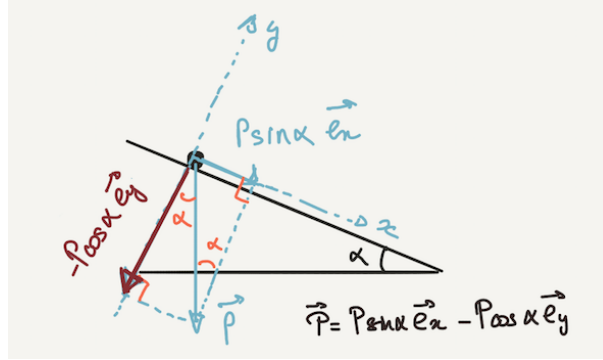


FIGURE 7 – Projection du poids $\vec{P}$ sur les axes inclinés x et y

3 Dérivées, primitives, intégrales

En physique, nous aurons souvent besoin d'analyser des fonctions dépendant de variables. Pour cela, les outils dérivée, primitive et intégrale seront utiles.

3.1 Dérivée

Soit une fonction $y = f(x)$ représentée par une courbe $y = f(x)$ dans le plan. La corde prise entre deux points a une pente caractérisée par l'angle θ (voir Figure 8).

$$\tan \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

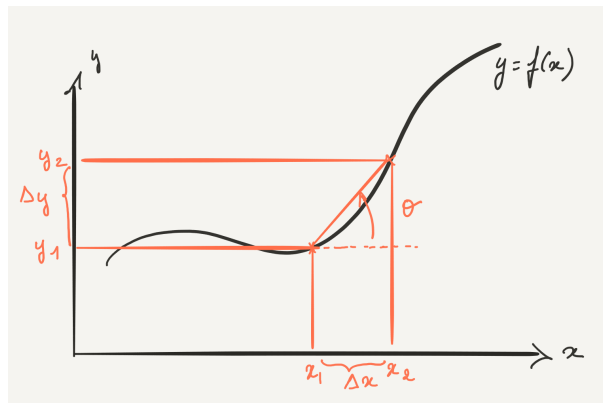


FIGURE 8 – Ici, le point 1 dénote le point de coordonnées (x_1, y_1) et le point 2 celui de coordonnées (x_2, y_2) . On a $\Delta y = y_2 - y_1$ et $\Delta x = x_2 - x_1$.

La **dérivée de la fonction** f (notée f') au point 1 est la limite de $\tan \theta = \Delta y / \Delta x$ quand le point 2 tend vers le point 1. C'est donc la **pente de la tangente à la courbe**.

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + dx) - f(x_1)}{dx} = \frac{df}{dx} \quad (18)$$

En physique on utilisera souvent la **variation infinitésimale de la fonction** f donnée par :

$$df = f(x + dx) - f(x) \quad (19)$$

pour une variation dx de x .

Le tableau suivant rappelle les dérivées de certaines fonctions usuelles :

Fonction	Dérivée
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1/\cos^2 x$
$\ln x$	$1/x$
e^x	e^x
x^n	nx^{n-1}

TABLE 1 – Dérivées de fonctions usuelles

Pour deux fonctions f et g , on a les règles suivantes :

- Produit : $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- Composition : $(f(g(x)))' = g'(x)f'(g(x))$

Ces deux règles permettent d'en déduire beaucoup d'autres : par exemple f/g qui est le produit de f et de la composition de $1/x$ avec g .

3.2 Primitive

Le calcul de la primitive de $f(x)$, est "la manoeuvre inverse" du calcul de la dérivée. En effet, on cherche la fonction $F(x)$ telle que $F'(x) = f(x)$. Étant donné que la dérivée d'une constante est nulle, on peut ajouter n'importe quelle constante à F ça ne change rien, donc la primitive F de f est définie à une constante près : pour $\tilde{F} = F + c$ on a toujours $\tilde{F}'(x) = f(x)$.

Par exemple, pour $f(x) = \cos x$, une primitive de f est $F(x) = \sin x + A$, avec A une constante d'intégration. De plus, si la valeur de F en un point particulier est connue : $F(x_0) = F_0$ alors on peut déterminer $A = F_0 - \sin x_0$.

3.3 Intégrale

Lorsque l'on cherche à calculer l'aire $\mathcal{A}$ sous la courbe de $f(x)$ entre un point $x = a$ et un point $x = z$, on utilisera l'outil intégrale.

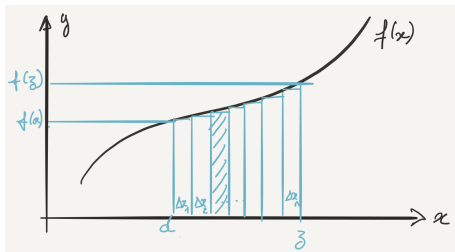


FIGURE 9 – Visualisation de l'intégrale d'une fonction et des petits rectangles de largeur Δx .

Cette aire peut être approximée par la somme des petits rectangles de hauteur $f(x_i)$ et de largeur Δx_i :

$$\mathcal{A} \simeq \sum_i f(x_i) \Delta x_i$$

Et en faisant tendre Δx vers 0 on obtient la formule de l'intégrale, où F est la primitive de f :

$$\mathcal{A} = \int_a^z f(x) dx = F(z) - F(a) \quad (20)$$

4 Développement limité

Enfin, le dernier outil introduit est le développement limité (ou développement en série de Taylor). Ceci nous permettra de remplacer une fonction compliquée par un polynôme plus simple à manipuler. Le développement limité de f autour d'un point x_0 est donné par :

$$f(x_0 + \varepsilon) \simeq f(x_0) + \frac{d}{dx}f(x_0)\varepsilon + \cdots + \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n}f(x_0) \quad (21)$$

Il s'agit d'un polynôme de degré n en ε , étant donné que les dérivées de f en x_0 sont des valeurs.

Pour donner un exemple, on calcule le développement limité de $f(x) = (1+x)^n$ pour x petit, c'est à dire autour de $x_0 = 0$. Les deux premières dérivées de f sont $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$ et $f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$. On a alors :

$$f(x_0 + \varepsilon) = f(0) + \varepsilon f'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2} f''(0) + \dots$$

$$\text{d'où on déduit :} \quad f(\varepsilon) = 1 + n\varepsilon + n(n-1)\frac{\varepsilon^2}{2} + \dots$$

$$\text{en remplaçant } \varepsilon \text{ par } x : \quad f(x) = 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2} + \dots$$

$$\text{pour } x \text{ proche de } 0, x^2 \simeq 0 : \quad f(x) \simeq 1 + nx.$$

Le tableau suivant rappelle certains développement limités utiles autour de $x_0 = 0$:

Fonction	Développement limité
$\cos x$	$1 - x^2/2$
$\sin x$	x
$\tan x$	x
$\ln(1+x)$	x
e^x	$1 + x$
$(1+x)^n$	$1 + nx$
$1/(1+x)^n$	$1 - nx$

TABLE 2 – Développement limité en 0 de fonctions usuelles

Chapitre 1

Cinématique

1 Référentiel, Repère

Le terme cinématique désigne la *description des mouvements*. Pour décrire mathématiquement les mouvements, nous avons besoin de :

- **référentiel** : système de référence par rapport auquel on mesure le mouvement.
Par exemple : référentiel du laboratoire, référentiel géocentrique (avec origine au centre de la Terre), référentiel héliocentrique (origine au centre du soleil). Le choix du référentiel dépendra du problème qu'on souhaite étudier.
- **l'origine du référentiel** : un point particulier *fixe* dans le référentiel par rapport auquel on définira la position d'un objet,
- **repère** : système de vecteurs unitaires formant un trièdre orthonormé direct, par exemple $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ qui sert à décrire et décomposer mathématiquement le mouvement.
Attention : le repère n'est pas forcément fixe dans le référentiel, et dans un même référentiel, on peut utiliser plusieurs repères et jongler entre ces différents repères.
- **coordonnées** : ensemble des grandeurs qui permettent de repérer la position d'un point. Autrement dit, ce sont les grandeurs qui nous sont données pour que l'on puisse placer les points dans l'espace. Ces coordonnées sont liées au repère. Par exemple, on a des coordonnées cartésiennes dans un repère cartésien ou des coordonnées GPS sur Terre...

2 Trajectoire, vitesse, accélération

Pour l'instant, l'objet étudié est considéré comme un point matériel P . Afin de décrire le mouvement de P , nous utiliserons sa position, sa vitesse et son accélération, mais aussi sa trajectoire.

La trajectoire est l'ensemble des points de l'espace par lesquels passe cet objet (point) au cours du temps. On la matérialise par une ligne tracée dans l'espace, et on repère la position de l'objet en fonction du temps, qu'on appelle souvent $P(t)$: Figure 1.1.

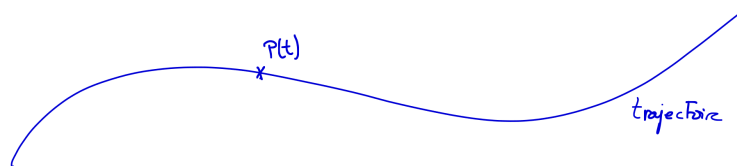


FIGURE 1.1 – Trajectoire d'un objet $P(t)$

La position se mesure par rapport à l'origine fixe du référentiel (généralement O). On suppose qu'au temps t_1 l'objet est en P_1 . On repère la position de l'objet à $t = t_1$ grâce à un vecteur position $\vec{r}(t_1) = \overrightarrow{OP_1}$. Le vecteur position $\overrightarrow{OP}$ est donc un vecteur qui dépend du temps. Entre t_1 et t_2 , l'objet s'est déplacé de $P(t_1) = P_1$ à $P(t_2) = P_2$. On appelle le vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ le vecteur déplacement $\Delta\vec{r}$ entre t_1 et t_2 (voir Figure 1.2).

En appliquant les règles d'addition vectorielle, on obtient :

$$\vec{r}(t_1) + \Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) \quad (1.1)$$

$$\Delta\vec{r} = \overrightarrow{P_1P_2} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) \quad (1.2)$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 \quad (1.3)$$

La **vitesse moyenne** entre t_2 et t_1 est ainsi donnée par : $\vec{v}_{\text{moy}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$.

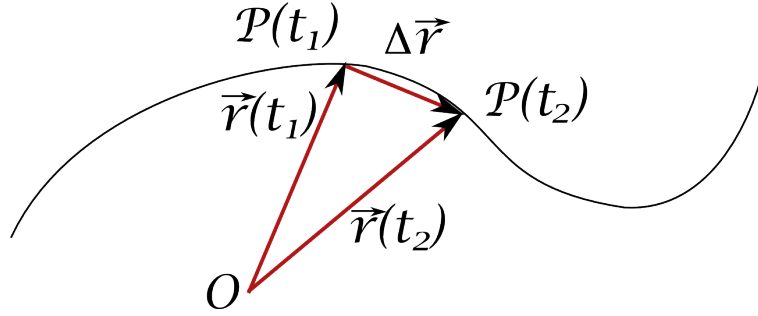


FIGURE 1.2 – Trajectoire d'un objet $P(t)$ et vecteur déplacement $\Delta\vec{r}$ entre t_1 et t_2 .

La **vitesse instantanée** peut être calculée grâce au vecteur déplacement entre $P(t)$ et $P(t + dt)$: Figure 1.3. En rapprochant le point $P(t + dt)$ du point $P(t)$, on diminue le vecteur déplacement $\Delta\vec{r}$ et on diminue en même temps l'intervalle de temps dt . Le vecteur déplacement devient donc un vecteur infinitésimal $d\vec{r}$.

$$\vec{v}(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (1.4)$$

$$d\vec{r} = \vec{r}(t + dt) - \vec{r}(t) \quad (1.5)$$

$$\vec{v}(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + dt) - \vec{r}(t)}{dt} \quad (1.6)$$

La vitesse instantanée $\vec{v}(t)$ est donc la dérivée du vecteur position par rapport au temps. On pourra utiliser la notation *point* (signifiant une dérivée par rapport au temps) : $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$.

Remarques :

- Lorsque dt devient tout petit ($dt \rightarrow 0$), $d\vec{r}$ devient aussi tout petit en norme et se rapproche de la trajectoire.
- le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ est colinéaire à $d\vec{r}$. Il est donc tangent à la trajectoire.

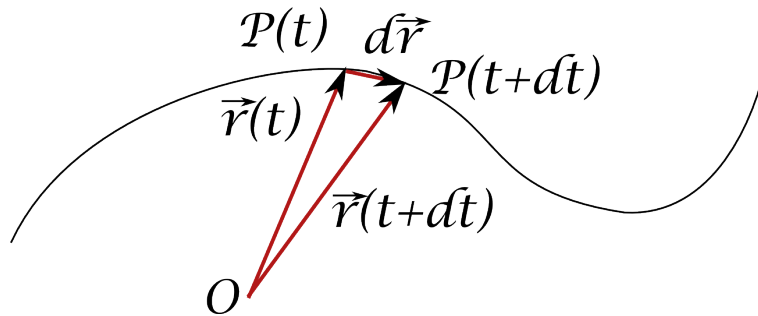


FIGURE 1.3 – Trajectoire d'un objet $P(t)$ et vecteur déplacement $d\vec{r}$ entre t et $t + dt$.

L'accélération correspond à un changement du vecteur vitesse. Si l'objet a une vitesse $v(t_1)$ en $t = t_1$ et $v(t_2)$ en $t = t_2$ alors **l'accélération moyenne** est donnée par :

$$\vec{a}_{\text{moy}} = \Delta \vec{v} / \Delta t \quad (1.7)$$

où $\Delta \vec{v} = \vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)$ et $\Delta t = t_2 - t_1$.

De plus, lorsque l'on considère des temps très proches ($dt \rightarrow 0$), on obtient **l'accélération instantanée** :

$$\vec{a}(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + dt) - \vec{v}(t)}{dt} \quad (1.8)$$

Il s'agit donc de la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps. On pourra encore utiliser la notation *point* : $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$, où $\ddot{\vec{r}}(t)$ désigne la dérivée seconde par rapport au temps $d^2\vec{r}/dt^2$.

Le Tableau 1.1 résume les différents résultats de cette section concernant la position, la vitesse et l'accélération.

Position	Vitesse	Accélération
$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}$	$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$	$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$

TABLE 1.1 – Position, vitesse et accélération (instantanée) du point matériel P .

La vitesse scalaire est la norme du vecteur vitesse $v = \|\vec{v}\|$ et l'accélération scalaire $a = \|\vec{a}\|$.

Remarque : La norme d'une dérivée est différente de la dérivée d'une norme. Pour la vitesse $\vec{v}$ on a :

$$\underbrace{\frac{d\|\vec{v}\|}{dt}}_{\text{dérivée de la norme}} \neq \underbrace{\left\| \frac{d\vec{v}}{dt} \right\|}_{\text{norme de la dérivée}} \quad (1.9)$$

Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, $v = \|\vec{v}\| = \text{cte}$ mais le vecteur $\vec{v}$ change au cours du temps (il tourne), donc $\frac{d\vec{v}}{dt} \neq \vec{0}$.

3 Coordonnées cartésiennes

Dans cette section, on s'intéresse au système de coordonnées cartésiennes. Considérons l'origine du référentiel O et les 3 axes partant de ce point : $(Ox), (Oy), (Oz)$ associés aux vecteurs unitaires $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, respectivement. On rappelle que le trièdre $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est *orthonormé direct*.

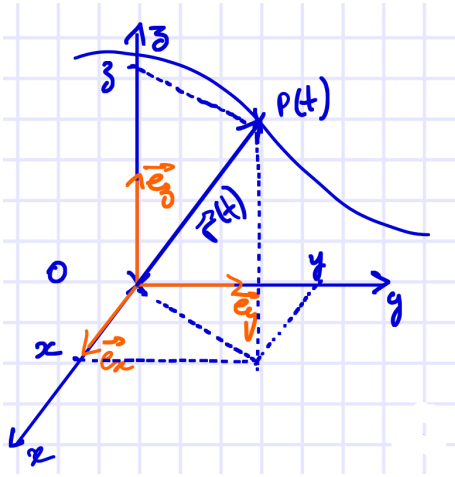


FIGURE 1.4 – Trajectoire du point matériel P en coordonnées cartésiennes.

Sur la Figure 1.4 on visualise le point matériel P le long de sa trajectoire dans l'espace. À l'instant t , le point $P(t)$ a pour coordonnées (x, y, z) et le vecteur position $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z \quad (1.10)$$

Le **vecteur vitesse** $\vec{v}(t)$ est donné par :

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d}{dt}(x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z) \quad (1.11)$$

Étant donné que les vecteurs $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ sont fixes dans le temps, on a :

$$\vec{v}(t) = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z \quad (1.12)$$

Attention : Le point P se déplace au cours du temps (le long de sa trajectoire). Les coordonnées x, y, z sont alors des fonctions du temps : $x(t), y(t), z(t)$ mais la dépendance temporelle sera souvent implicite.

De la même manière, on passe du vecteur vitesse $\vec{v}$ au vecteur accélération $\vec{a}$ en dérivant à nouveau par rapport au temps :

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) \implies \vec{a}(t) \left| \begin{array}{l} \dot{v}_x = \ddot{x} \\ \dot{v}_y = \ddot{y} \\ \dot{v}_z = \ddot{z} \end{array} \right. \quad (1.13)$$

4 Coordonnées polaires

Il s'agit d'un système à 2 dimensions qui permet de repérer un point **dans un plan**. Le point P est représenté par sa distance ρ à l'origine O et par l'angle φ entre l'axe (Ox) et le vecteur $\overrightarrow{OP}$ (figure 1.5).

On relie les coordonnées polaires (ρ, φ) et cartésiennes (x, y) par la formule suivante :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad \text{avec} \quad \rho \in [0, \infty[, \quad \varphi \in [0, 2\pi[\quad (1.14)$$

Les vecteurs de base $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi$ ne sont pas des vecteurs constants. Ils sont liés à $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ par :

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y \end{cases} \quad (1.15)$$

On voit que si φ dépend du temps, $\hat{e}_\rho$ et $\hat{e}_\varphi$ aussi.

Remarque : Les vecteurs de base définis en Eq.1.15 sont de unitaires (norme 1), par exemple on a pour $\vec{e}_\rho$:

$$\|\vec{e}_\rho\| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$$

Les dérivées temporelles des vecteurs de base $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi$ sont données par :

$$\begin{cases} \dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \\ \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \vec{e}_\rho \end{cases} \quad (1.16)$$

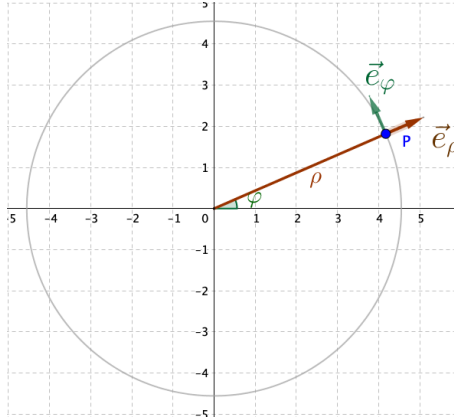


FIGURE 1.5 – Description du point P en coordonnées polaires.

Finalement, on peut exprimer $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$ en coordonnées polaires (i.e à l'aide de ρ, φ et $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi$). Le Tableau 1.2 regroupe ces résultats :

Position	Vitesse	Accélération
$\vec{r}(t) = \rho \vec{e}_\rho$	$\vec{v}(t) = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$	$\vec{a}(t) = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi$

TABLE 1.2 – Position, vitesse et accélération (instantanée) en coordonnées polaires.

5 Coordonnées curvilignes

Dans un système de coordonnées curvilignes (aussi appelé repère de Frenet), on considère la longueur parcourue le long de la trajectoire : l'**abscisse curviligne** $s(t)$. La vitesse scalaire est donnée par $v(t) = ds/dt$.

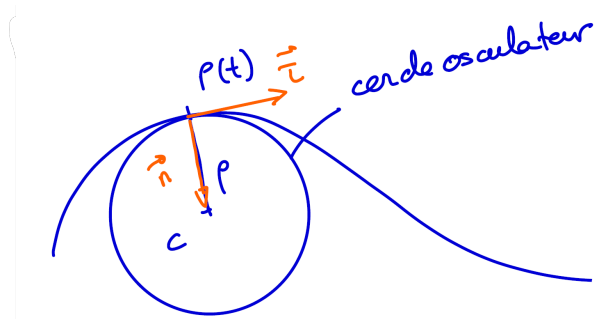


FIGURE 1.6 – Vecteurs unitaires et cercle osculateur le long de la trajectoire $P(t)$.

Soit le cercle osculateur à la trajectoire au point considéré de rayon ρ . Soient $\vec{t}$ tangent à la trajectoire dans le sens du mouvement et $\vec{n}$ pointant vers le centre du cercle osculateur,

tous deux unitaires. On a pour le vecteur vitesse :

$$\vec{v}(t) = v \vec{\tau} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau} \quad (1.17)$$

Et pour le vecteur accélération :

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n} \quad (1.18)$$

où le premier terme est appelé accélération tangentielle $\vec{a}_\tau$ et le second accélération normale (ou centripète) $\vec{a}_n$.

Remarque : L'accélération tangentielle provoque une variation de la vitesse scalaire ; l'accélération normale provoque une variation de la direction de la vitesse.

6 Coordonnées cylindriques

Parmi les systèmes de coordonnées à 3 dimensions dont les vecteurs de base évoluent en fonction de la position de l'objet, nous avons les coordonnées cylindriques. Il s'agit simplement des coordonnées polaires pour le plan (Oxy) auquel on ajoute l'axe (Oz) .

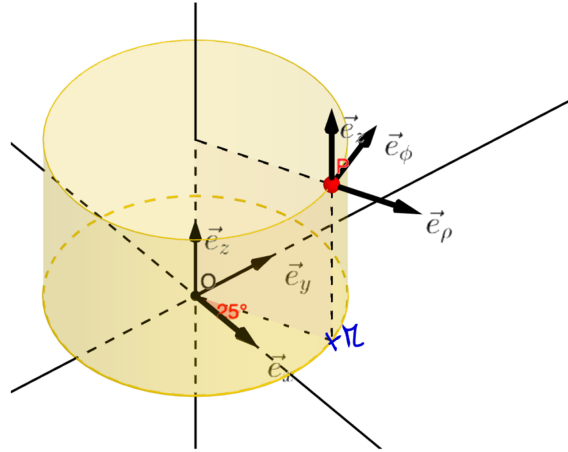


FIGURE 1.7 – Description du point P en coordonnées cylindriques

On relie les coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) et cartésiennes (x, y, z) comme suit :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad \text{avec} \quad \rho \in [0, \infty[, \quad \varphi \in [0, 2\pi[, \quad z \in]-\infty, \infty[. \quad (1.19)$$

Les vecteurs de base $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ sont liés à $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ par :

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases} \quad (1.20)$$

Remarque : Le vecteur $\vec{e}_z$ est constant mais les vecteurs $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\varphi$ varient toujours selon l'Eq. 1.16.

Comme précédemment, on peut exprimer $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$ en coordonnées cylindriques (i.e à l'aide de ρ, φ, z et $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$). Le Tableau 1.2 regroupe ces résultats :

Position	Vitesse	Accélération
$\vec{r}(t) = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$	$\vec{v}(t) = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_z$	$\vec{a}(t) = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + \ddot{z} \vec{e}_z$

TABLE 1.3 – Position, vitesse et accélération (instantanée) en coordonnées cylindriques.

7 Coordonnées sphériques

Ces coordonnées s'avèrent très utiles lorsque le problème physique a une symétrie sphérique. Il est possible de décrire la position d'un point dans l'espace par rapport à sa distance à l'origine et 2 angles de rotation. La distance OP représente alors la première coordonnée de ce système, notée ρ . L'angle entre la verticale (Oz) et le segment OP est la deuxième coordonnée, notée θ , et finalement, l'angle de rotation du point par rapport à l'axe Oz est la troisième coordonnée, qui elle sera notée ϕ .

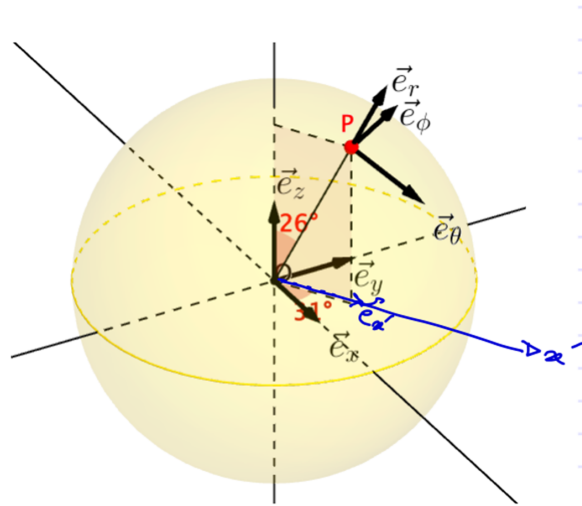


FIGURE 1.8 – Description du point P en coordonnées sphériques

On relie les coordonnées sphériques (r, θ, φ) et cartésiennes (x, y, z) comme suit :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad \text{avec} \quad \rho \in [0, \infty[, \quad \theta \in [0, \pi[, \quad \varphi \in [0, 2\pi[. \quad (1.21)$$

Les vecteurs de base $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ sont liés à $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ par :

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y \end{cases} \quad (1.22)$$

Les dérivées temporelles sont alors données par :

$$\begin{cases} \dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi \\ \dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta} \vec{e}_r + \dot{\varphi} \cos \theta \vec{e}_\varphi \\ \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_r - \dot{\varphi} \cos \theta \vec{e}_\theta \end{cases} \quad (1.23)$$

Finalement, on peut exprimer les vecteurs position, vitesse et accélération $(\vec{r}, \vec{v}, \vec{a})$:

$$\text{position :} \quad \vec{r}(t) = r \vec{e}_r \quad (1.24)$$

$$\text{vitesse :} \quad \vec{v}(t) = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi \quad (1.25)$$

$$\text{accélération :} \quad \vec{a}(t) = a_r \vec{e}_r + a_\theta \vec{e}_\theta + a_\varphi \vec{e}_\varphi \quad (1.26)$$

où les composantes de l'accélération (Eq. 1.26) sont données par :

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \quad (1.27)$$

$$a_\theta = r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta \quad (1.28)$$

$$a_\varphi = r \ddot{\varphi} \sin \theta + 2 r \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta + 2 \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta \quad (1.29)$$

8 Mouvement circulaire en coordonnées cylindriques

Dans cette section, nous allons voir comment représenter une rotation avec une grandeur vectorielle. Pour cela, on considère un point P ayant un mouvement circulaire dans le plan (O, x, y) à la vitesse angulaire $\omega = \dot{\varphi}$ (où φ est issu des coordonnées cylindriques) : Figure 1.9.

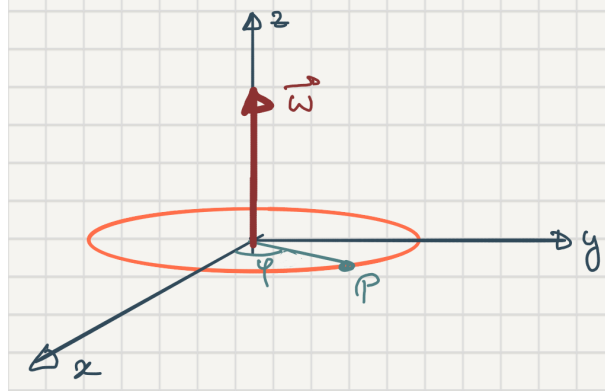


FIGURE 1.9 – Mouvement circulaire du point P décrit en coordonnées cylindriques.

Soit $\vec{\omega}$ le vecteur de norme ω , perpendiculaire au plan contenant le cercle décrit par P et de sens donné par la règle du tire-bouchon. Le vecteur $\vec{\omega}$ est appelé **vecteur rotation** : il contient les informations de la vitesse ainsi que de l'axe de rotation.

De plus, le vecteur position $\vec{r}$ est modifié par la rotation. Le lien entre $\dot{\vec{r}}$ et $\vec{\omega}$ est donné par :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad (1.30)$$

à condition que $\vec{r}$ soit de norme constante (par exemple un mouvement circulaire).

Remarque : Plus généralement, pour un vecteur $\vec{u}$ de norme constante subissant une rotation donnée par $\vec{\omega}$, on a $\dot{\vec{u}} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}$.

Chapitre 2

Référentiel accélérés

Les lois de Newton sont applicables dans un référentiel dit Galiléen : fixe ou en translation rectiligne uniforme. Cependant, dans certains cas, le référentiel adapté à la description du problème (train en mouvement, etc...) n'est pas Galiléen. Il faudra alors faire le lien entre ces deux référentiels.

1 Introduction et notation

Soient un référentiel $\mathcal{R}$ fixe, muni du repère cartésien $(O, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$, et un référentiel $\mathcal{R}'$ muni du repère cartésien $(A, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ en mouvement dans $\mathcal{R}$. On notera $\vec{e}_{x_i}$ et $\vec{e}_{y_i}$ les vecteurs unitaires de ces deux repères, respectivement.

On repère un point matériel P dans les deux référentiels de la manière suivante :

$$\begin{array}{lll} \text{Dans } \mathcal{R} : & \vec{OP} = \sum_i x_i \vec{e}_{x_i} & \vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \sum_i \dot{x}_i \vec{e}_{x_i} \quad \vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \sum_i \ddot{x}_i \vec{e}_{x_i} \\ \text{Dans } \mathcal{R}' : & \vec{AP} = \sum_i y_i \vec{e}_{y_i} & \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) = \sum_i \dot{y}_i \vec{e}_{y_i} \quad \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) = \sum_i \ddot{y}_i \vec{e}_{y_i} \end{array}$$

On peut séparer le mouvement de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$ en deux composantes : une rotation et une translation. La translation donne le mouvement de A dans $\mathcal{R}$ et la rotation la rotation des axes (y_j) par rapport aux axes (x_i) . On note $\vec{\omega}$ le vecteur rotation. Les vecteurs $\vec{e}_{y_i}$ changent donc dans $\mathcal{R}$. Leur dérivée est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \vec{e}_{y_j} = \dot{\vec{e}}_{y_j} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_{y_j} \quad (2.1)$$

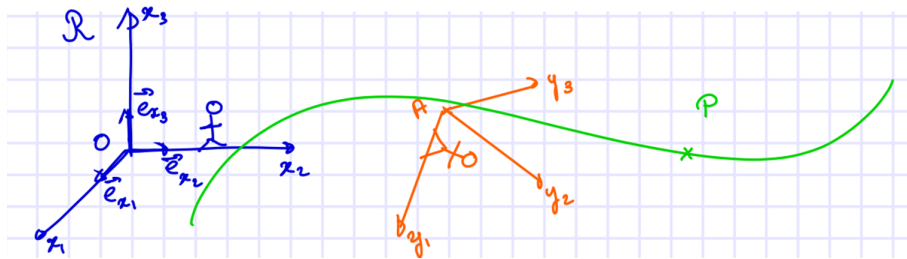


FIGURE 2.1 –

2 Position, vitesse et accélération

On considère un point P se déplaçant dans $\mathcal{R}'$, muni du repère $(A, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$. De plus, $\mathcal{R}'$ est mobile dans $\mathcal{R} : (O, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$.

Les **vecteurs position** dans les deux référentiels sont reliés comme suit :

$$\underbrace{\vec{OP}}_{\text{position de } P \text{ dans } \mathcal{R}} = \underbrace{\vec{OA}}_{\text{position de } A \text{ dans } \mathcal{R}} + \underbrace{\vec{AP}}_{\text{position de } P \text{ dans } \mathcal{R}'} \quad (2.2)$$

En dérivant par rapport au temps, on peut obtenir une expression pour relier les vitesses :

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OP}) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OA}) + \frac{d}{dt}(\overrightarrow{AP}) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(A) + \sum_i \frac{d}{dt}(y_i \vec{e}_{y_i}) \quad (2.3)$$

En dérivant et utilisant les termes de la section précédente dans les deux repères, on a alors pour les **vitesses** :

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(A) + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP} \quad (2.4)$$

On procède de forme similaire pour les accélérations, en dérivant l'équation des vitesses par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}_{\mathcal{R}}(P)) = \vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}}(A) + \frac{d}{dt}(\sum_i \dot{y}_i \vec{e}_{y_i}) + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \sum_i y_i \vec{e}_{y_i}) \quad (2.5)$$

De nouveau grâce aux règles de dérivation de produit et aux expressions de la section précédente, on a alors pour les **accélérations** :

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{a}_{\mathcal{R}}(A) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) \quad (2.6)$$

3 Analyse et cas particuliers

3.1 Cas particulier 1

$\mathcal{R}'$ a un mouvement de translation uniforme dans $\mathcal{R}$:

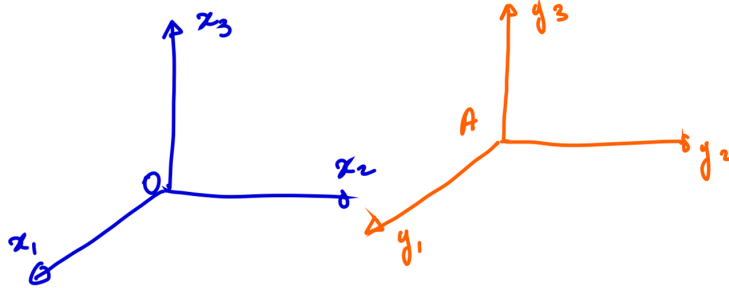


FIGURE 2.2 – Translation uniforme du repère

Nous partons des équations (2.4) et (2.6).

Ici, A a un mouvement rectiligne uniforme dans $\mathcal{R}$, et il n'y a donc pas de rotation de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$, les axes restent parallèles. Ces deux contraintes se traduisent par :

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(A) = \overrightarrow{cste} \quad (2.7)$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(A) = \vec{0} \quad (2.8)$$

$$\vec{\omega} = \dot{\vec{\omega}} = \vec{0} \quad (2.9)$$

Donc, en utilisant ces résultats dans les équations (2.4) et (2.6), on en déduit que :

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(A) + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) \quad (2.10)$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) \quad (2.11)$$

La vitesse obtenue est donc la composition des vitesses dans un mouvement de translation.

Remarque : Dans le chapitre suivant, nous étudierons les lois de Newton. Le fait que l'accélération soit la même ici prouve que $\mathcal{R}'$ est un référentiel Galiléen.

3.2 Cas particulier 2

$\mathcal{R}'$ a un mouvement de rotation uniforme dans $\mathcal{R}$ avec $A = O$ et P fixe dans $\mathcal{R}'$:

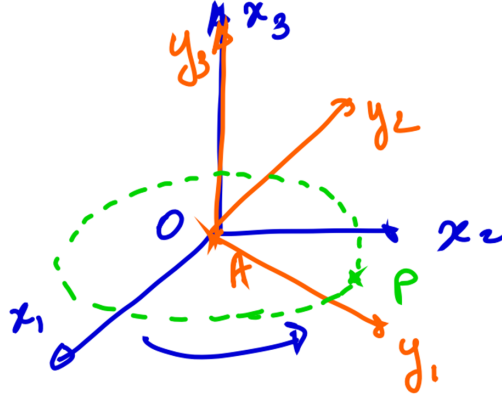


FIGURE 2.3 – Rotation uniforme du repère autour de Ox_3

Nous partons à nouveau des équations (2.4) et (2.6).

Ici, A et O sont confondus, P est fixe dans $\mathcal{R}'$ et donc décrit un mouvement circulaire uniforme. Ces contraintes impliquent que :

$$\vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) = \vec{0} \quad (2.12)$$

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(A) = \vec{a}_{\mathcal{R}}(A) = \vec{0} \quad (2.13)$$

$$\vec{\omega} = \overrightarrow{cst e} \quad (2.14)$$

$$\dot{\vec{\omega}} = \vec{0} \quad (2.15)$$

Donc, en utilisant ces résultats dans les équations (2.4) et (2.6), on en déduit que :

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP} \quad (2.16)$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}) \quad (2.17)$$

Analysons ce résultat (sur le mouvement du point P) en prenant une vue de dessus de la situation, et introduisant une notation familière :

$$\vec{e}_\rho = \vec{e}_{y_1} \quad (2.18)$$

$$\vec{e}_\varphi = \vec{e}_{y_2} \quad (2.19)$$

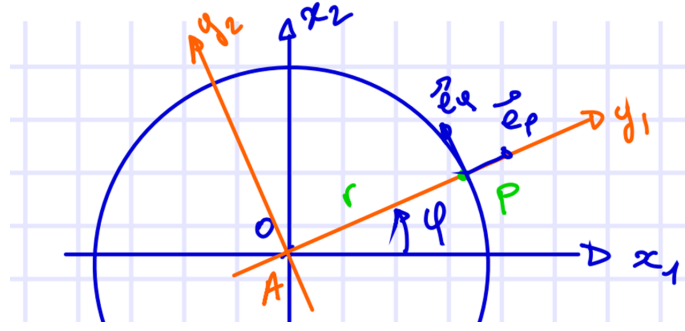


FIGURE 2.4 –

On peut alors ré-exprimer $\vec{v}_{\mathcal{R}}(P)$ et $\vec{a}_{\mathcal{R}}(P)$ en fonction des coordonnées $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\varphi$:

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP} = \omega \vec{e}_{y_3} \wedge r \vec{e}_{y_1} = r\omega \vec{e}_\varphi \quad (2.20)$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \omega \vec{e}_{y_3} \wedge r\omega \vec{e}_{y_2} = -r\omega^2 \vec{e}_\rho \quad (2.21)$$

Le résultat trouvé pour la vitesse est bien celui trouvé auparavant pour la vitesse en coordonnées polaires ; et pour l'accélération c'est celui de **l'accélération centripète**.

3.3 Cas particulier 3

$\mathcal{R}'$ a un mouvement de rotation uniforme dans $\mathcal{R}$ avec $A = O$ et P libre :

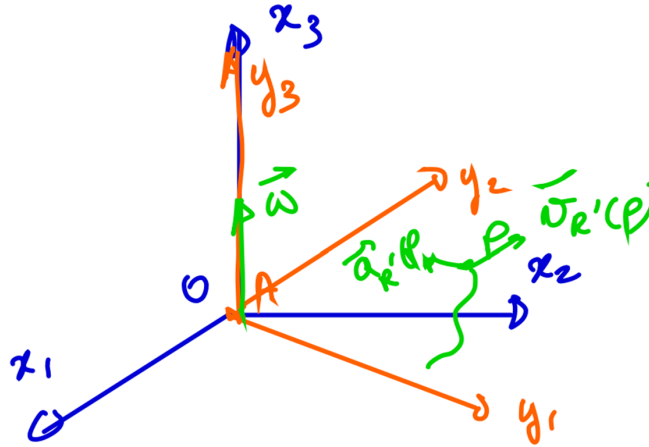


FIGURE 2.5 – Rotation uniforme du repère avec P libre

Ce cas ressemble au précédent, mais P n'étant pas fixe dans $\mathcal{R}'$, il y a moins de simplifications pour les équations (2.4) et (2.6) : on a seulement $\vec{v}_{\mathcal{R}}(A) = \vec{a}_{\mathcal{R}}(A) = \vec{0}$ ainsi que $\vec{\omega} = \overrightarrow{cste}$ et sa conséquence $\dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$. On a alors :

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{v}'_{\mathcal{R}}(P) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP} \quad (2.22)$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}'_{\mathcal{R}}(P) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_{\mathcal{R}}(P) \quad (2.23)$$

Le premier terme de l'accélération est appelé **Accélération Relative**, le second Accélération Centripète (vu dans le cas particulier précédent), et le troisième **Accélération de**

Coriolis. Ce dernier traduit non seulement le déplacement de P dans $\mathcal{R}'$, mais aussi la rotation de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$.

Finalement, la nomenclature en cas général est :

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \underbrace{\vec{a}_{\mathcal{R}'}(P)}_{\text{accélération relative}} + \underbrace{\vec{a}_{\mathcal{R}}(A) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP})}_{\text{accélération d'entraînement}} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)}_{\text{accélération de Coriolis}} \quad (2.24)$$

Chapitre 3

Lois de Newton

1 Introduction

2 Masse et Quantité de Mouvement

La **masse** représente la quantité de matière. C'est une grandeur *extensive*, c'est à dire qu'un système composé du regroupement de m_1 et m_2 aura pour masse totale la somme des deux : $m_1 + m_2$. En mécanique classique, la masse est conservée.

La **quantité de mouvement** est une grandeur *vectorielle extensive* qui caractérise l'état du mouvement :

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (3.1)$$

A nouveau, un système composé du regroupement d'objets 1 et 2, ayant respectivement des masses m_1 et m_2 , et des vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ aura pour quantité de mouvement totale $\vec{p}$, où, pour $i = 1; 2$:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad (3.2)$$

$$\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i \quad (3.3)$$

La quantité de mouvement est une grandeur conservée.

3 Première loi de Newton

Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite à moins qu'une force quelconque n'agisse sur lui et ne le contraigne à changer d'état.

Le dit "état du mouvement" est la quantité de mouvement, exprimée par l'équation (3.1). En reformulant cette loi de forme mathématique, nous pouvons dire que si $\vec{F} = \vec{0}$, alors $\vec{p} = \overrightarrow{cste}$.

Il faut être dans un référentiel d'inertie, dit **référentiel Galiléen**, c'est à dire un référentiel au repos ou en déplacement rectiligne uniforme.

Une **force** est l'action exercée par un corps sur un autre. Elles sont de plusieurs types :

- les Forces Fondamentales (issues de la nature) : la gravitation, l'électromagnétisme, et les forces nucléaires forte et faible
- les Forces phénoménologiques (conséquences des premières) : les frottements, la tension dans une corde...
- les Forces d'inertie/fictives, qui elles ne sont pas dues à l'action d'un corps sur un autre, mais plutôt ressenties par un observateur dans un référentiel non-Galiléen.

Il est aussi possible de séparer la notion de force **interne ou externe**. Par exemple, dans une goutte d'eau, les molécules exercent des forces les unes sur les autres (internes), mais la goutte est soumise à son poids (externe).

4 Deuxième loi de Newton

Les changements de mouvements sont proportionnels à la force motrice, et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force est imprimée à l'objet.

C'est à dire que :

$$\Delta \vec{p} = \vec{F} \Delta t \quad (3.4)$$

Si $\vec{F}$ est la force, alors $\vec{F} \Delta t$ est la force motrice, et on a :

$$d\vec{p} = \vec{F} dt \quad (3.5)$$

où $\vec{F}$ est la somme de toutes les forces externes.

En divisant par dt des deux cotés, on obtient la formulation générale :

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad (3.6)$$

Cette expression n'est valable que si m est une constante, dans ce cas on appelle l'équation (3.6) la **Relation fondamentale de la dynamique**.

5 Troisième loi de Newton

A toute action, il y a toujours une réaction égale qui lui est opposée.

C'est à dire que pour toute force appliquée par un objet sur un autre, une force égale en norme et opposée en direction s'applique sur l'objet de base. C'est le cas par exemple lorsqu'un poids est posé sur une table, pour une pierre tirée par une corde...

Attention : Il n'y a pas de temporalité entre ces forces, elles s'exercent en tout temps tant que les objets sont en relation.

Cette loi nous permet d'affirmer que $\sum \vec{F}_{int} = \vec{0}$ car les forces s'annulent par paires, vu que pour toute force interne exercée (d'une molécule sur une autre) une force égale et opposée en norme l'annule.

6 Bilan des Forces

Dans un référentiel d'inertie, $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$. Il est possible par analyse dimensionnelle de conclure que $1N = 1kg \cdot m \cdot s^{-2}$.

On peut procéder, pour appliquer la seconde loi de Newton et faire un bilan de forces, de la manière suivante :

- Identification du système
- Choix référentiel
- Choix repère orthonormé direct
- Dessin
- Projection des forces
- Liste des conditions initiales
- On résoud

7 Référentiel non Galiléen

Supposons que nous sommes dans un référentiel non Galiléen, à la fois en translation et rotation, avec $\vec{\omega} = \overrightarrow{cst\vec{e}}$. Pour un observateur dans $\mathcal{R}'$

Pour pouvoir appliquer la seconde loi de Newton, il faut être dans un référentiel Galiléen, donc elle est valable seulement dans $\mathcal{R}$:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} = m\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) \quad (3.7)$$

La quantité qui nous intéresse est plutôt $\vec{a}_{\mathcal{R}'}(P)$, donc on va utiliser l'équation (??) vue dans le chapitre précédent pour isoler l'accélération cherchée à partir de $\vec{a}_{\mathcal{R}}(P)$. On sait que la rotation se fait à vitesse angulaire constante, alors le 4e terme de l'équation (2.6) est nul, et on peut alors isoler $\vec{a}_{\mathcal{R}'}(P)$ et multiplier le tout par m :

$$m\vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) = m\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) - m\vec{a}_{\mathcal{R}}(A) - m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}) - m * 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) \quad (3.8)$$

Il est possible d'utiliser l'équation (3.7) pour réexprimer le résultat comme :

$$m\vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) = \sum \vec{F}_{ext} - m[\vec{a}_{\mathcal{R}}(A) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)] \quad (3.9)$$

m et les termes qui le multiplient ont la dimension d'une force mais ne sont apparus que car nous nous plaçons dans $\mathcal{R}'$: ce sont des forces d'inertie. Ces dernières sont faites de la somme de :

- la force de Coriolis : $-2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$
- la force d'entraînement : $-m(\vec{a}_{\mathcal{R}}(A) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}))$

7.1 Exemple 1 :

Considérons le cas où un pendule oscille dans un train, qui lui, a une accélération constante et pas de rotation :

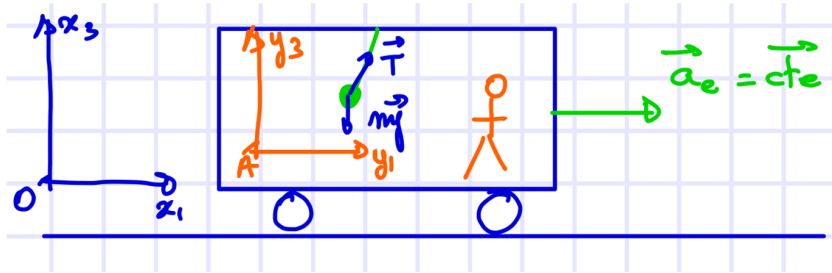


FIGURE 3.1 – Pendule dans un train avec accélération constante, sans rotation

On a donc ici :

- $\mathcal{R}$ Galiléen muni de (O, x_1, x_2, x_3)
- $\mathcal{R}'$ non-Galiléen lié au wagon muni de (A, y_1, y_2, y_3)
- $\vec{\omega} = \vec{0}$
- $\vec{a}_{\mathcal{R}}(A) = \vec{a}_e = \overrightarrow{cst\vec{e}}$

Si on reprend alors l'expression (3.8) et on injecte les contraintes, on obtient :

$$m\vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) = m\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) - m\vec{a}_e = \sum \vec{F}_{ext} - m\vec{a}_e = (m\vec{g} + \vec{T}) - m\vec{a}_e \quad (3.10)$$

Donc l'observateur dans le référentiel non-Galiléen $\mathcal{R}'$ voit le pendule soumis aux forces extérieures (poids et tension), mais aussi à la "force" due à l'accélération constante du train.

7.2 Exemple 2 :

Considérons le cas où un objet est immobile dans un référentiel en rotation uniforme :

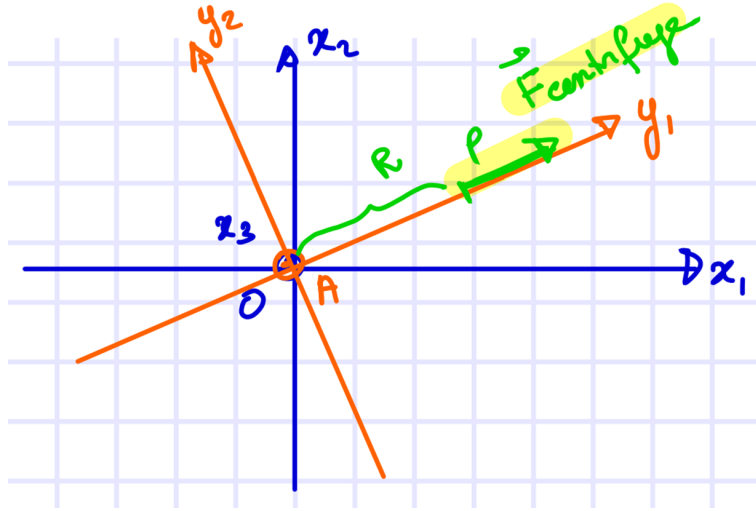


FIGURE 3.2 – Objet immobile dans un référentiel en rotation uniforme

On a donc ici :

- $\mathcal{R}$ fixe et Galiléen, muni de (O, x_1, x_2, x_3)
- $\mathcal{R}'$ non-Galiléen en rotation constante autour de (Ox_3) , muni de (A, y_1, y_2, y_3)
- A et confondu avec O : $\vec{v}_{\mathcal{R}}(A) = \vec{a}_{\mathcal{R}}(A) = \vec{0}$
- P immobile sur (Ay_1) à la distance R de A : $\vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) = \vec{0}$
- $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_{y_3} = \omega \vec{e}_{x_3} = \text{cste}$

P décrit alors un mouvement circulaire uniforme. En injectant les contraintes dans l'équation (3.8), on obtient :

$$m\vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) = \sum \vec{F}_{ext} - m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}) = \sum \vec{F}_{ext} + mR\omega^2 \vec{e}_{y_1} \quad (3.11)$$

P a un mouvement circulaire uniforme dans $\mathcal{R}$, et donc une accélération centripète $\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = -R\omega^2 \vec{e}_{y_1}$. Elle se traduit par une "**force centrifuge**" dans $\mathcal{R}'$: $mR\omega^2 \vec{e}_{y_1}$

7.3 Exemple 3 :

Considérons finalement le cas où l'objet dans un référentiel en rotation uniforme peut bouger librement :

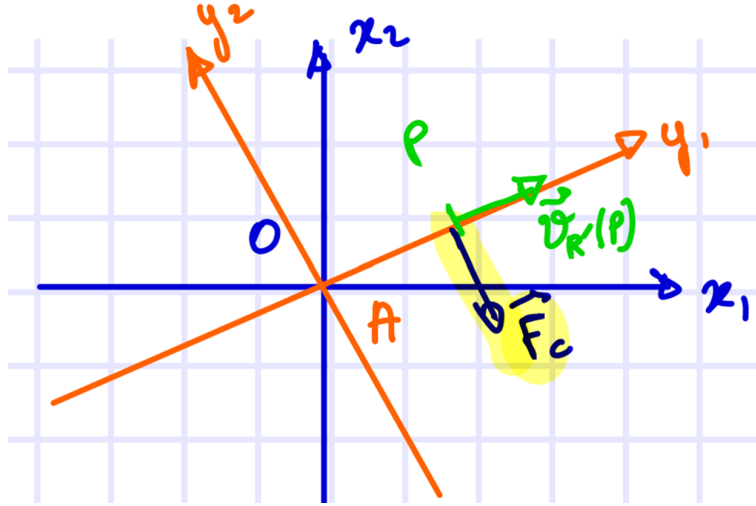


FIGURE 3.3 – Objet libre dans un référentiel en rotation uniforme

Ici on a seulement le terme en $\vec{a}_{\mathcal{R}}(A)$ qui s'annule car A et O restent confondus, et l'équation (3.8) devient alors :

$$m\vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) = \sum \vec{F}_{ext} - m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}) - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) \quad (3.12)$$

Supposons que P se déplace de manière uniforme le long de (Ay_1) , et donc que $\vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) = v_0\vec{e}_{y_1}$, alors l'expression précédente devient :

$$m\vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) = \sum \vec{F}_{ext} + mR\omega^2\vec{e}_{y_1} - 2m\omega v_0\vec{e}_{y_2} \quad (3.13)$$

Chapitre 4

Balistique

1 Poids d'un objet

Dans cette section, on s'intéresse au mouvement d'un objet soumis à son poids uniquement. A l'échelle du laboratoire, la Terre est plate et **l'accélération de la pesanteur** $\vec{g}$ est dirigée vers le bas. La force qui s'exerce sur une masse m est son poids $\vec{P}$, donné par :

$$\vec{P} = m\vec{g} \quad (4.1)$$

avec $g = \|\vec{g}\| = 9.8 \text{ m.s}^{-2}$.

Remarques :

- La masse m est une propriété intrinsèque du corps, tandis que le poids dépend du lieu (l'accélération de pesanteur n'est pas la même sur Terre et sur la lune).
- C'est la direction du poids qui indique la verticale. Si le sol n'est pas horizontal, le poids ne sera pas perpendiculaire au sol.
- Le poids pointe vers le centre de la Terre selon une bonne approximation. Une légère déviation sera due à la rotation de la Terre d'une part, à des inhomogénéités de la structure terrestre d'autre part.

2 Cas d'un lancer vertical (1D)

On se place dans le référentiel du laboratoire et on prend un repère en coordonnées cartésiennes (O, x, y, z) avec (Oz) vertical vers le bas.

À $t = 0$, on a $z(0) = 0$, $\vec{v}_0 = \vec{v}(0) = -v_0 \vec{e}_z$.

L'objet n'est soumis qu'à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$. On a alors :

$$m\vec{g} = m\vec{a} \implies \vec{a} = \vec{g} = g \vec{e}_z \quad (4.2)$$

En intégrant le vecteur accélération on obtient les expressions pour la vitesse et la position (le mouvement n'est que selon $\vec{e}_z$) :

$$v_z(t) = gt - v_0 \quad (4.3)$$

$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2 - v_0 t \quad (4.4)$$

Remarque : Les signes des expressions 4.3 et 4.4 changent lorsque l'axe (Oz) pointe vers le haut.

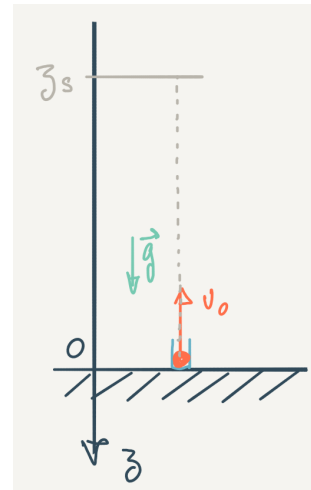


FIGURE 4.1 – Schéma du lancer vertical.

3 Cas général

On s'intéresse au cas général de la trajectoire d'un projectile.

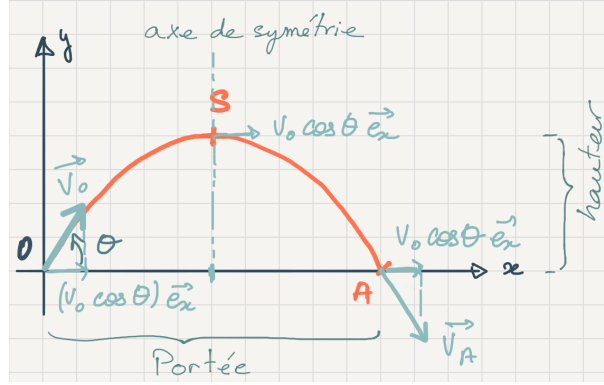


FIGURE 4.2 – Schéma de la trajectoire parabolique du projectile

Les conditions initiales sont, à $t = 0$:

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(0) = \vec{0} \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{v}(0) = \vec{v}_0 \quad \begin{vmatrix} v_0 \cos \theta \\ 0 \\ v_0 \sin \theta \end{vmatrix} \quad (4.5)$$

Et, étant donné que le corps n'est soumis qu'à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$, on a pour l'accélération (par $m\vec{g} = m\vec{a}$) :

$$\vec{a} = \vec{g} \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{vmatrix} \quad (4.6)$$

Après intégration, les vecteurs vitesse $\vec{v}$ et position $\vec{r}$ sont donnés par :

$$\vec{v}(t) \quad \begin{vmatrix} v_0 \cos \theta \\ 0 \\ -gt + v_0 \sin \theta \end{vmatrix} \quad \vec{r}(t) \quad \begin{vmatrix} (v_0 \cos \theta)t \\ 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \theta)t \end{vmatrix} \quad (4.7)$$

Remarque : L'équation 4.7 est appelée équation horaire du mouvement, ou équation paramétrique de la trajectoire (avec t pour paramètre).

4 Trajectoire, hauteur maximale, point d'impact

Ici, on cherche la **trajectoire** $z(x)$ (le mouvement est dans le plan (O, x, z)). En prenant la première composante de $\vec{r}$ (Eq. 4.7), on tire $t = x/(v_0 \cos \theta)$. En insérant cette expression pour t dans la dernière composante (z), on obtient :

$$z(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + \tan \theta x \quad (4.8)$$

La trajectoire est de la forme $z(x) = ax^2 + bx$ avec $a < 0$: il s'agit d'une parabole orientée vers le bas passant par l'origine (Figure 4.2).

On résout le problème de la **hauteur maximale** (point S) de la manière suivante : lorsque l'objet est en S , son vecteur position est $\vec{r}_S$. De plus, comme S est le sommet de la trajectoire, la vitesse $\vec{v}_S$ est purement horizontale :

$$\vec{r}_S \quad \begin{vmatrix} x_S \\ 0 \\ z_S \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_S \quad \begin{vmatrix} v_0 \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (4.9)$$

L'expression de la vitesse en fonction du temps est connue (Eq. ??), et en posant $\vec{v}(t_S) = \vec{v}_S$ on trouve :

$$t_S = \frac{v_0 \sin \theta}{g} \quad (4.10)$$

D'où on tire les coordonnées du point S , en insérant l'expression pour t_S dans l'Eq. 4.7 :

$$x_S = \frac{v_0^2 \cos \theta \sin \theta}{g} \quad (4.11)$$

$$z_S = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{g} \quad (4.12)$$

Pour ce qui est du **point d'impact** (point A), on a :

$$x_A = \frac{2 v_0^2 \cos \theta \sin \theta}{g} \quad (4.13)$$

$$z_A = 0 \quad (4.14)$$

Remarque : La symétrie de la trajectoire implique que $x_A = 2 x_S$ (sachant que $x_0 = 0$).

5 Portée maximale ou atteindre une cible

Dans cette section, on utilise l'Eq. 4.13 afin de déterminer l'angle $\theta_{\max}$ pour lequel le projectile **ira le plus loin possible** (i.e. qui maximise x_A). La vitesse v_0 est fixe.

On a, en utilisant $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ (voir Chapitre 0) :

$$x_A(\theta) = \frac{2 v_0^2 \cos \theta \sin \theta}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta \quad (4.15)$$

L'angle qui maximise cette expression est celui pour lequel $\sin 2\theta = 1$. On trouve alors

$$\theta_{\max} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ \quad (4.16)$$

Plus généralement, si l'on cherche à atteindre une cible en x_B , l'équation à résoudre pour θ est $\sin 2\theta = x_B g / v_0^2$. On a alors le résultat suivant :

- Si $\frac{x_B g}{v_0^2} > 1$: pas de solution,
- Si $\frac{x_B g}{v_0^2} = 1$: unique solution $\theta = 45^\circ$,
- Si $\frac{x_B g}{v_0^2} < 1$: deux solutions $\theta_1 \in [0, 45^\circ[$ (tir tendu) et $\theta_2 \in]45^\circ, 90^\circ]$ (tir en cloche).

6 Temps de vol

Le **temps de vol** est le temps t_A que le projectile met à arriver en A . On résout alors :

$$\vec{r}_A \left| \begin{array}{l} (v_0 \cos \theta) t_A \\ 0 \\ -\frac{1}{2} g t_A^2 + (v_0 \sin \theta) t_A \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} \frac{2v_0^2}{g} \sin \theta \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \quad (4.17)$$

d'où on tire le temps de vol :

$$t_A = 2 \frac{v_0}{g} \sin \theta \quad (4.18)$$

Remarque : Le temps de vol t_A peut être exprimé en fonction de la hauteur maximale z_S , étant donné qu'ils font tous deux apparaître un terme en $v_0 \sin \theta := v_{0z}$. On trouve alors :

$$t_A = 2 \sqrt{\frac{2z_S}{g}} \quad (4.19)$$

Le temps de vol dépend de la hauteur maximale : plus z_S est grand, plus t_A le sera aussi.

7 Parabole de sûreté

Pour une vitesse initiale v_0 donnée, un projectile ne peut pas atteindre les points en dehors de la **parabole de sûreté**. Cette parabole désigne l'espace inaccessible quel que soit θ .

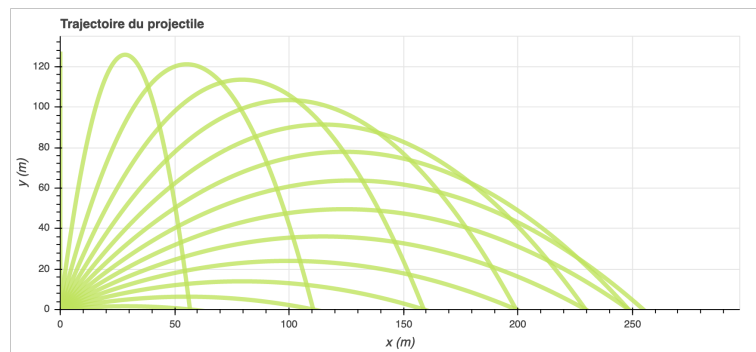


FIGURE 4.3 – Parabole de sûreté pour un v_0 donné.

8 Effet de la rotation de la Terre

On considère qu'on lâche une pierre d'une hauteur h depuis une tour située à l'équateur. De quelle distance et dans quelle direction la pierre est-elle déviée ?

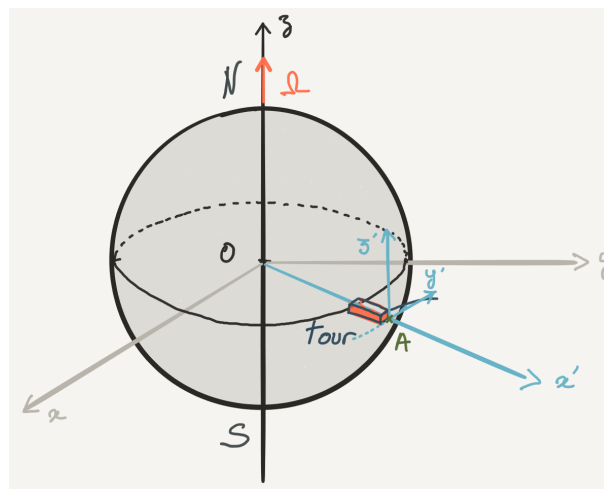


FIGURE 4.4 – Schéma du problème de la pierre qui tombe d'une tour

Pour ce faire, on explore 2 moyens d'analyser le problème : de manière intuitive, et de manière complète. On pose les grandeurs suivantes : Ω la vitesse de rotation terrestre et R le rayon de la Terre.

Calcul intuitif :

Vitesses initiales dues à la rotation terrestre (selon $\vec{e}_y$) :

$$\text{pierre : } \vec{v}_i = (R + h) \Omega \vec{e}_y \quad (4.20)$$

$$\text{sol : } \vec{v}_s = R \Omega \vec{e}_y \quad (4.21)$$

$$t_{\text{chute}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (4.22)$$

Les vecteurs déplacement (pendant le temps de chute) $\vec{D}_{\text{pierre}}$ et $\vec{D}_{\text{sol}}$ sont selon $\vec{e}_y$:

$$\vec{D}_{\text{pierre}} = \vec{v}_i t_{\text{chute}} = (R + h) \Omega \sqrt{\frac{2h}{g}} \vec{e}_y \quad (4.23)$$

$$\vec{D}_{\text{sol}} = \vec{v}_s t_{\text{chute}} = R \Omega \sqrt{\frac{2h}{g}} \vec{e}_y \quad (4.24)$$

La déviation est donc donnée par :

$$\vec{D} = \vec{D}_{\text{pierre}} - \vec{D}_{\text{sol}} = h \Omega \sqrt{\frac{2h}{g}} \vec{e}_y \quad (4.25)$$

Remarque : Pour un $\Omega = 7.3 \times 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$ et $h = 300\text{m}$ on trouve une déviation d'environ 17cm.

Calcul complet :

On prend un repère $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ fixe avec O centre de la Terre et un repère lié à la tour $\mathcal{R}'(A, x', y', z')$. A est le sommet de la tour (point d'où on lâche la pierre) : Figure 4.4.

Dans $\mathcal{R}$ (Galiléen), la seconde loi de Newton s'écrit :

$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = m \vec{g} \quad (4.26)$$

avec $\vec{g} = -g \vec{e}_{x'}$. De plus le vecteur rotation terrestre est le même dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$:

$$\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z = \Omega \vec{e}_{z'} \quad (4.27)$$

L'accélération dans le référentiel $\mathcal{R}$ est reliée à celle dans $\mathcal{R}'$ par l'expression suivante :

$$\underbrace{\vec{a}_{\mathcal{R}}(P)}_{=\vec{g}} = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) + \underbrace{\vec{a}_{\mathcal{R}}(A)}_{=\Omega \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OA})} + \underbrace{\dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{AP}}_{=0} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{AP}) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) \quad (4.28)$$

Dans l'Eq. 4.28, on cherche à isoler le terme $\vec{a}_{\mathcal{R}'}(P)$. On obtient alors :

$$\vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) = \vec{g} - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OP}) - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) \quad (4.29)$$

$$= -g_{\text{eff}} \vec{e}_{x'} - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) \quad (4.30)$$

En intégrant le vecteur accélération dans $\mathcal{R}'$, on trouve les vitesses selon les axes x', y', z' :

$$\begin{cases} \dot{x}' = -g_{\text{eff}} t + 2 \Omega y' \approx -g_{\text{eff}} t \\ \dot{y}' = -2 \Omega x' \\ \dot{z}' = 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

où la simplification de $\dot{x}'$ résulte du fait que le terme en $\Omega y'$ est négligeable devant g_{eff} . En intégrant d'abord $\dot{x}'$ puis $\dot{y}'$, on obtient le vecteur $\vec{AP}$ en fonction du temps :

$$\vec{AP} \left| \begin{array}{l} x'(t) = -\frac{1}{2} g_{\text{eff}} t^2 \\ y'(t) = \frac{1}{3} \Omega g_{\text{eff}} t^3 \\ z'(t) = 0 \end{array} \right. \quad (4.32)$$

Finalement, la déviation à $t_f = \sqrt{2h/g_{\text{eff}}}$ est :

$$\vec{D} = y'(t_f) \vec{e}_y = \frac{2}{3} \Omega h \sqrt{\frac{2h}{g_{\text{eff}}}} \vec{e}_y \quad (4.33)$$

Remarque : Le calcul intuitif nous a donné le bon ordre de grandeur, mais n'a pas fait apparaître le facteur 2/3. De plus, le g dans l'Eq. 4.25 est remplacé par l'accélération de pesanteur effective g_{eff}

Chapitre 5

Forces

1 Réaction d'un support

Lorsqu'un corps est posé sur un support, les atomes de ces deux solides se rapprochent et commencent à avoir une interaction notable. La force en jeu est la force électromagnétique, mais on modélise son effet par des forces phénoménologiques : **réaction du support** et **frottements**.

La réaction est normale au support et notée $\vec{R}$ ou $\vec{N}$. Elle est toujours dirigée du support vers l'objet.

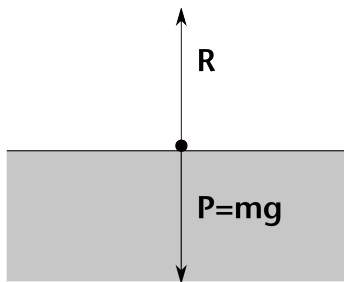


FIGURE 5.1 – Poids et réaction du support horizontal.

Dans cet exemple, on s'intéresse à la relation entre poids et réaction du support : une masse m est posée sur un support horizontal.

La masse m est immobile, donc $m\vec{a} = \sum \vec{F} = \vec{0}$. Les forces en présence sont le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la réaction $\vec{R}$. On obtient alors :

$$m\vec{g} + \vec{R} = \vec{0} \implies \vec{R} = -m\vec{g} \quad (5.1)$$

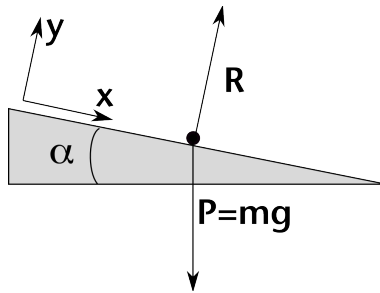


FIGURE 5.2 – Poids et réaction du support incliné.

Sur la Figure 5.2, une masse m est posée sur un support incliné formant un angle α avec l'horizontale.

La masse m reste sur le plan, donc $v_y = 0$. Le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la réaction $\vec{R}$ ont comme composantes :

$$\vec{R} \left| \begin{array}{c} 0 \\ R > 0 \end{array} \right. , \quad m\vec{g} \left| \begin{array}{c} mg \sin \alpha \\ -mg \cos \alpha \end{array} \right. \quad (5.2)$$

La contrainte de liaison $a_y = 0$ nous donne ainsi :

$$R = mg \cos \theta \quad (5.3)$$

2 Forces de frottement secs

Les frottements sont aussi une manifestation d'interactions électromagnétiques complexes, que l'on simplifie avec un modèle phénoménologique.

Un frottement **s'oppose au mouvement**. On en distingue deux sortes : frottements secs (d'un solide sur l'autre) et fluides (ils ont lieu dans un fluide).

Il existe deux formes de frottements secs :

- Quand le corps est immobile : **frottements statiques**
 $\sum \vec{F} = \vec{0}$, donc la force de frottement $\vec{F}_F$ compense exactement la force qui tente de mettre l'objet en mouvement, jusqu'à une valeur limite. Tant que $F_F \leq \mu_s R$, le corps ne bouge pas. μ_s est appelé coefficient de frottement statique.
- Quand le corps est en mouvement : **frottements dynamiques/cinétiques**
 $F_F = \mu_c R$, où μ_c est le coefficient de frottement cinétique.

Remarque : En général on a $\mu_s > \mu_c$.

3 Roulement d'une roue

Dans cette section, nous utiliserons le modèle de frottement pour montrer le résultat suivant :

Lorsqu'une roue roule sans glisser, la vitesse du point de contact avec le sol est nulle.

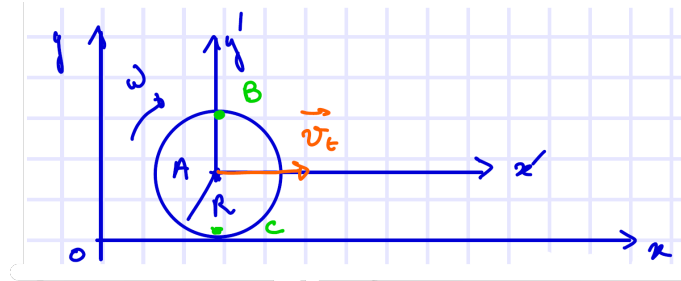


FIGURE 5.3 – Roulement sans glissement de la roue de centre A.

Dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire, muni du repère cartésien (O, x, y) , on considère une roue de rayon R posée sur le sol : Figure 5.3. On dénote par A le centre de la roue, C son point de contact avec le sol et B le point diamétralement opposé à C .

Attention : Lors du déplacement de la roue, le point de contact se détache du sol, ce n'est alors plus un point de contact. Il est remplacé par un autre point sur la surface de la roue.

C'est au moment où le point est en contact avec le sol que sa vitesse est nulle.

On définit aussi le référentiel lié à la roue $\mathcal{R}' (A, x', y')$ se déplaçant dans $\mathcal{R}$ à la vitesse $\vec{v}_t$. Par définition du point de contact (sans glissement) :

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(C) = \vec{0} \quad (5.4)$$

Mais, comme on a un mouvement de translation de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$, on a :

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(C) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(A) + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(C) \implies \vec{v}_{\mathcal{R}'}(C) = -\vec{v}_t \quad (5.5)$$

où on a utilisé que $\vec{v}_{\mathcal{R}}(A) = \vec{v}_t$ par définition de la vitesse de translation. De plus, comme la roue tourne à vitesse angulaire constante ω , la norme de la vitesse de C dans $\mathcal{R}'$ est $\|\vec{v}_{\mathcal{R}}(C)\| = R\omega$. On trouve alors la norme de la vitesse de translation :

$$v_t = R\omega \quad (5.6)$$

Maintenant, en considérant le point B diamétralement opposé, on a les résultats suivants :

$$\vec{v}_{\mathcal{R}'}(B) = \vec{v}_t \quad (5.7)$$

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(B) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(A) + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(B) = 2\vec{v}_t \quad (5.8)$$

Conclusion : Dans $\mathcal{R}$, le point C a une vitesse nulle et le point B se déplace à $2\vec{v}_t$.

4 Frottements fluides

La force de frottement fluide dépend de la vitesse et de la géométrie de l'objet. On distingue deux cas limites.

Pour des **petites vitesses (régime laminaire)**, la dépendance est linéaire :

$$\vec{F}_F = -b_l \vec{v} \quad (5.9)$$

où $b_l = K\eta$, avec η le coefficient de viscosité et K facteur dépendant de la forme de l'objet.

À **grandes vitesses (régime turbulent)**, la dépendance est quadratique :

$$\vec{F}_F = -b_t v^2 \frac{\vec{v}}{v} \quad (5.10)$$

où b_t est une constante, et $v = \|\vec{v}\|$.

Remarque : Les cas réels sont souvent des cas intermédiaires entre ces deux régimes : la dépendance n'est ni parfaitement linéaire, ni parfaitement quadratique.

L'expression 5.9 (régime laminaire) nous amène à une équation différentielle que nous savons résoudre. Nous allons l'étudier selon deux cas concrets où l'on cherche la vitesse $v(t)$:

1) On considère un projectile qui arrive avec $\vec{v}_0$ dans un fluide de viscosité η , avec K le coefficient lié à la forme de la balle. On néglige le poids du projectile. On a alors :

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{K\eta}{m} v_x \quad (5.11)$$

En posant $\lambda = K\eta/m$ et avec une vitesse initiale $v_x(0) = v_0$, on trouve :

$$v_x(t) = v_0 e^{-\lambda t} \quad (5.12)$$

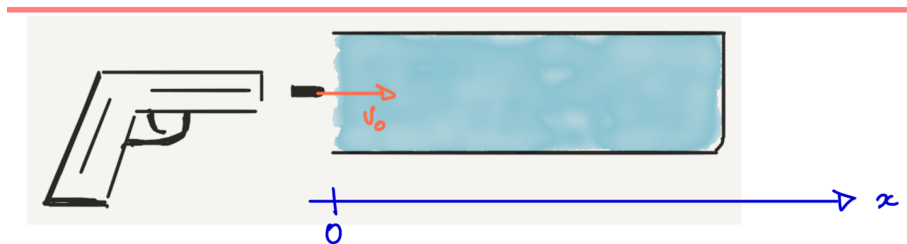


FIGURE 5.4 – Exemple n°1

2) Un objet est lâché sans vitesse initiale et soumis uniquement à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$. La viscosité du fluide est η et le coefficient lié à la forme de l'objet noté K . On a, selon l'axe vertical orienté vers le bas :

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{1}{m}(mg - b_l v_z) \quad (5.13)$$

La **vitesse limite** est la vitesse $\vec{v}_{\text{lim}}$ à laquelle la force de frottement $\vec{F}_F$ compense exactement le poids $\vec{P}$. La résultante des forces est nulle et l'objet sera en mouvement rectiligne uniforme. Cette vitesse est donnée par :

$$mg \vec{e}_z - b_l v_{\text{lim}} \vec{e}_z = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{lim}} = \frac{mg}{b_l} \quad (5.14)$$

Avec $\lambda = K\eta/m = b_l/m$, on a $v_{\text{lim}} = g/\lambda$. Cette vitesse est atteinte dans la limite $t \rightarrow \infty$. On peut désormais résoudre l'Eq. 5.12 avec la condition $\lim_{t \rightarrow \infty} v_z(t) = g/\lambda$:

$$v_z(t) = \frac{g}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \quad (5.15)$$

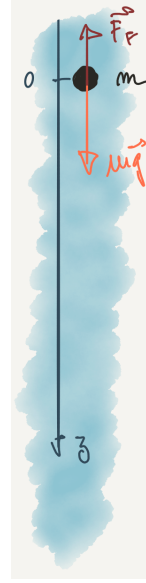


FIGURE 5.5 – Exemple n°2

5 Tension dans une corde

Une corde sans masse, inextensible et tendue transmet simplement les forces, en changeant éventuellement leur direction. La force de tension dans une corde est une force phénoménologique. On la note souvent $\vec{T}$.

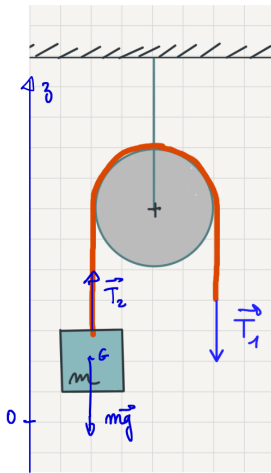


FIGURE 5.6 – Cas d'une poulie simple

On présente un exemple de transmission des forces à l'aide d'une poulie : un bloc de masse m est accroché à une corde (sans masse, inextensible, tendue) et une tension $\vec{T}_1$ est appliquée à son extrémité. On a alors $\|\vec{T}_1\| = \|\vec{T}_2\|$ (Figure 5.6). Par la seconde loi de Newton, on a pour l'accélération de la masse m :

$$ma_z \vec{e}_z = -mg \vec{e}_z + T_1 \vec{e}_z \quad (5.16)$$

Ainsi, on obtient le résultat suivant :

- Si $T_1 > mg$: $a_z > 0$ et la masse est accélérée vers le haut,
- Si $T_1 = mg$: $a_z = 0$ et la masse est immobile ou en mouvement rectiligne uniforme,
- Si $T_1 < mg$: $a_z < 0$ et la masse est accélérée vers le bas.

6 Force de rappel d'un ressort

Dans cette section, on s'intéresse à la force de rappel d'un ressort, lorsque celui-ci est étiré ou comprimé. On considère un ressort à spires non jointives accroché à une de ses extrémités. Le comportement du ressort peut être décrit comme suit :

- Lorsque aucune force n'est exercée sur le ressort, il a une longueur naturelle appelée longueur au repos et notée l_0 . Cette longueur servira de référence pour définir l'allongement du ressort x .
- Si l'on tire sur l'extrémité du ressort, celui-ci a comme longueur $l = l_0 + x$ avec $x > 0$. Le ressort est étiré.
- Si l'on comprime l'extrémité du ressort, celui-ci a comme longueur $l = l_0 + x$ avec $x < 0$. Le ressort est comprimé.

Le ressort exercera une force qui va tendre à le rapprocher de sa longueur de repos l_0 . Par exemple, lorsque l'allongement est négatif (compression), le ressort cherchera alors à s'étendre.

Dans le cas idéal, la force exercée par un ressort est proportionnelle à sa variation de longueur : c'est la **loi de Hooke**. Pour cela il faut rester dans le domaine des petites déformations (réversibles). Sur la Figure 5.7, un ressort est attaché à l'une de ses extrémités et relié à une masse m . On prend un repère Ox tel que l'allongement x est nul lorsque le ressort est au repos (à sa longueur l_0). La force de rappel du ressort a alors pour expression :

$$\vec{F}_k = -kx \vec{e}_x \quad (5.17)$$

où k est la constante de raideur exprimée en N/m. Ainsi, si $x > 0$, la force de rappel sera dirigée vers la gauche (étirement). Si $x < 0$, ce sera vers la droite (compression).

Remarque : Comme on a la relation $l = l_0 + x$ avec l la longueur du ressort, il est courant de rencontrer la loi de Hooke sous la forme : $\vec{F}_k = -k(l - l_0) \vec{e}_x$.

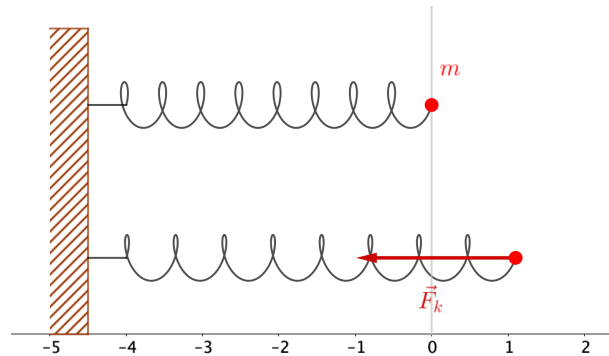


FIGURE 5.7 – Schéma d'un ressort étiré et de la force de rappel associée $\vec{F}_k$.

7 Poussée d'Archimède

Un corps immergé dans un fluide reçoit une poussée vers le haut égale au poids du volume de fluide déplacé. On note m_f la masse de fluide déplacée : $m_f = \rho V$, où ρ est la densité du fluide et V le volume du corps. La **poussée d'Archimède** a donc pour expression :

$$\vec{F}_A = -\rho V \vec{g} \quad (5.18)$$

On considère un objet de masse m et volume V qui tombe dans un fluide visqueux de masse volumique ρ . On se place dans un régime laminaire et on cherche sa vitesse limite.

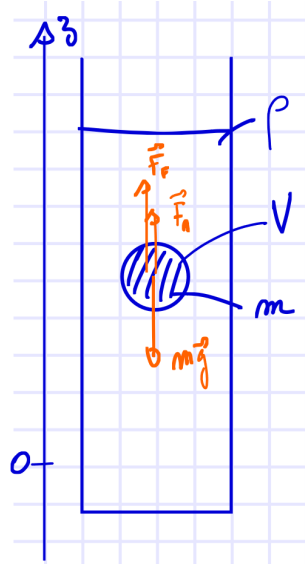


FIGURE 5.8 – Corps tombant dans un fluide visqueux

Les forces qui s'exercent sur l'objet sont le poids $m\vec{g}$, la poussée d'Archimède $\vec{F}_A$ et la force de frottement fluide $\vec{F}_F$. La vitesse limite $\vec{v}_{\text{lim}}$ est atteinte lorsque la résultante des forces est nulle. D'après l'axe Oz défini sur la Figure 5.8, on obtient :

$$m\vec{g} + \vec{F}_F + \vec{F}_A = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad -mg - b_l v_{\text{lim}} + \rho V g = 0 \quad (5.19)$$

D'où on tire la vitesse limite :

$$v_{\text{lim}} = \frac{\rho V g - mg}{b_l} \quad (5.20)$$

Remarque : Si $mg < \rho V g$, c'est à dire que l'objet est moins dense que le fluide, alors $v_{\text{lim}} > 0$ et l'objet remontera à la surface. Si $mg > \rho V g$, l'objet coulera.

Chapitre 6

Travail, Énergie, Principes de conservation

1 Travail d'une force, puissance

On considère un objet le long de sa trajectoire en $P(t)$. On note $\vec{F}$ la résultante des forces agissant sur l'objet : $\vec{F} = \sum \vec{F}^{\text{ext}}$. On a la décomposition suivante :

$$\vec{F} = F_\tau \vec{\tau} + \vec{F}_n \vec{n} \quad (6.1)$$

où $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$ sont les vecteurs du repère de Fresnel. Ainsi, F_τ est la composante de $\vec{F}$ dans la direction tangente à la trajectoire.

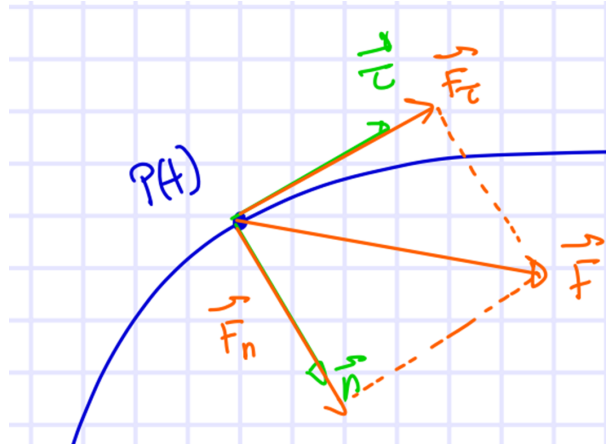


FIGURE 6.1 –

Remarque : Comme la vitesse $\vec{v}$ est tangente à la trajectoire, c'est F_τ qui fera varier la norme de $\vec{v}$.

Définissons le **travail** de $\vec{F}$ pour un déplacement infinitésimal $d\vec{r}$:

$$\delta W^{\vec{F}} = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot dr \vec{\tau} = F_\tau dr \quad (6.2)$$

Ainsi le travail entre A et B est obtenu par l'intégrale curviligne sur le trajet AB :

$$W_{AB}^{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (6.3)$$

On exprime le travail en Joules [J] : $1 \text{ J} = 1 \text{ N.m} = 1 \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-2}$.

Attention : Le long de la trajectoire AB , $\vec{F}$ peut changer, tout comme la direction de $\vec{\tau}$.

Attention 2 : F_τ est algébrique, il peut être < 0 ou > 0 .

Par définition, la **puissance** P est la variation du travail W par unité de temps. Pour un travail δW effectué durant dt , on a :

$$P = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (6.4)$$

La puissance s'exprime en Watt [W] : $1 \text{ W} = 1 \text{ J.s}^{-1}$.

2 Énergie cinétique

On considère le cas d'un mouvement curviligne sous l'action d'une force totale $\vec{F}_{\text{tot}}$. On utilise un repère de coordonnées de Frenet muni des vecteurs unitaires $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$. Le travail effectué par $\vec{F}_{\text{tot}}$ entre A et B est donné par :

$$W_{AB}^{\vec{F}_{\text{tot}}} = \int_A^B \vec{F}_{\text{tot}} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m\vec{a} \cdot d\vec{r} \quad (6.5)$$

Or, dans un système de coordonnées curviligne, on a :

$$d\vec{r} = dr \vec{\tau} \quad (6.6)$$

$$\vec{a} = \frac{v^2}{\rho} \vec{n} + \frac{dv}{dt} \vec{\tau} \quad (6.7)$$

Le travail devient alors :

$$W_{AB}^{\vec{F}_{\text{tot}}} = \int_A^B m \left(\frac{v^2}{\rho} \vec{n} + \frac{dv}{dt} \vec{\tau} \right) \cdot dr \vec{\tau} \quad (6.8)$$

$$= m \int_A^B dv \frac{dr}{dt} = m \int_A^B v dv \quad (6.9)$$

$$= \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \quad (6.10)$$

On définit l'**énergie cinétique** par :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad (6.11)$$

Le travail obtenu en Eq. 6.10 peut alors être réécrit comme $W_{AB}^{\vec{F}_{\text{tot}}} = E_{c,B} - E_{c,A}$.

Si l'objet est soumis à plusieurs forces $\vec{F}^i$ entre A et B , on a la relation suivante :

$$W_{AB}^{\vec{F}_{\text{tot}}} = \int_A^B \sum_i \vec{F}^i \cdot d\vec{r} = \sum_i \int_A^B \vec{F}^i \cdot d\vec{r} = \sum_i W_{AB}^{\vec{F}^i} \quad (6.12)$$

3 Énergie potentielle et énergie mécanique

Par définition, l'**énergie potentielle** $E_p^{\vec{F}}(x, y, z)$ est une fonction des coordonnées d'espace (x, y, z) qui est associée à la force considérée $\vec{F}$, et qui a la dimension d'une énergie. Pour des forces $\vec{F}$ telles que $W_{AB}^{\vec{F}}$ est indépendant du chemin suivi entre A et B , l'énergie potentielle est telle que :

$$W_{AB}^{\vec{F}} = E_{p,A}^{\vec{F}} - E_{p,B}^{\vec{F}} \quad (6.13)$$

L'Eq. 6.13 n'est valable que pour certaines forces $\vec{F}$ associées à une énergie potentielle. Ces forces sont dites **conservatives** puisqu'elles conservent l'énergie mécanique. C'est le cas de la force de pesanteur ou de la force de rappel d'un ressort. Pour les forces non-conservatives, il faudra utiliser l'Eq. 6.3.

Le poids étant conservatif :

$$W_{AB}^{m\vec{g}} = -mg\vec{e}_z \cdot \vec{AB} = -mg(z_B - z_A) = mgz_A - mgz_B \quad (6.14)$$

Ainsi, par reconnaissance des termes de l'équation 6.13, l'énergie potentielle dans le champ de pesanteur terrestre est donnée par :

$$E_p^{m\vec{g}} = mgz \quad (6.15)$$

Procédons pareillement pour la force de rappel d'un ressort :

$$W_{AB}^{\vec{F}_R} = \int_A^B \vec{F}_R \cdot d\vec{r} = \int_A^B -kx\vec{e}_x \cdot dx\vec{e}_x = -k \int_A^B x dx = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2 \quad (6.16)$$

Donc l'énergie potentielle d'un ressort est donnée par :

$$E_p^{\vec{F}_k} = \frac{1}{2}kx^2 \quad (6.17)$$

Attention : L'énergie potentielle est définie à une constante près (l'endroit où l'on prend la référence). Ce n'est pas un problème puisque seule la différence d'énergie potentielle a un sens physique.

De plus, on définit **l'énergie mécanique** par la somme des énergies potentielles et cinétiques :

$$E_m = E_p + E_c \quad (6.18)$$

Si toutes les forces $\vec{F}_i$ sont associées à une énergie potentielle $R_p^{\vec{F}_i}$, on a :

$$W_{AB}^{\vec{F}_{\text{tot}}} = \sum_i W_{AB}^{\vec{F}_i} = \sum_i \left(E_{p,A}^{\vec{F}_i} - E_{p,B}^{\vec{F}_i} \right) \quad (6.19)$$

$$= \underbrace{\sum_i E_{p,A}^{\vec{F}_i}}_{:=E_{p,A}} - \underbrace{\sum_i E_{p,B}^{\vec{F}_i}}_{:=E_{p,B}} = E_{p,A} - E_{p,B} \quad (6.20)$$

Et avec l'Eq. 6.10 qui introduit l'énergie cinétique, on obtient :

$$E_{c,B} - E_{c,A} = E_{p,A} - E_{p,B} \quad (6.21)$$

$$\iff E_{p,A} + E_{c,A} = E_{p,B} + E_{c,B} \quad (6.22)$$

$$\iff E_{m,A} = E_{m,B} \quad (6.23)$$

Conclusion : Lorsque toutes les forces $\vec{F}_i$ sont conservatives, il y a **conservation de l'énergie mécanique**.

4 Lien entre force et énergie potentielle

On dit qu'une force dérive d'un potentiel si et seulement c'est une force conservative. Dans ce cas, les composantes de $\vec{F}$ sont données par :

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -\partial E_p / \partial x \\ -\partial E_p / \partial y \\ -\partial E_p / \partial z \end{pmatrix} := -\vec{\nabla} E_p \quad (6.24)$$

Une force $\vec{F}$ est conservative si et seulement si (les conditions sont équivalentes) :

- il existe une fonction $E_p(x, y, z)$ telle que $W_{AB}^{\vec{F}} = E_{p,A}^{\vec{F}} - E_{p,B}^{\vec{F}}$,
- il existe une fonction $E_p(x, y, z)$ telle que $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$,
- le travail de $\vec{F}$ ne dépend pas du chemin suivi,
- le travail de $\vec{F}$ est nul sur un chemin fermé,
- le rotationnel de $\vec{F}$ est nul : $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0}$.

5 Énergie potentielle et équilibre

Dans cette section, on voit le lien entre énergie potentielle et position d'équilibre. Considérons un objet qui se déplace sur un axe Ox et plaçons le à la position x_0 . Supposons qu'à cette position, on aie :

$$\frac{dE_p}{dx}(x_0) = 0 \quad (6.25)$$

Alors, comme $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$, on en déduit $F(x_0) = 0$. Si l'objet est immobile en ce point, il y restera : c'est une **position d'équilibre**. Cela correspond à un extremum de l'énergie potentielle (maximum ou minimum).

Si il s'agit d'un minimum de E_p , alors on parlera de position d'équilibre **stable** : la force ramènera l'objet en x_0 pour de petites déviations. Cependant, si c'est un maximum, alors la position d'équilibre sera **instable**.

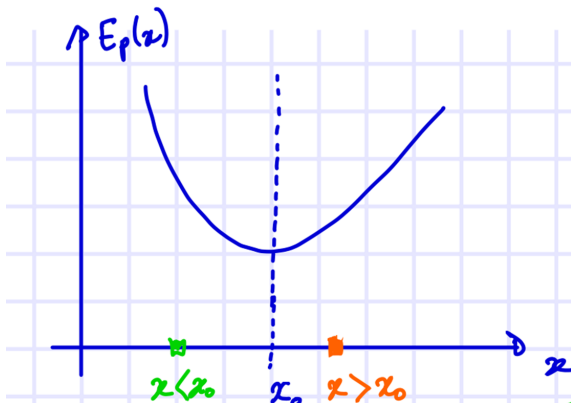


FIGURE 6.2 – Equilibre stable

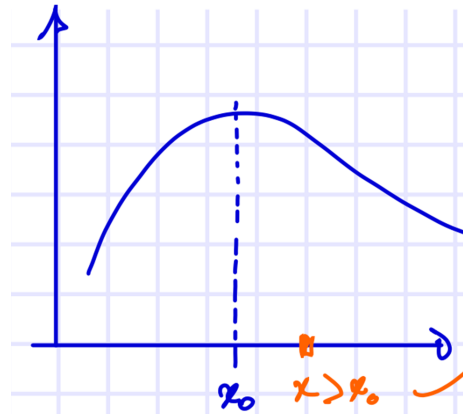


FIGURE 6.3 – Equilibre instable

Équilibre stable (minimum)	Équilibre instable (maximum)
$\frac{dE_p}{dx} = 0$ et $\frac{d^2E_p}{dx^2} > 0$	$\frac{dE_p}{dx} = 0$ et $\frac{d^2E_p}{dx^2} < 0$

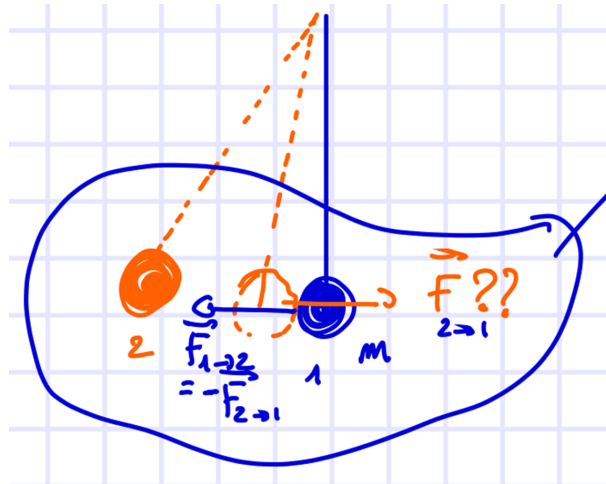
TABLE 6.1 – Stabilité des positions d'équilibre

Chapitre 7

Chocs ; Systèmes de masse variable

1 Motivation

On considère le problème suivant : un pendule au repos est constitué d'un fil et d'une masse m_1 accrochée à ce fil. Un deuxième pendule (masse m_2 , même point d'attache) est écarté de sa position d'équilibre et lâché sans vitesse initiale. Les masses des deux pendules vont alors entrer en collision.



Pour analyser le mouvement de m_1 , on devra effectuer un bilan des forces extérieures : son poids, la tension du fil **mais surtout la force exercée par la masse m_2 lors du choc**. La norme de cette force et la durée d'application dépendent du choc : elle sera donc très difficile à modéliser !

Solution : On considère le système constitué de l'ensemble des deux masses. La force qui pose problème sera donc une **force interne** au système, qui disparaîtra lors de l'analyse du système global. Les **forces externes** au système seront les deux tensions, ainsi que les poids des deux masses m_1 , m_2 .

Par la 3ème loi de Newton (action réaction), le bilan des forces internes sera nul puisque la masse m_1 exercera une force opposée sur m_2 :

$$\sum \vec{F}^{\text{int}} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0} \quad (7.1)$$

Finalement, le choc est un phénomène très court. On supposera alors que, pendant le choc, les forces externes n'ont pas le temps d'agir et que les objets restent au mêmes endroits de l'espace. **On ne se préoccupera donc pas des forces externes pendant le choc.**

2 Centre de masse ; référentiel centre de masse

Soit un système de N particules $(m_1, m_2, \dots, m_N)$ à des positions $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$ dans un référentiel $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Par définition, le **centre de masse** G du système est donné par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + \dots + m_N \vec{r}_N}{m_1 + \dots + m_N} = \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}}{M} \quad (7.2)$$

où M est la masse totale du système. Ainsi, la position de G ne dépend pas de l'origine du repère.

Cette notion de centre de masse est utile pour exprimer la loi de Newton pour un système total. Pour une particule α , la quantité de mouvement est donnée par $\vec{p}_{\alpha} = m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}$. La **quantité de mouvement totale** pour le système de N particules est :

$$\vec{P} = \sum_{\alpha} \vec{p}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \quad (7.3)$$

De plus, on a pour la **vitesse du centre de masse** :

$$\vec{v}_G = \dot{\vec{r}}_G = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \right] = \frac{1}{M} \vec{P} \implies \vec{P} = M \vec{v}_G \quad (7.4)$$

Finalement, la seconde loi de Newton pour le système global s'écrit :

$$\vec{a}_G = \dot{\vec{v}}_G = \frac{1}{M} \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{1}{M} \sum \vec{F}^{\text{ext}} \implies M \vec{a}_G = \sum \vec{F}^{\text{ext}} \quad (7.5)$$

Le **référentiel centre-de-masse** (cdm) est le référentiel qui a pour origine G et qui se déplace avec lui à une vitesse $\vec{v}_G$. Si $\sum \vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0}$ alors le référentiel cdm est Galiléen.

Une particule α a une vitesse $\vec{v}_{\alpha}$ dans (O, x, y, z) et $\vec{V}_{\alpha}$ dans le référentiel cdm. Elles sont reliées par :

$$\vec{v}_{\alpha} = \vec{V}_{\alpha} + \vec{v}_G \quad (7.6)$$

Application : On considère deux particules m_1 et m_2 , avec des vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ dans $\mathcal{R}$. Dans le référentiel cdm, les particules ont des vitesses $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ données par :

$$\vec{V}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \quad (7.7)$$

$$\vec{V}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \quad (7.8)$$

et les quantités de mouvements :

$$\vec{P}_1 = m_1 \vec{V}_1 = -\mu (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \quad (7.9)$$

$$\vec{P}_2 = m_2 \vec{V}_2 = \mu (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \quad (7.10)$$

où l'on a défini la **masse réduite** μ par :

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (7.11)$$

3 Types de chocs

On considère le cas $\sum \vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0}$, donc la quantité de mouvement $\vec{p}_{\text{tot}}$ est conservée. La nature des forces internes va déterminer le type du choc : on en distingue deux principaux :

- **Choc élastique** : l'énergie mécanique est conservée, pas de dissipation d'énergie. (ex : balle rebondissante).
- **Choc parfaitement inélastique ou choc mou** : les objets restent collés après le choc, pas de rebondissement. L'énergie mécanique n'est donc pas conservée.

Remarque : Les cas réels se situent presque toujours entre les deux.

4 Chocs élastiques

On considère des particules de forme cylindrique ou sphérique, et on se place dans le référentiel cdm. Dans ce dernier, les vitesses sont colinéaires et de directions opposées, mais pas forcément sur la même ligne. On définit la distance entre les vecteurs comme le **paramètre d'impact b** , et lorsque b est nul, **le choc est frontal**

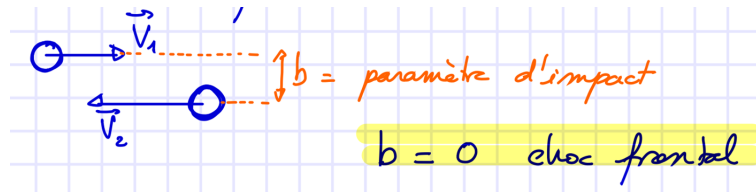


FIGURE 7.1 – Définition du paramètre d'impact b

Remarque : Si $b > (R_1 + R_2)$ il n'y a pas de choc entre les particules.

4.1 Cas particulier : Choc frontal ($b=0$) de deux particules

Dans ce cas, les trajectoires restent sur l'axe des trajectoires initiales. Le problème est alors à 1 dimension dans le référentiel cdm.

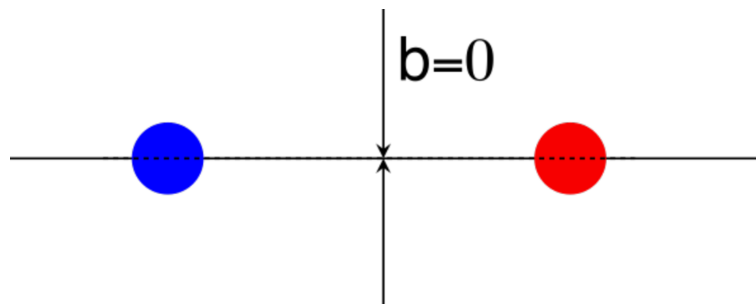


FIGURE 7.2 – Choc frontal dans le ref. cdm

Pour un choc élastique, la quantité de mouvement et l'énergie cinétique sont conservés :

$$\vec{P}_{\text{avant}} = \vec{P}_{\text{après}} \quad (7.12)$$

$$E_c^{\text{avant}} = E_c^{\text{après}} \quad (7.13)$$

Notation : L'instant après l'impact sera noté par l'indice ' ,

La quantité de mouvement totale avant et après le choc est elle aussi conservée :

$$\vec{P}_{\text{tot}} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0 \quad (7.14)$$

$$\vec{P}'_{\text{tot}} = \vec{P}'_1 + \vec{P}'_2 = 0 \quad (7.15)$$

Des deux dernières équations, en isolant les vitesses avant et après impact de la particule 2 et les réinjectant dans l'équation (7.13), on obtient :

$$\vec{V}_1 = -\vec{V}'_1 \quad (7.16)$$

$$\vec{V}_2 = -\vec{V}'_2 \quad (7.17)$$

Donc dans le référentiel cdm, les particules repartent avec des vitesses de même norme et sens opposés (car $b=0$, le sens ne change pas s'il n'y a pas de choc).

On revient désormais au référentiel (O, x, y, z) grâce à l'équation (7.6), et on a alors pour un choc frontal :

$$\vec{v}'_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (7.18)$$

$$\vec{v}'_2 = \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2} \quad (7.19)$$

Etudions le cas particulier où $\vec{v}_2 = \vec{0}$, les vitesses après choc deviennent alors :

$$\vec{v}'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_1 \quad (7.20)$$

$$\vec{v}'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1 \quad (7.21)$$

- Si $m_1 > m_2$: Les 2 particules continuent dans le même sens
- Si $m_1 = m_2$: La particule 1 s'arrête, la 2 part avec $\vec{v}_1$
- Si $m_1 < m_2$: La particule 1 repart dans l'autre sens

4.2 Choc non-frontal de deux palets cylindriques

Le calcul complet des chocs non frontaux n'est pas au programme. Mais si vous êtes curieux ou curieuses, sachez que le calcul peut être fait facilement pour des objets cylindriques ou sphériques. Dans ce cas, le vecteur vitesse est séparé en deux composantes. La composante projetée sur la droite qui relie les centres des palets est traitée en choc frontal, l'autre composante correspond à un effleurement et ne change pas (pas de choc). C'est cette approche qui permet de faire les calculs déterministes de l'outil de simulation graphique.

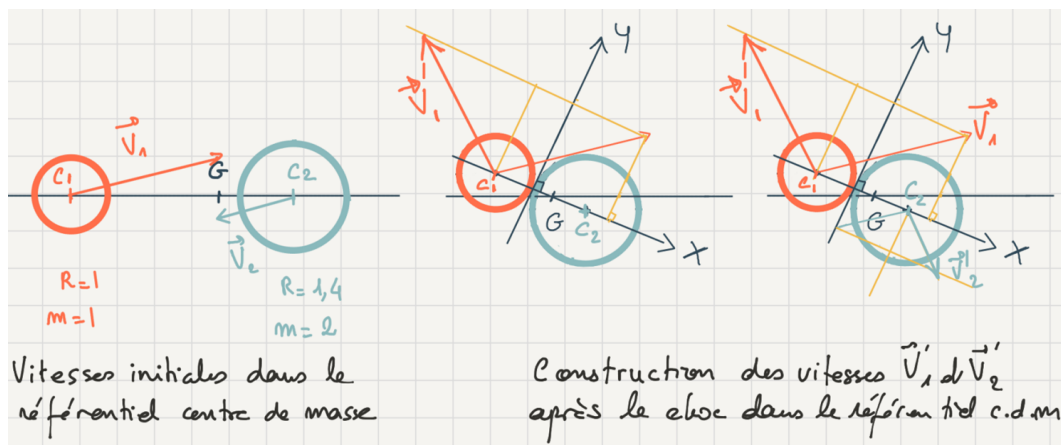


FIGURE 7.3 – Choc non-frontal

5 Choc mou

Pour un choc mou (parfaitement inélastique), les deux particules restent collées après le choc (ou elles étaient collées avant une explosion). La quantité de mouvement reste conservée mais pas l'énergie cinétique : une partie est dissipée sous forme de chaleur.

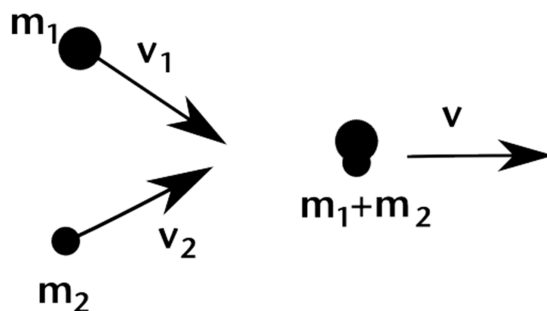


FIGURE 7.4 – Choc mou

Considérons le choc de deux particules de masses et vitesses différentes. La vitesse après le choc des deux particules collées sera notée $\vec{v}$. La quantité de mouvement étant conservée, on a :

$$\vec{P}_{tot} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \quad (7.22)$$

$$\vec{P}'_{tot} = (m_1 + m_2) \vec{v} \quad (7.23)$$

$$\vec{P}_{tot} = \vec{P}'_{tot} \quad (7.24)$$

On peut alors isoler $\vec{v}$ et déduire une expression pour la vitesse après le choc :

$$\vec{v} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (7.25)$$

On remarque que c'est aussi l'expression de la vitesse du centre de masse G : $\vec{v}_G$ reste inchangée lors du choc car $\sum \vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0}$.

Si l'on s'intéresse désormais à l'énergie cinétique, il n'y a pas conservation, mais on peut calculer la différence d'énergie avant et après le choc. En notant l'énergie avant et après le choc respectivement comme $E_{c,1}$ et $E_{c,2}$, on a :

$$E_{c,1} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad (7.26)$$

$$E_{c,2} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 \quad (7.27)$$

Il faut alors calculer v^2 en prenant le produit scalaire de $\vec{v}$ avec lui-même :

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{m_1^2v_1^2 + 2m_1m_2\vec{v}_1\vec{v}_2 + m_2^2v_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \quad (7.28)$$

Et on déduit alors en remplaçant et après simplification du carré :

$$E_{c,2} - E_{c,1} = -\frac{1}{2} \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 \quad (7.29)$$

Cette différence d'énergie cinétique est toujours négative ou nulle, indiquant que si le choc se produit (négative) il y a perte d'énergie par transformation, et s'il n'y a pas de perte (nulle) alors le choc ne se produit pas.

6 Système de masse variable : fusée

Nous allons désormais étudier un système de masse variable, à savoir dont la masse change au cours du temps. L'exemple choisi ici sera celui d'une fusée propulsée par la matière éjectée de ses tuyères. Dans ce cas, il faut revenir à l'origine de la deuxième Loi de Newton et non pas appliquer $\vec{F} = m\vec{a}$ car la masse n'est plus constante !

Repère : Axe z vertical pointant vers le haut.

Système : fusée à l'instant t (masse m, vitesse v)

- Fusée de masse initiale m_0 .
- Les gaz sont éjectés à vitesse constante par rapport à la fusée ($\vec{v}_e = \text{cst}$) et à un taux constant ($\frac{dm}{dt} = \text{cst}$)
- Après un temps (t + dt), la fusée a éjecté une masse $-dm$ (on prend $dm < 0$)

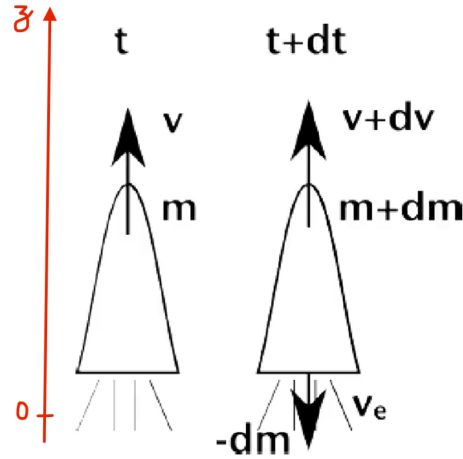


FIGURE 7.5 – Fusée à l'instant t et $t+dt$

La deuxième loi de Newton s'écrit comme suit :

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t)}{dt} \quad (7.30)$$

Il faut alors écrire la différence des quantités de mouvement entre t et $(t+dt)$:

$$\vec{p}(t) = m(t)\vec{v}(t) \quad (7.31)$$

$$\vec{p}(t+dt) = (m+dm)(\vec{v}+d\vec{v}) + (-dm)\vec{v}_{\text{gaz}} \quad (7.32)$$

$$\vec{v}_{\text{gaz}} = \vec{v}_e + \vec{v} + d\vec{v} \quad (7.33)$$

On obtient alors :

$$\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = md\vec{v} - dm\vec{v}_e \quad (7.34)$$

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \frac{\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t)}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_e \frac{dm}{dt} \quad (7.35)$$

Prenons le cas où **la fusée monte verticalement et est assez loin de toute masse dans le vide intersidéral** ($\vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0}$). En projetant l'équation (7.35) sur l'axe vertical z , et prenant en compte que $\vec{v}_e = -v_e \vec{e}_z$ (pointe vers le bas), on peut isoler la dérivée de la vitesse et intégrer de sorte à obtenir :

$$\frac{dv}{dt} = -v_e \frac{dm}{m} \quad (7.36)$$

$$v(t) - v(0) = -v_e \ln \frac{m}{m_0} \quad (7.37)$$

Si on suppose que la vitesse initiale est nulle, on obtient finalement une expression pour la vitesse de la fusée en fonction du temps et de la masse au temps t :

$$v(t) = v_e \ln \frac{m_0}{m(t)} \quad (7.38)$$

On observe alors que $v(t)$ est grand si v_e ou si $\frac{m_0}{m(t)}$ le sont.

Pareillement, pour le cas où **la fusée monte verticalement et est soumise au champ de pesanteur** ($\vec{F}^{\text{ext}} = m\vec{g}$), on peut raisonner de la même manière : projeter l'équation (7.35) sur l'axe z , isoler la dérivée de la vitesse et intégrer par rapport au temps. On obtient alors respectivement les équations suivantes :

$$\frac{dv}{dt} = -v_e \frac{\frac{dm}{dt}}{m} - g \quad (7.39)$$

$$v(t) = v_e \ln \frac{m_0}{m(t)} - gt \quad (7.40)$$

Chapitre 8

Oscillateur harmonique

1 Oscillations libres non amorties

Étudions un système modèle : Une masse m glisse sans frottements sur un axe horizontal. Elle est retenue par un ressort de raideur k et de longueur au repos l_0 fixé à son autre extrémité. On tire la masse vers la droite et à $t = 0$ on la lâche sans vitesse initiale.

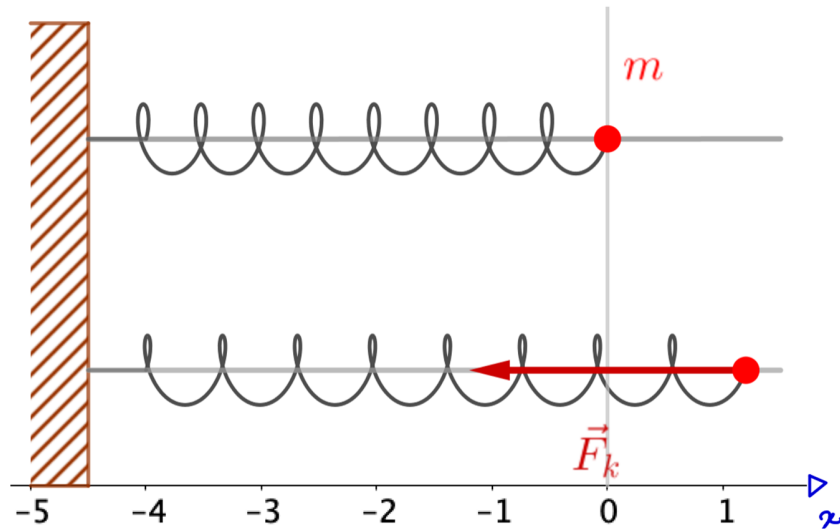


FIGURE 8.1 – Oscillateur libre non amorti

Appliquons la deuxième Loi de Newton à la masse m :

- Selon la direction verticale y , le poids $m\vec{g}$ et la réaction du rail $\vec{R}$ se compensent ($\vec{R} = -m\vec{g}$), il n'y a pas d'accélération.
- Selon la direction horizontale x , la force de rappel du ressort $\vec{F}_k = -kx\vec{e}_x$ cause l'accélération.

En projetant selon l'axe x , on obtient l'équation de mouvement $m\vec{a} = \vec{F}_k$ ou $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x$, et donc :

$$m\ddot{x} = -kx \quad (8.1)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (8.2)$$

L'équation (8.2) est obtenue en divisant par m et mettant les termes du même côté. On fait ainsi apparaître le terme $\frac{k}{m}$, et on peut alors définir Ω_0 la **pulsation propre** du système telle que :

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (8.3)$$

Et ainsi l'équation (8.2) se réécrit comme :

$$\ddot{x}(t) + \Omega_0^2 x(t) = 0 \quad (8.4)$$

L'équation de mouvement (8.4) lie linéairement la fonction $x(t)$ à sa dérivée seconde, c'est donc une **Equation Différentielle Linéaire d'ordre 2**.

La solution de cette équation est harmonique (en somme de sinus et cosinus), et peut s'écrire de différentes façons équivalentes :

$$x(t) = A * \cos(\Omega_0 t) + B * \sin(\Omega_0 t) \quad (8.5)$$

$$x(t) = C * \cos(\Omega_0 t + \phi) \quad (8.6)$$

$$x(t) = D * \sin(\Omega_0 t + \psi) \quad (8.7)$$

Il est possible de retrouver l'expression (8.5) en développant (8.6) ou (8.7) grâce aux formules trigonométriques (respectivement $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$, en nommant les termes qui ne dépendent pas du temps A et B), c'est donc l'expression qu'on va utiliser ici.

Pour trouver les constantes A et B en fonction des données du problème, nous utilisons les **conditions initiales** sur la position et la vitesse de la masse à $t=0$. On a une vitesse nulle au départ ($\dot{x}(t=0) = 0$) et une distance initiale non-nulle ($x(t=0) = x_0$), alors :

$$x(0) = A * \cos(\Omega_0 * 0) + B * \sin(\Omega_0 * 0) = A = x_0 \quad (8.8)$$

$$\dot{x}(0) = -A\Omega_0 \sin(\Omega_0 * 0) + B\Omega_0 \cos(\Omega_0 * 0) = B\Omega_0 = 0 \quad (8.9)$$

La pulsation propre étant non-nulle, on obtient $A = x_0$ et $B = 0$. La fonction $x(t)$ se résume alors à :

$$x(t) = x_0 \cos(\Omega_0 t) \quad (8.10)$$

On remarque que la position évolue donc de forme oscillatoire avec le temps.

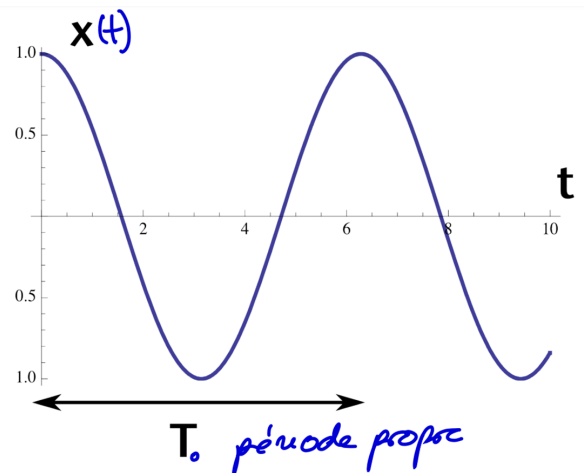


FIGURE 8.2 – Position en fonction du temps

Le mouvement est donc périodique, et on peut alors définir la **Période Propre** du système T_0 comme :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (8.11)$$

On remarque qu'elle ne dépend que de la masse et de la raideur du ressort, elle est donc indépendante de la position initiale. Lorsque T_0 est indépendante de x_0 , on appelle le système un **Oscillateur Harmonique**.

Exemple : le Pendule Simple

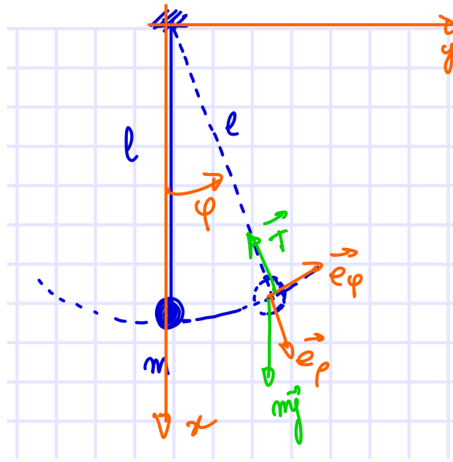


FIGURE 8.3 – Pendule simple

Il est judicieux de prendre ici un système de coordonnées polaires, et donc de projeter les forces en présence (le poids de la masse et la tension de la corde) et l'accélération comme suit :

$$m\vec{g} = mg(\cos(\phi)\vec{e}_\rho - \sin(\phi)\vec{e}_\phi) \quad (8.12)$$

$$\vec{T} = -T\vec{e}_\rho \quad (8.13)$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\vec{e}_\phi \quad (8.14)$$

Cependant, la longueur du fil étant constante on a $\rho = l$ et donc $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$. Donc en appliquant la Seconde Loi de Newton et en projetant selon $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\phi$, on obtient le système d'équations suivant :

$$\text{sur } \vec{e}_\rho : -m\dot{\phi}^2 = -T + mg\cos(\phi) \quad (8.15)$$

$$\text{sur } \vec{e}_\phi : m\ddot{\phi} = -mg\sin(\phi) \quad (8.16)$$

L'équation qui nous intéresse est (8.16) car la position de la masse par rapport au temps est donnée par les coordonnées $(\rho; \phi)$ ou $\rho = l$ est constant. Donc elle est déterminée entièrement par la fonction $\phi(t)$. En simplifiant, l'équation devient :

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l} \sin(\phi) = 0 \quad (8.17)$$

L'équation (8.17) est une équation différentielle non-linéaire, et donc ne correspond pas à un Oscillateur Harmonique.

Cependant, il est possible pour un cas particulier de rendre cette équation linéaire : en utilisant **l'approximation des petits angles**, on sait que si $\phi \ll 1$ (petit), on a que $\sin(\phi) \simeq \phi$. Dans ce cas précis, l'équation (8.17) peut être réécrite comme :

$$\ddot{\phi} + \Omega_0^2 \phi = 0 \quad (8.18)$$

Ou l'on définit la pulsation propre de ce système comme $\Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. La période propre $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}$ est donc bien indépendante de la condition initiale ϕ_0 : c'est un Oscillateur Harmonique.

L'équation (8.18) ayant la même forme que l'équation (8.4), la solution est de la même forme également. On a alors (pour des conditions initiales $\phi(0) = \phi_0$ et $\dot{\phi}(0) = 0$) la solution suivante :

$$\phi(t) = \phi_0 \cos(\Omega_0 t) \quad (8.19)$$

Attention : Ce résultat n'est valable que dans l'approximation des petits angles !

2 Oscillateurs non amortis et énergie

Adoptons maintenant une démarche énergétique et étudions l'énergie cinétique, potentielle et mécanique du système. Pour le système basique de masse liée à un ressort non-amorti (Figure 8.1), l'énergie mécanique est la somme de l'énergie potentielle du ressort et de l'énergie cinétique due au mouvement de la masse :

$$E_m = E_p^k + E_m = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m v^2 \quad (8.20)$$

Or l'expression de $x(t)$ a été obtenue dans la section précédente, équation (8.10), et peut donc être remplacée dans l'équation (8.20). On obtient alors après simplification :

$$E_m = \frac{1}{2} k x_0^2 = \text{constante} \quad (8.21)$$

Ce résultat fait sens car l'énergie mécanique est conservée car il n'y a pas de dissipation. Cependant l'énergie cinétique et potentielle elles ne le sont pas, il y a constamment une conversion de l'une à l'autre le long du mouvement.

Pour le cas à 1 dimension ($\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x$) ou la force dérive d'un potentiel, on peut alors écrire F (projetée sur x) telle que :

$$F = -\frac{dE_p}{dx} = m\ddot{x} \quad (8.22)$$

Et alors si l'énergie potentielle peut s'écrire comme une fonction de x , on peut obtenir l'équation différentielle de mouvement par une autre méthode.

Remarque : Pour avoir des oscillations, il faut être autour d'un minimum de E_p .

Pour que l'oscillateur soit harmonique, il faut et il suffit que l'énergie potentielle soit quadratique :

$$E_p = A(x - x_0)^2 + E_{p,0} \quad (8.23)$$

avec A constante et positive.

Démonstration : En remplaçant l'expression (8.23) dans (8.22), on obtient après dérivation :

$$m\ddot{x} = -2A(x - x_0) \quad (8.24)$$

On doit alors effectuer un changement de repère. On définit $X = x - x_0$, et ainsi on déduit $\dot{X} = \dot{x}$ et $\ddot{X} = \ddot{x}$. Ainsi, en passant tout du même côté, divisant par m et définissant $\Omega_0^2 = \frac{2A}{m}$ (seulement valable pour $A > 0$), on a :

$$\ddot{X} + \Omega_0^2 X = 0 \quad (8.25)$$

Qui est une équation d'Oscillateur Harmonique (CQFD).

Exemple : Pendule Simple - Approche énergétique

Reprenons l'étude du pendule simple de la Figure 8.3 par une approche énergétique. Prenons le repère suivant :

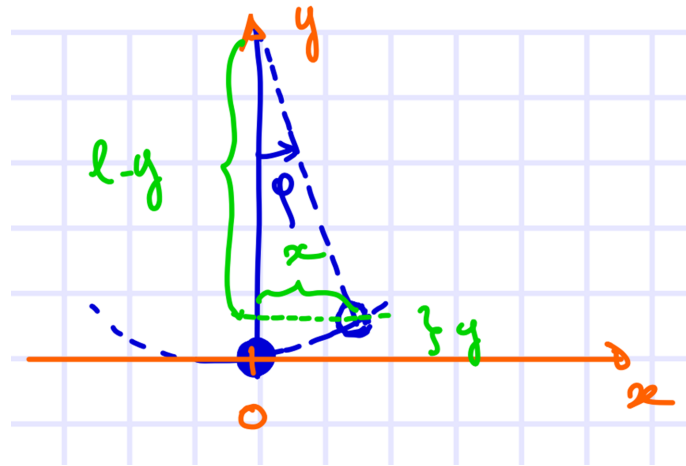


FIGURE 8.4 – Pendule simple : approche énergétique

La tension ne travaille pas, le poids dérive d'un potentiel ($E_p = mgy$). Il nous faut trouver une expression de y en fonction de x, pour cela on utilise le théorème de Pythagore et on déduit pour $E_p(x)$:

$$l^2 = (l - y)^2 + x^2 \quad (8.26)$$

$$y = l - \sqrt{l^2 - x^2} \quad (8.27)$$

$$E_p(x) = mg[l - \sqrt{l^2 - x^2}] = mgl \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{l}\right)^2} \right] \quad (8.28)$$

L'expression (8.28) n'est visiblement pas une parabole de la forme (8.23), l'oscillateur est donc anharmonique (comme dans l'étude par les forces!).

Si on regarde maintenant le cas des petites oscillations, cela revient à supposer $\frac{x}{l} \ll 1$. En définissant $\epsilon = (\frac{x}{l})^2$, on a :

$$E_p(x) = mgl(1 - (1 - \epsilon)^{1/2}) \quad (8.29)$$

On a $\epsilon \ll 1$, et donc nous prenons le développement limité de $(1 - \epsilon)^{1/2} \simeq 1 - \frac{1}{2}\epsilon$, et alors l'énergie potentielle pour des petites oscillations devient :

$$E_p(x) = mgl\frac{1}{2}\epsilon = \frac{mg}{2l}x^2 \quad (8.30)$$

On a donc une énergie potentielle de la forme (8.23), l'oscillateur est donc harmonique pour des petites oscillations (comme dans l'étude par les forces!).

3 Oscillations amorties

On considère l'oscillateur de la section 8.1 mais cette fois il subit un frottement visqueux en régime laminaire.

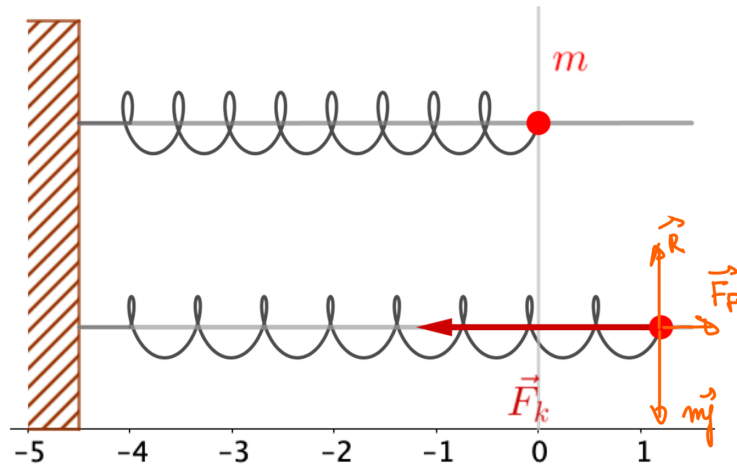


FIGURE 8.5 – Oscillateur amorti

La force de frottement s'écrit :

$$\vec{F}_f = -b_l \vec{v} = -b_l \dot{x} \hat{e}_x = -(K\eta) \dot{x} \hat{e}_x \quad (8.31)$$

Cette force est dans le sens opposé au mouvement en tout temps, ce qui explique le signe moins devant le vecteur vitesse. On remarque que le type d'amortissement dépendra de la magnitude du coefficient de frottement.

En utilisant la Seconde Loi de Newton selon x (selon y le poids et la réaction se compensent), on obtient :

$$m\ddot{x} = -b_l\dot{x} - kx \quad (8.32)$$

$$\ddot{x} + \frac{b_l}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (8.33)$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = 0 \quad (8.34)$$

Où l'on a défini $2\gamma = \frac{b_l}{m} = \frac{K\eta}{m}$ et $\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2, mais qui n'est pas soluble de la même façon que le cas non-amorti à cause du terme en dérivée première de x .

3.1 Méthode générale de résolution d'une telle équation

La première étape consiste à résoudre l'équation homogène, qui est une équation du 2nd degré formée à partir de (8.34), de la forme :

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \Omega_0^2 = 0 \quad (8.35)$$

On obtient cette équation en remplaçant les termes en x par des termes en λ ou l'ordre de dérivation est remplacé par la puissance de λ : un x dérivé deux fois par rapport au temps (ordre 2) devient alors un λ carré, et ainsi de suite, en gardant les mêmes coefficients constants devant les variables.

Pour résoudre l'équation (8.35), on utilise le discriminant $\Delta = (2\gamma)^2 - 4 * \Omega_0^2$, et on peut même utiliser le discriminant réduit $\Delta' = \frac{(2\gamma)^2}{4} - \Omega_0^2$ (2γ a été défini avec ce facteur pour cette raison particulière de simplification). Les 3 cas vont alors dépendre du résultat de l'expression $\Delta' = \gamma^2 - \Omega_0^2$.

Cas 1 : Amortissement critique ($\Delta' = 0$, $\gamma = \Omega_0$)

L'équation (8.35) a une racine double $\lambda = \gamma = \Omega_0$. La solution de (8.34) est alors :

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t} \quad (8.36)$$

Cas 2 : Amortissement fort ($\Delta' > 0$, $\gamma^2 > \Omega_0^2$)

L'équation (8.35) a deux racines distinctes données par :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \Omega_0^2}}{1} \quad (8.37)$$

La solution de (8.34) est alors :

$$x(t) = Ae^{-\lambda_1 t} + Be^{-\lambda_2 t} \quad (8.38)$$

Les deux λ étant négatifs, $x(t)$ est une somme de deux exponentielles décroissantes.

Cas 3 : Régime sous-critique ($\Delta' < 0$, $\gamma^2 < \Omega_0^2$)

Δ' est alors complexe! Définissons $\omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2}$, ainsi on peut écrire $\Delta' = \pm i\omega$. La solution de l'équation (8.35) est dans ce cas $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega$.

La solution de (8.34) est alors :

$$x(t) = Ae^{(-\gamma+i\omega)t} + Be^{(-\gamma-i\omega)t} = e^{-\gamma t} * (Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}) \quad (8.39)$$

Rappelons nous que $x(t)$ est réel, mais A , B et les exponentielles en i sont des nombres complexes! Il faut alors séparer parties réelles et imaginaires, et donc écrire :

$$A = a_1 + ia_2 \quad (8.40)$$

$$B = b_1 + ib_2 \quad (8.41)$$

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t \quad (8.42)$$

$$e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t \quad (8.43)$$

Désormais il ne reste qu'à remplacer les expressions ci-dessus dans (8.39), et ne garder que la partie réelle car $x(t)$ est un déplacement, et donc un nombre réel. Après développement et isolement de la partie réelle (la partie imaginaire doit être imposée $=0$), on obtient :

$$x(t) = e^{-\gamma t} * (A' \cos \omega t + B' \sin \omega t) \quad (8.44)$$

Il est aussi possible d'écrire la solution dans la forme suivante :

$$x(t) = C' e^{-\gamma t} * \cos(\omega t + \phi) \quad (8.45)$$

Ou $A' = a_1 + b_1$, $B' = a_2 + b_2$, et C' et ϕ sont des constantes d'intégration données par les conditions initiales

3.2 Analyse des résultats

Lorsqu'on est dans le Cas 3 ou $\gamma < \Omega_0$, la fonction $x(t)$, solution de (8.44) représentée graphiquement est :

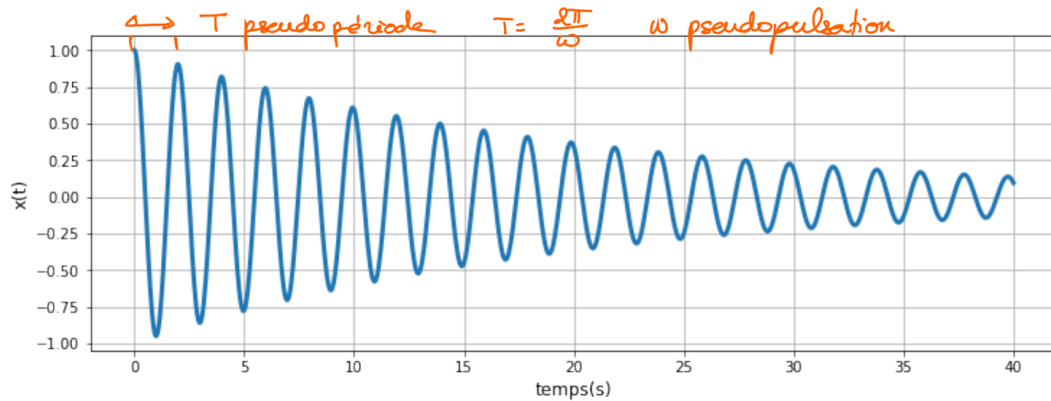


FIGURE 8.6 – Réponse $x(t)$ en régime sous-critique

Grâce à la **pseudopulsation** ω définie dans la section précédente comme $\omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2}$, on peut également définir l'intervalle de temps entre deux pics comme la **pseudopériode**

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Dans le Cas 2 ou $\gamma > \Omega_0$, la solution (8.38) représentée graphiquement est :

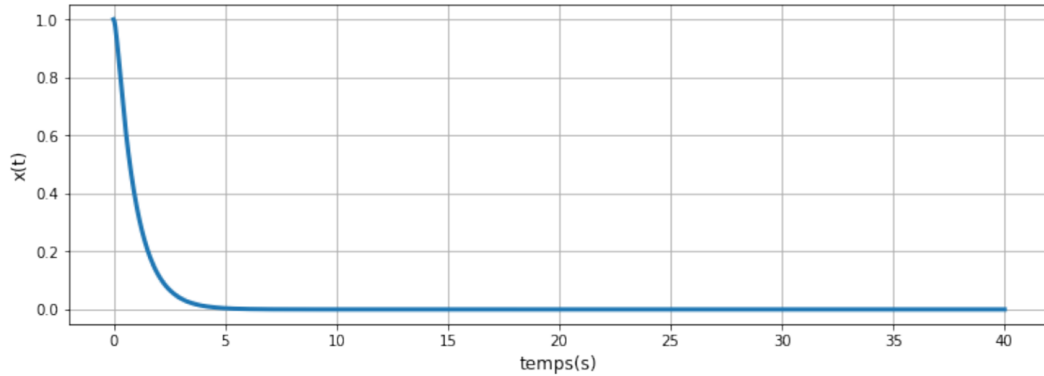


FIGURE 8.7 – Réponse en régime sur-critique

L'amortissement se fait sans oscillations et est plus ou moins rapide selon les valeurs de λ .

Finalement pour le Cas 1 ou $\gamma = \Omega_0$, la solution (8.36) représentée graphiquement est :

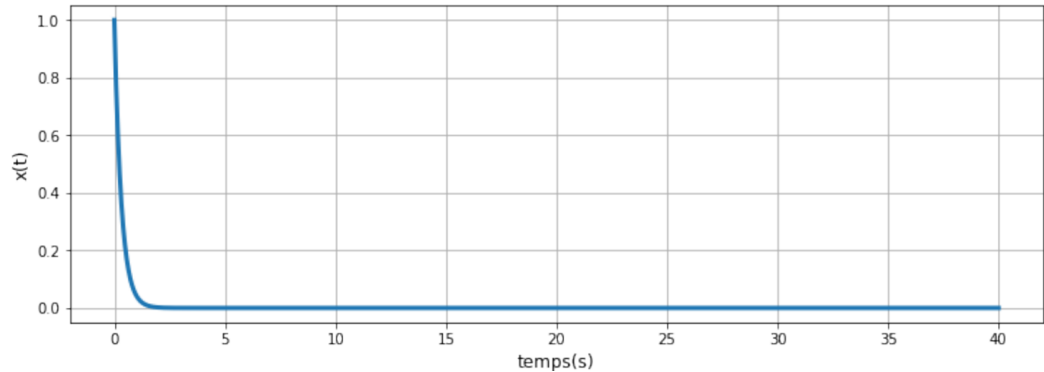


FIGURE 8.8 – Réponse en régime critique

Le retour vers l'équilibre se fait le plus rapidement possible

4 Oscillations forcées

Reprenons le même oscillateur que précédemment, mais on applique désormais au système une force qui a une forme sinusoïdale :

$$\vec{F}_e = F_e \vec{e}_x = F_0 \cos(\omega_e t) \vec{e}_x \quad (8.46)$$

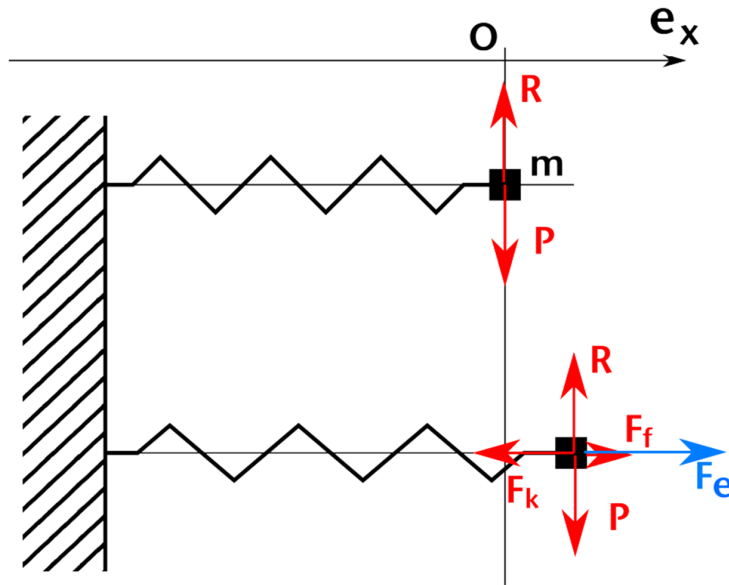


FIGURE 8.9 – Oscillateur excité par une force périodique

En appliquant la Seconde Loi de Newton au système, on a les mêmes forces qu'auparavant avec en plus la force d'excitation. On peut alors raisonner pareillement que pour le cas amorti non-forcé, et à partir de l'équation (8.34) obtenir :

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega_e t) \quad (8.47)$$

ou $f_0 = \frac{F_0}{m}$.

C'est une **équation différentielle linéaire d'ordre 2 avec second membre**. Ce second membre est une fonction du temps.

4.1 Méthode de résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 avec second membre

La méthode est de chercher :

- 1) $x_2(t)$, LA solution **générale** de l'équation **sans** second membre (donc avec les constantes d'intégration) : c'est la solution pour $f(t) = 0$, trouvée grâce à la procédure de la section (3.1)
- 2) $x_1(t)$, UNE solution **particulière** de l'équation **avec** second membre (donc une fonction qui "marche").

LA solution **générale** de l'équation **avec** second membre est :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad (8.48)$$

L'analyse des résultats de la section (3.2) nous indique que la solution générale tend vers 0 lorsque t tends vers l'infini. On a donc dans cette limite qu'on appellera **régime permanent** $x_2(t) \rightarrow 0$. Dans ce cas, on en déduit que (8.47) devient, en régime permanent,

$$x(t) \simeq x_1(t).$$

En observant par l'expérience le déplacement $x(t)$, nous pouvons faire des hypothèses sur la forme de $x_1(t)$, et supposer qu'elle sera de forme :

$$x_1(t) = A(\omega_e) * \cos(\omega_e t + \phi(\omega_e)) \quad (8.49)$$

Nous voulons exprimer A et ϕ en tant que fonctions de ω_e et des données de notre système, nous devons alors résoudre l'équation (8.46) en prenant une solution particulière de la forme (8.48). Il sera ici judicieux de passer dans le domaine complexe et d'adopter la notation d'Euler, c'est à dire :

$$\underline{a} = ae^{i\theta} = a(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (8.50)$$

Etudions l'équation différentielle complexe suivante :

$$\ddot{\underline{x}} + 2\gamma\dot{\underline{x}} + \Omega_0^2 \underline{x} = f_0 e^{i\omega_e t} \quad (8.51)$$

En prenant la partie réelle des membres de gauche et droite respectivement, on se retrouve avec l'équation (8.46) que l'on souhaite étudier. En complexes nous avons donc une solution de la forme :

$$\underline{x}_1(t) = A(\omega_e) e^{i(\omega_e t + \phi)} = A(\omega_e) e^{i\omega_e t} e^{i\phi} = \chi_0 e^{i\omega_e t} \quad (8.52)$$

On définit $\chi_0 = A(\omega_e) e^{i\phi(\omega_e)}$ qui ne dépend pas du temps. C'est un nombre complexe qui a pour module $A(\omega_e)$ et pour argument $\phi(\omega_e)$.

Avec cette notation, les dérivations temporelles de x seront simplifiées :

$$\dot{\underline{x}} = \chi_0 (i\omega_e) e^{i\omega_e t} \quad (8.53)$$

$$\ddot{\underline{x}} = -\chi_0 \omega_e^2 e^{i\omega_e t} \quad (8.54)$$

On insère les expressions (8.51), (8.52) et (8.53) dans l'équation (8.50). On peut alors simplifier des deux cotés le terme $e^{i\omega_e t}$, et on se retrouve avec :

$$-\chi_0 \omega_e^2 + 2i\gamma\chi_0 \omega_e + \chi_0 \Omega_0^2 = f_0 \quad (8.55)$$

Il est alors facile de factoriser χ_0 et de l'isoler pour trouver son expression :

$$\chi_0 = \frac{f_0}{-(\omega_e^2 - \Omega_0^2) + 2i\gamma\omega_e} = A(\omega_e) e^{i\phi(\omega_e)} \quad (8.56)$$

Maintenant il est possible de lier A et ϕ aux données du problème grâce à la relation ci-dessus. Il suffira de calculer le module et l'argument du membre de gauche de (8.55), et on obtient finalement :

$$A(\omega_e) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}} \quad (8.57)$$

$$\tan \phi = \frac{2\gamma\omega_e}{\omega_e^2 - \Omega_0^2} \quad (8.58)$$

ou $\phi \in [-\pi, 0[$

Remarque : Si la force d'excitation est sinusoidale et non pas cosinusoidale comme dans le cas étudié, A reste le même mais ϕ n'évolue plus dans le même intervalle (car le sinus est un cosinus déphasé).

4.2 Analyse des résultats

Etablissement du régime permanent

Nous nous intéressons à la réponse temporelle de l'oscillateur forcé :

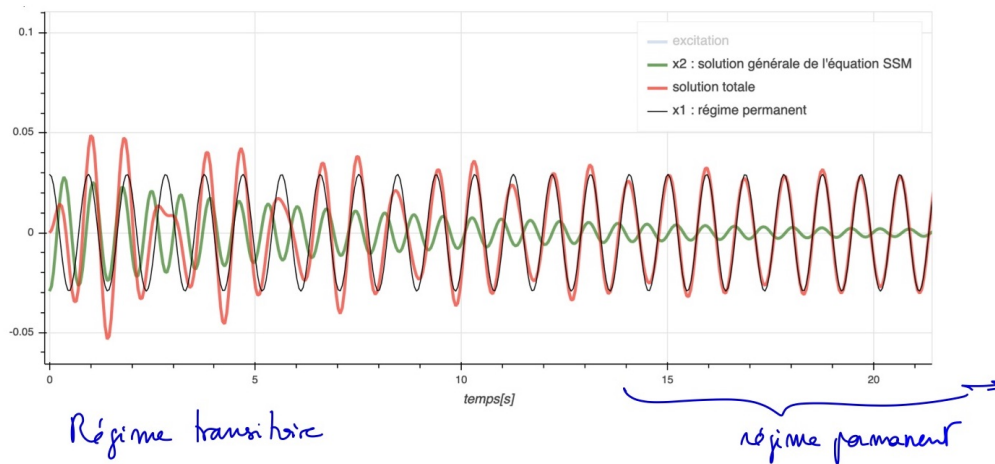


FIGURE 8.10 – Etablissement du régime Permanent

On observe deux domaines temporels bien distincts entre la mise en marche et la suite de la réponse. Au début, nous sommes dans le **Régime Transitoire**, dans lequel $x_2(t)$ (la solution générale de l'équation différentielle sans second membre) n'a pas encore convergé vers 0. Une fois que $x_2(t)$ devient suffisamment faible et converge vers 0, nous sommes dans le Régime Permanent. On peut alors observer graphiquement A comme l'amplitude des oscillations de la réponse totale $x(t)$, et le déphasage ϕ se lit entre les pics de la réponse totale et de la réponse $x_2(t)$.

Etude du régime permanent

En régime permanent, la réponse est $x(t) = x_1(t) = A(\omega_e) * \cos(\omega_e t + \phi(\omega_e))$. On sait que l'amplitude et le déphasage sont des fonctions de la fréquence d'excitation, regardons leurs évolutions respectives. Nous faisons également varier le coefficient de frottement et étudions les différents amortissements.

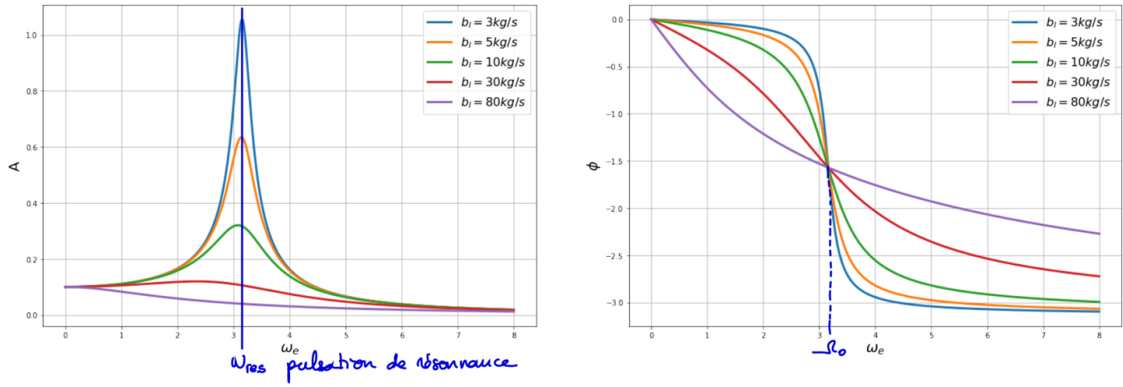


FIGURE 8.11 – Evolution de l'amplitude et du déphasage en fonction de la fréquence d'excitation

L'amplitude est toujours positive, commence à la même valeur initiale et tend vers 0 si la pulsation augmente quel que soit le coefficient de frottement b_l . Elle atteint un pic si b_l n'est pas trop grand, sinon le pic n'est jamais atteint et la fonction est décroissante. La pulsation pour laquelle A atteint son maximum est appelée **Pulsation de Résonance** et notée ω_{res} .

Le déphasage lui atteint $-\frac{\pi}{2}$ pour une pulsation d'excitation égale à Ω_0 la pulsation propre du système. On remarque que lorsque la résonance est marquée (faible amortissement), $\omega_{\text{res}} \simeq \Omega_0$.

Pour trouver ω_{res} par le calcul, il faut chercher le maximum de l'amplitude A. A partir de l'équation (8.56), définissons le contenu de la racine au dénominateur comme une fonction :

$$g(\omega_e) = (\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2 \quad (8.59)$$

Ainsi trouver les extremums de A revient à trouver les extremums de g, et le calcul est bien plus simple. En dérivant g par rapport à ω_e et l'égalant à 0, on trouve 2 solutions possibles :

$$\omega_e = 0 \quad (8.60)$$

$$\omega_e^2 = \Omega_0^2 - 2\gamma^2 \quad (8.61)$$

Le résultat (8.59) correspond au début des valeurs de A, et signifie une tangente horizontale. Le 2e extremum donné par (8.60) correspond à la pulsation pour laquelle A est maximale. C'est donc la pulsation de résonance :

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\Omega_0^2 - 2\gamma^2} \quad (8.62)$$

Cependant, ce résultat n'est possible que si $2\gamma^2 < \Omega_0^2$ pour que le contenu de la racine de l'expression (8.61) soit positif. Donc **il n'y a pas de résonance si $2\gamma^2 > \Omega_0^2$** !

On voit que remplacer l'expression (8.61) dans les résultats (8.56) et (8.57) nous donne bien mathématiquement la même chose que les observations faites à partir de la figure (8.11).

Résumé sur les Pulsations

- Ω_0 est la pulsation propre du système, soit la pulsation des oscillations si il n'y a ni amortissement ni forçage
- $\omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2}$ est la pseudo-pulsation du système avec amortissement, mais non forcé, quand l'amortissement est sous-critique
- ω_e est la pulsation d'excitation : une pulsation imposée par l'utilisateur dans le cas d'un oscilateur forcé
- $\omega_{\text{res}} = \sqrt{\Omega_0^2 - 2\gamma^2}$ est la pulsation de résonance : une valeur particulière de ω_e pour laquelle la réponse du système a une amplitude maximale en régime permanent

Rappel : Période = 2π / Pulsation et Fréquence = $1/\text{Période}$.

Facteur de Qualité

Afin d'obtenir une description universelle des courbes d'amplitude et déphasage, on définit le **Facteur de Qualité** (sans dimension) comme suit :

$$Q = \frac{\Omega_0}{2\gamma} \quad (8.63)$$

Grâce à cette expression, la condition pour obtenir une résonance devient $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Plus Q est grand plus l'amplitude maximale (en résonance) est grande.

On peut également exprimer A en fonction de Q :

$$A(\omega_e) = \frac{A(0)Q}{\sqrt{Q^2(\frac{\omega_e^2}{\Omega_0^2} - 1)^2 + \frac{\omega_e^2}{\Omega_0^2}}} = \frac{A(0)Q}{\sqrt{Q^2(\bar{\omega}_e^2 - 1)^2 + \bar{\omega}_e^2}} \quad (8.64)$$

ou $\bar{\omega}_e = \frac{\omega_e}{\Omega_0}$ est appelée Pulsation Réduite.

Lorsque l'on est en résonance, on a :

$$A(\omega_{\text{res}}) = A_{\text{max}} = \frac{A(0)Q^2}{\sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}}} \quad (8.65)$$

Particulièrement, si $Q \gg 1$, on a $A_{\text{max}} \simeq A(0)Q$ et donc $Q = \frac{A_{\text{max}}}{A(0)}$: Q donne directement une mesure de la "qualité" de la résonance.

Chapitre 9

Moment Cinétique ; Gravitation

Il est possible de décrire différemment les Lois de Newton pour faciliter l'étude des situations de rotation. Pour cela il faudra introduire de nouvelles grandeurs construites à partir de notions déjà connues : les moments.

1 Moment cinétique et moment d'une force

Le **moment cinétique** permet de caractériser la rotation autour d'un point O ; le **moment de la force** permet de caractériser la capacité d'une force à provoquer un mouvement de rotation.

Etudions la situation suivante : un point P de masse m , ayant une quantité de mouvement $\vec{p}$ et soumis à une force extérieure $\vec{F}$.

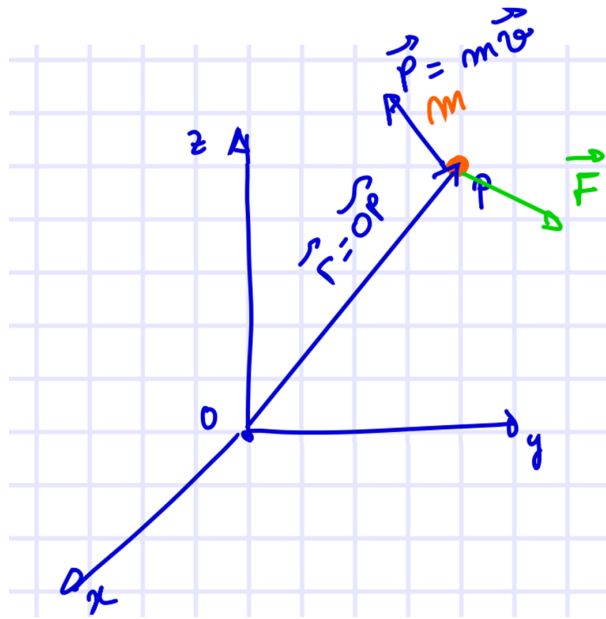


FIGURE 9.1 –

On peut alors définir le moment cinétique *par rapport au point O* comme :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{p} \quad (9.1)$$

Pareillement, on définit le Moment de la force $\vec{F}$ *par rapport au point O* comme :

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} \quad (9.2)$$

Attention : Les moments sont définis par rapport à un point de référence et donc dépendent de ce point ! On peut choisir n'importe quel point fixe de l'espace.

S'il y a plusieurs forces $\vec{F}_{\text{tot}} = \sum \vec{F}_i$, on a $\vec{M}_O = \sum \vec{M}_O^i = \sum_i \vec{OP} \wedge \vec{F}_i$

$\vec{L}$ dépend de la quantité de mouvement, $\vec{M}$ de la force, et grâce à la seconde loi de Newton on sait que $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$. On peut donc dériver l'équation (9.1) par rapport au temps pour la lier à (9.2) :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{OP} \wedge \vec{p}) = \vec{OP} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{M}_O \quad (9.3)$$

La relation ci-dessus est appelée **Théorème du Moment Cinétique**, et est une réécriture de la Seconde Loi de Newton.

Attention : Le point de référence doit être le même des deux cotés de l'équation.

Exemple 1 : Mouvement circulaire

Considérons le mouvement suivant : un objet de masse m se déplace sur un cercle de rayon R centré à l'origine O , avec une vitesse $\vec{v}$. Prenons des coordonnées cylindriques :

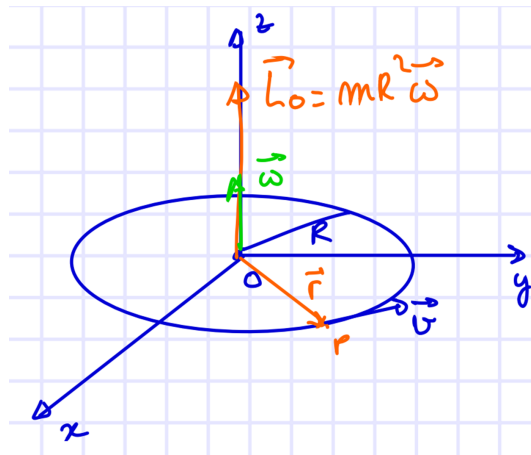


FIGURE 9.2 – Exemple de mouvement circulaire

Ici, $\rho = R = \text{constante}$, donc le terme en $\dot{\rho}$ de la vitesse est nul. Nous avons alors :

$$\vec{OP} = R\vec{e}_\rho \quad (9.4)$$

$$\vec{v} = R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \quad (9.5)$$

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{e}_z = \omega\vec{e}_z \quad (9.6)$$

Le moment cinétique par rapport à O est alors ici :

$$\vec{L}_O = \vec{OP} \wedge \vec{p} = (R\vec{e}_\rho) \wedge (mR\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) = mR^2\dot{\varphi}\vec{e}_z = mR^2\vec{\omega} \quad (9.7)$$

Exemple 2 : Mouvement curviligne plan en coordonnées cylindriques

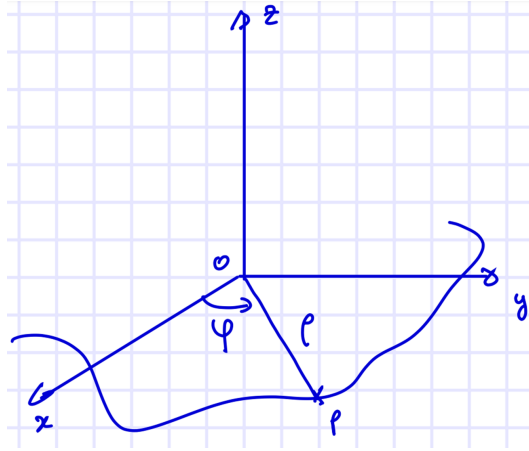


FIGURE 9.3 – Exemple de mouvement curviligne

Dans ce cas, ρ n'est plus constant et il est alors nécessaire de prendre le terme en $\dot{\rho}$ de la vitesse en considération :

$$\overrightarrow{OP} = \rho \vec{e}_\rho \quad (9.8)$$

$$\vec{v} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \quad (9.9)$$

Et le moment cinétique dans ce cas est :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{p} = (\rho \vec{e}_\rho) \wedge m(\dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi) = m\rho^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z = m\rho^2 \vec{\omega} \quad (9.10)$$

Le résultat est le même que l'exemple précédent car le produit vectoriel de $\vec{e}_\rho$ avec lui-même vaut $\vec{0}$.

2 Force Centrale

$\vec{F}$ est une **Force Centrale de centre O** si elle est toujours colinéaire à $\overrightarrow{OP}$ (deux exemples connus sont la force électrostatique et la force de gravitation).

Pour la force centrale $\vec{F}$ de centre O :

- Le moment de force par rapport à O est nul, car $\vec{F}$ et $\overrightarrow{OP}$ sont colinéaires.
- En appliquant le Théorème du Moment cinétique (eq. 9.3), $\vec{L}_O = \text{constante}$ car sa dérivée temporelle est nulle.

Une force centrale de centre O conserve le moment cinétique par rapport à O.

3 Gravitation

Rappel historique : Lois de Kepler

- 1) Les planètes tournent autour du Soleil en décrivant des ellipses dont cet astre occupe un des foyers.

- 2) Les aires des surfaces décrites par les rayons vecteurs sont proportionnelles aux temps employés à les balayer.
- 3) Les carrés des temps des révolutions des planètes autour du Soleil sont entre eux comme les cubes des grands axes de leurs orbites.

C'est en utilisant ces 3 Lois que Newton a dérivé l'expression de la Force de Gravitation. Cette force a pour expression, dans les cas généraux :

$$\vec{F}_G = -\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_r \quad (9.11)$$

ou la constante de gravitation est $G = 6.674 * 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$

Remarque : On peut relier la constante g à G en égalant la force de gravitation à la surface de la Terre au poids : $g = \frac{GM}{R_T^2}$, où R_T est le rayon terrestre.

Cas simple : mouvement circulaire

Analysons désormais le mouvement circulaire dans le plan sous l'effet d'une force de gravitation, montrons qu'il est uniforme, et calculons la vitesse en fonction du rayon de la trajectoire :

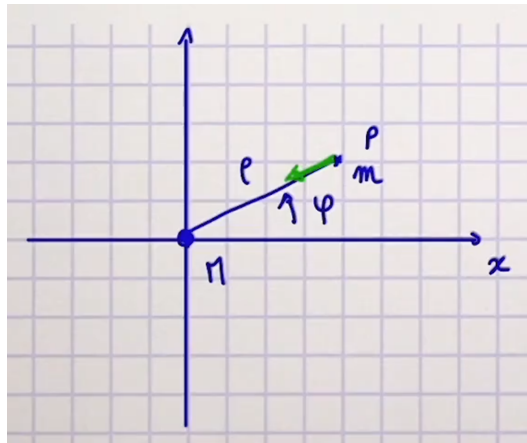


FIGURE 9.4 – Mouvement circulaire et gravitation

En prenant l'expression de l'accélération en coordonnées polaires et celle de la force de gravitation (9.11), la Seconde loi de Newton nous donne :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\left(-\frac{v^2}{\rho}\vec{e}_\rho + \frac{dv}{dt}\vec{e}_\varphi\right) = \vec{F}_G \quad (9.12)$$

En projetant sur $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\varphi$, les équations de mouvement sont :

$$\text{sur } \vec{e}_\rho : -\frac{mv^2}{R} = -\frac{GMm}{R^2} \quad (9.13)$$

$$\text{sur } \vec{e}_\varphi : m\frac{dv}{dt} = 0 \quad (9.14)$$

La masse étant non-nulle, l'équation sur $\vec{e}_\varphi$ nous indique que $v = \text{constante}$, ce qui prouve que le mouvement est uniforme. On trouve l'expression de la vitesse grâce à l'équation sur $\vec{e}_\rho$:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad (9.15)$$

La période est le temps nécessaire pour faire un tour de longueur $2\pi R$. Donc :

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \quad (9.16)$$

On retrouve la troisième Loi de Kepler dans cette expression.

Il est également possible de réexprimer la Masse du Soleil en fonction de la période :

$$M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} \quad (9.17)$$

Ainsi, on peut retrouver la masse de l'astre si on connaît le rayon de la trajectoire et la période.

4 Analyse énergétique de la Force Gravitationnelle

Energie Potentielle de Gravitation

Précédemment, nous avons vu que le poids dérive d'un potentiel. Or, le poids n'est qu'un cas particulier de la force gravitationnelle, on peut donc chercher l'énergie potentielle associée à $\vec{F}_G$. Nous souhaitons trouver une expression du travail entre A et B dû à la force gravitationnelle comme différence de l'énergie potentielle en A et en B.

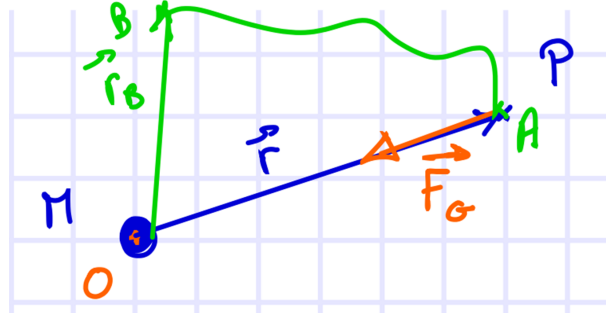


FIGURE 9.5 –

Nous nous plaçons en coordonnées sphériques étant donné la symétrie de la force, et reprenons donc l'équation 9.11.

On cherche à exprimer le travail fait de A à B par la force de gravitation :

$$W_{AB}^{\vec{F}_G} = \int_A^B \left(-\frac{GMm}{r^2}\right) \vec{e}_r \cdot d\vec{r} \quad (9.18)$$

On peut exprimer $d\vec{r}$ en fonction de la vitesse en coordonnées sphériques :

$$d\vec{r} = \vec{v}dt = (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi)dt \quad (9.19)$$

Et en réinjectant cette expression dans le travail, il ne restera que le terme sur $\vec{e}_r$:

$$W_{AB}^{\vec{F}_G} = \int_A^B \left(-\frac{GMm}{r^2}\right) \vec{e}_r \cdot (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi) dt = GMm \int_A^B \left(-\frac{1}{r^2}\right) \dot{r} dt \quad (9.20)$$

En intégrant :

$$W_{AB}^{\vec{F}_G} = GMm \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) = \left(-\frac{GMm}{r_A} \right) - \left(-\frac{GMm}{r_B} \right) \quad (9.21)$$

On reconnaît alors la différence cherchée, de l'énergie potentielle en A et en B, et on en déduit que :

$$E_P^G = -\frac{GMm}{r} \quad (9.22)$$

Vitesse de libération

La vitesse de libération est la vitesse qu'il faut communiquer à un objet pour qu'il échappe à l'attraction gravitationnelle de la terre. Calculons sa valeur grâce aux expressions trouvées précédemment.

Considérons qu'un objet initialement au point A à la surface de la Terre ($R_A = R_T$) est lancé avec vitesse $\vec{v}_0$, et à l'arrivée est à une distance infinie ($R_B = \infty$) au point B.

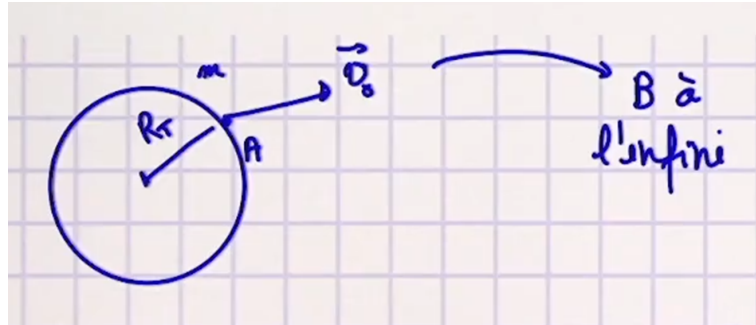


FIGURE 9.6 –

Puisque la seule force agissant sur l'objet est la force de gravitation qui est conservative, nous pouvons appliquer la Conservation de l'Energie Mécanique, qui implique :

$$E_{m,A} = E_{m,B} \quad (9.23)$$

$$E_{p,A} + E_{c,A} = E_{m,B} + E_{c,B} \quad (9.24)$$

On supposera que l'objet arrive tout juste à l'infini au point B, donc à une vitesse nulle, et donc une énergie cinétique nulle : $E_{c,B} = 0$. Nous utilisons l'équation (9.22) pour les termes potentiels et (6.11) pour le terme cinétique restant :

$$E_{c,A} = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (9.25)$$

$$E_{p,A} = -\frac{GMm}{R_T} \quad (9.26)$$

$$E_{p,B} = 0 \quad (9.27)$$

On peut alors injecter ces résultats dans l'équation (9.24) et déduire la vitesse de libération en l'isolant :

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}} \simeq 11\text{km/s} \quad (9.28)$$

Remarque : Pour échapper à l'attraction terrestre, la seule condition trouvée est sur la norme de la vitesse. Donc, il est possible de lancer l'objet dans n'importe quelle direction à cette vitesse, et ce sera suffisant pour que l'objet se libère.

Energie potentielle effective

Etudions la conservation de l'énergie mécanique dans le cas suivant : Un objet de masse m se déplace à vitesse $\vec{v}$ dans le plan autour d'un plus grand objet de masse M , et il est soumis à la force de gravitation. En prenant des coordonnées polaires nous avons :

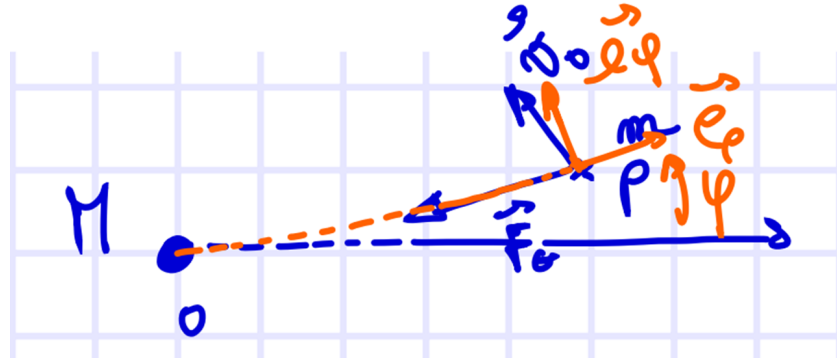


FIGURE 9.7 –

On peut exprimer cette conservation en fonction de la distance séparant les deux objets qu'on appelle r et qui, ici, n'est pas forcément constante. La conservation d'énergie mécanique s'écrit :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \text{cste} \quad (9.29)$$

Il faut alors exprimer v en fonction de r et ses dérivées. Le vecteur $\vec{v}$ s'écrit :

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \quad (9.30)$$

Le terme en $\vec{e}_z$ est nul car nous sommes dans un cas planaire. v^2 est la norme de $\vec{v}$ au carré. Pour avoir une relation entre $\dot{\varphi}$ et r , on utilise le résultat (9.10) étudié précédemment. Donc :

$$L_O^2 = |mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z| = m^2r^4\dot{\varphi}^2 = \text{cste} \quad (9.31)$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{L_O^2}{m^2r^4} \quad (9.32)$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2 \quad (9.33)$$

En injectant (9.32) et (9.33) dans (9.29), on obtient alors :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_O^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \quad (9.34)$$

Dans l'expression (9.34), le premier terme a les dimensions d'une énergie cinétique, alors que les deux autres d'une énergie potentielle. C'est ces deux termes mis ensemble, l'énergie potentielle gravitationnelle et le 2e terme de l'énergie cinétique, qu'on appelle **Energie potentielle effective**.

$$E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{L_O^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \quad (9.35)$$

Analysons son graphique :

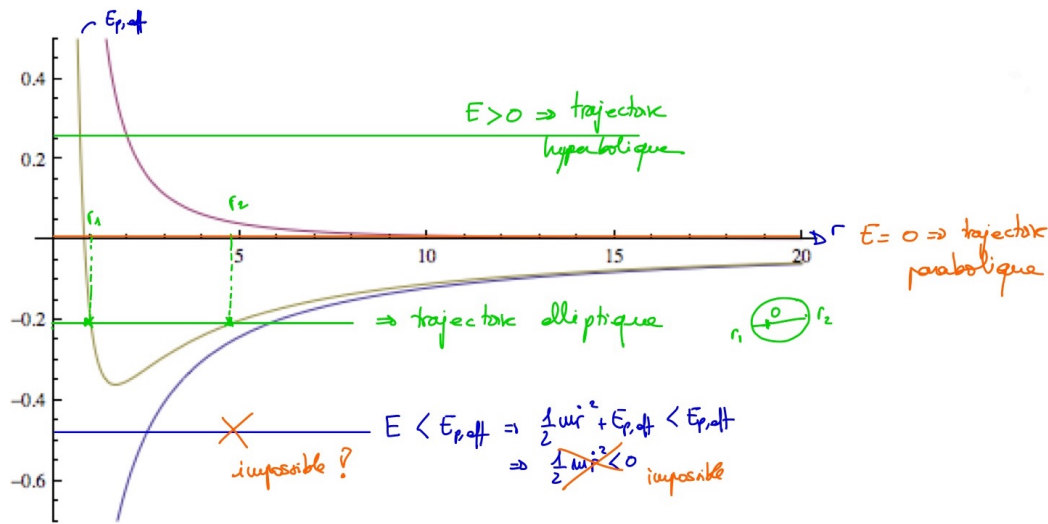


FIGURE 9.8 – Energie potentielle effective en fonction de la distance r

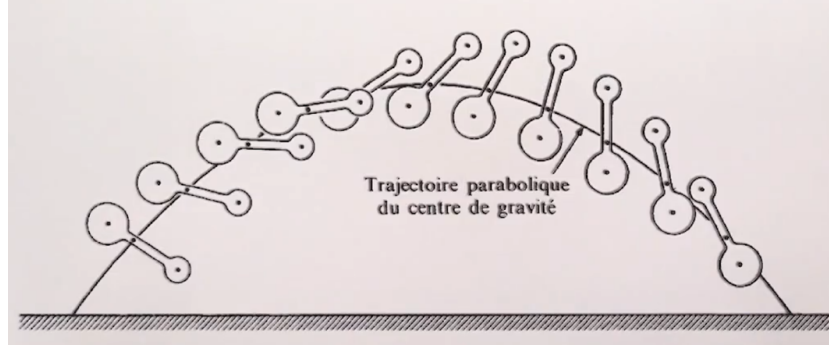
Il est possible de déduire du graphique la trajectoire du corps céleste de masse m autour de l'astre de masse M . Elle dépend de la valeur de l'énergie mécanique, qui étant constante est représentée par des droites horizontales sur le diagramme :

- Le cas $E_m < E_{p,\text{eff}}$ est impossible, car dans ce cas on aurait $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 < 0$
- Si $E_{p,\text{eff}} < E_m < 0$, il y a 2 points d'intersection dans le graphique. Cela correspond à une trajectoire elliptique, ou les abscisses des deux points d'intersection sont les longueurs des demi grands axes de l'ellipse (s'ils sont égaux la trajectoire est circulaire).
- Si $E_m = 0$, il y a un point d'intersection, correspondant à une distance minimale entre les deux corps mais pas de distance maximale. C'est une trajectoire parabolique.
- Si $E_m > 0$, la trajectoire obtenue est une hyperbole.

Chapitre 10

Dynamique du solide indéformable

Un solide indéformable peut avoir un mouvement de translation mais aussi de rotation !



1 Centre de Masse et Lois de Newton

1.1 Enoncé des Lois

La notion de centre de masse pour un ensemble de points matériels et les lois de Newton associées ont été vues précédemment :

$$\vec{OG} = \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}}{\sum_{\alpha} m_{\alpha}} = \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}}{M} \quad (10.1)$$

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = M \vec{a}_G \quad (10.2)$$

$$\vec{P}_{\text{tot}} = M \vec{v}_G \quad (10.3)$$

Elles peuvent être étendues au solide indéformable en passant d'une description discrète à une description continue :

$$\vec{OG} = \frac{\int_{\text{vol}} \vec{r} dm}{M} = \frac{\int_{\text{vol}} \vec{r} \rho(\vec{r}) dV}{M} = \frac{\int_x \int_y \int_z \vec{r}(x; y; z) \rho(x; y; z) dV}{M} \quad (10.4)$$

Et de même pour le moment cinétique et son théorème, qui pour un nuage de points s'écrit :

$$\vec{L}_O^{\text{tot}} = \sum_{\alpha} \vec{L}_O^{\alpha} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \quad (10.5)$$

$$\sum \vec{M}_O^{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}_O^{\text{tot}}}{dt} \quad (10.6)$$

Et peut être étendu au solide en écrivant :

$$\vec{L}_O^{\text{solide}} = \int_{\text{vol}} d\vec{L}_O = \int_{\text{vol}} \vec{r} \wedge dm \vec{v}(\vec{r}) \quad (10.7)$$

$$\sum \vec{M}_O^{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}_O^{\text{solide}}}{dt} \quad (10.8)$$

Important : Le poids s'appliquera toujours au centre de masse G.

Il est possible de déterminer le centre de masse d'un objet sans passer par la triple intégration dès lors qu'il possède un ou plusieurs axes de symétrie :

1. Si le solide possède **un** axe de symétrie, le centre de masse se trouve sur cet axe
2. Si l'objet possède **plusieurs** axes de symétrie, le centre de masse sera à l'intersection de ces axes

1.2 Solides spécifiques

Pour des objets à deux dimensions (disques, plaques), on peut écrire $M = \rho_S * S$ avec ρ_S la masse surfacique (en kg/m^2).

Pour des objets à une dimension (barre), on peut écrire $M = \rho_l * l$ avec ρ_l la masse linéique (en kg/m).

Il est également possible, par la géométrie de certains objets, d'avoir un centre de masse à l'extérieur de celui-ci, par exemple pour un anneau (ou un cylindre creux). Son centre de masse se trouve au centre géométrique de l'objet (où il n'y a pas de matière), à l'intersection de ses axes de symétrie.

1.3 Superposition de deux solides

Si deux solides sont superposés, on trouve le centre de masse de l'objet "total" grâce aux centres de masses et masses des deux objets spécifiques, traités comme des points matériels. On a ainsi :

$$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OG}_1 + m_2 \vec{OG}_2}{m_1 + m_2} \quad (10.9)$$

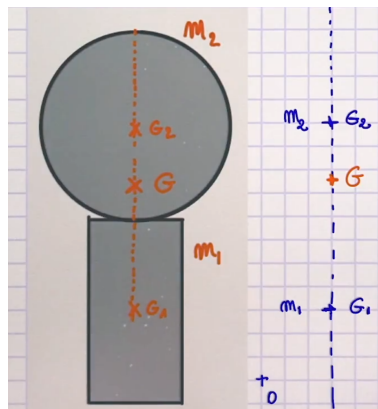


FIGURE 10.1 – Centre de masse d'une Superposition de deux solides

1.4 Solide à trou

Pour calculer le CDM d'un solide avec un trou, nous pouvons procéder en prenant deux objets superposés :

- Le bouchon de masse m_1 et CDM noté $\vec{OG}_1$, qui boucherait le trou

- L'objet d'intérêt troué, de masse M et de CDM noté $\vec{OG}$ recherché

En utilisant alors la formule pour le CDM de l'objet total superposé (objet de base non-troué, dit 2, avec une masse m_2 et CDM noté $\vec{OG}_2$), on a :

$$\vec{OG}_2 = \frac{M\vec{OG} + m_1\vec{OG}_1}{M + m_1} = \frac{M\vec{OG} + m_1\vec{OG}_1}{m_2} \quad (10.10)$$

On peut alors de cette expression déduire le CDM cherché en isolant $\vec{OG}$:

$$\vec{OG} = \frac{m_2\vec{OG}_2 - m_1\vec{OG}_1}{M} \quad (10.11)$$

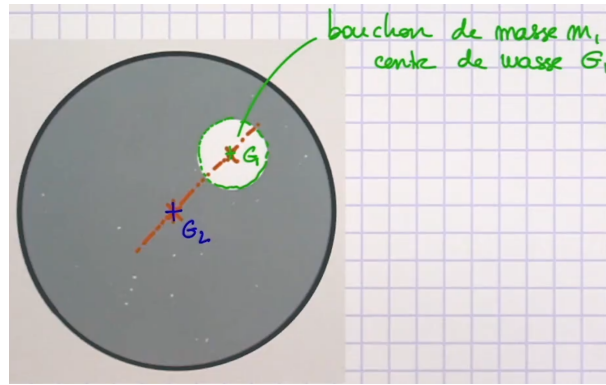


FIGURE 10.2 – Centre de masse d'un Objet Troué

On remarque que chercher le centre de masse d'un objet troué revient à superposer l'objet non-troué et un trou de "masse négative".

2 Statique

Nous supposons désormais un solide immobile, et nous cherchons les conditions pour qu'il le reste. Il faut alors respecter deux conditions (pas de translation et pas de rotation de l'objet) :

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0} \quad (10.12)$$

$$\vec{M}_0^{\text{ext}} = \vec{0} \quad (10.13)$$

Avec O point fixe du référentiel

Exemple : Poutre (non-homogène) sur 2 supports

Soit une poutre non-homogène (CDM pas centré) sur 2 supports A et B. On connaît la masse, la position du CDM, et on définit les distances aux supports $AG = x_1$ et $GB = x_2$. L'objectif est de déterminer les forces aux supports F_A et F_B .

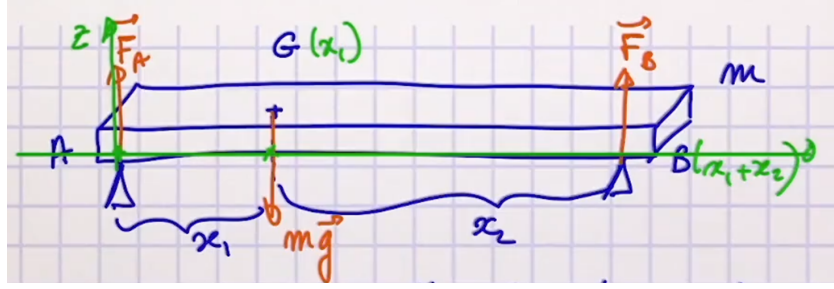


FIGURE 10.3 – Poutre non-homogène sur 2 supports

En appliquant les deux conditions citées plus haut, en prenant le point A pour la somme des moments (de sorte à utiliser les distances connues et n'avoir qu'une inconnue), le système est :

$$\sum F^{\text{ext}} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + m\vec{g} = (F_A + F_B - mg)\vec{e}_z = \vec{0} \quad (10.14)$$

$$\sum \vec{M}_A = \vec{AG} \wedge m\vec{g} + \vec{AB} \wedge \vec{F}_B = (mgx_1 - (x_1 + x_2)F_B)\vec{e}_y = \vec{0} \quad (10.15)$$

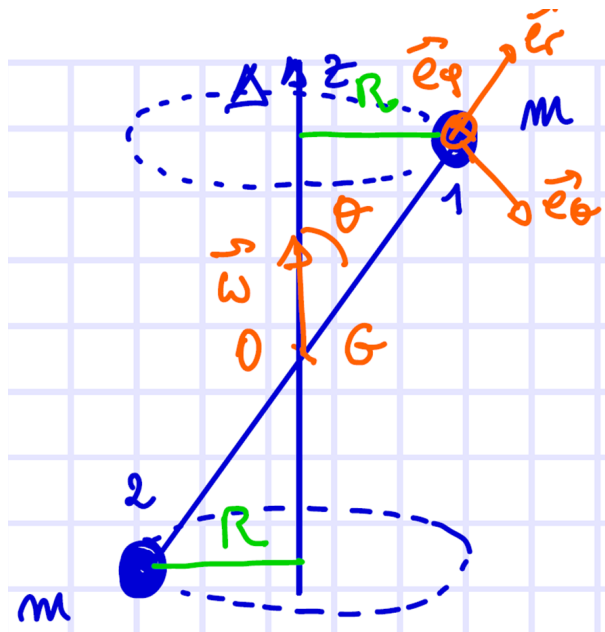
En projetant la somme des forces sur l'axe z (vertical) et la somme des moments sur l'axe y, on peut isoler les forces de réaction recherchées :

$$F_A = mg \frac{x_2}{x_1 + x_2} \quad (10.16)$$

$$F_B = mg \frac{x_1}{x_1 + x_2} \quad (10.17)$$

3 Energie (cinétique) de rotation

Considérons tout d'abord le système suivant : Une tige rigide relie deux masses m égales (son centre de masse est donc au milieu de la tige), et tourne autour d'un axe de rotation (Gz) à vitesse constante. Les masses décrivent alors respectivement des trajectoires circulaires uniformes.



En prenant des coordonnées sphériques, on définit :

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z \quad (10.18)$$

$$\overrightarrow{OP_1} = r \vec{e}_r \quad (10.19)$$

$$r = l/2 \quad (10.20)$$

$$R = r \sin \theta \quad (10.21)$$

On déduit également les expressions de vitesse et ainsi d'énergie cinétique (qui sont égales) pour les masses respectives, ainsi que pour le système entier :

$$\text{Vitesse d'une masse : } \vec{v} = R\omega \vec{e}_\varphi \quad (10.22)$$

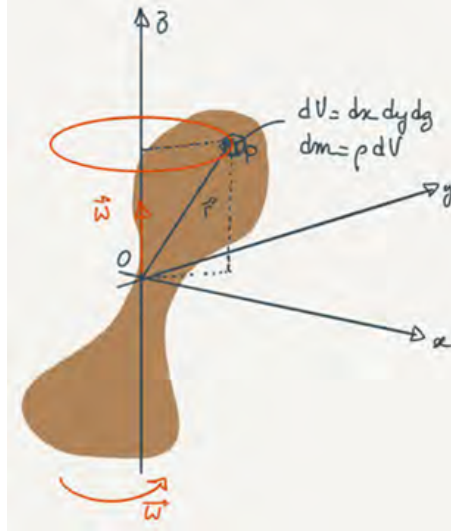
$$\text{Energie d'une masse : } E_{c,m} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 \quad (10.23)$$

$$\text{Energie du système masse : } E_{c,rot} = 2 * \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(2m)R^2\omega^2 \quad (10.24)$$

Il est notable que l'énergie cinétique totale se divise en deux parties :

1. une expression qui dépend simplement de la géométrie de l'objet : $\frac{1}{2}(2m)R^2$
2. une expression dépendant de la vitesse de rotation : ω^2

Généralisons désormais cela à un solide quelconque :



Un point quelconque P dans le solide se comporte comme la masse dans le cas précédent, son voisinage est un volume infinitésimal dV de masse dm . Cet élément dm a une énergie de rotation à partir de laquelle, en utilisant le cas précédent, on déduit l'énergie de rotation du solide :

$$\text{Masse centrée en P : } dm = \rho * dV \quad (10.25)$$

$$\text{Energie : } E_{c, dm} = \frac{1}{2} dm (R\omega)^2 = \frac{1}{2} \rho(\vec{r}) R^2 \omega^2 dV \quad (10.26)$$

$$\text{Energie du système : } E_{c, rot} = \int_{vol} \frac{1}{2} \rho(\vec{r}) R^2 \omega^2 dV = \frac{1}{2} \omega^2 \int_{vol} \rho(\vec{r}) R^2 dV \quad (10.27)$$

Introduisons la notion de **Moment d'inertie** du solide par rapport à l'axe Oz tel que :

$$I_z = \int_{vol} \rho(\vec{r}) R^2 dV \quad (10.28)$$

Qui nous permet de réécrire l'énergie (cinétique) de rotation telle que :

$$E_{c, rot} = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \quad (10.29)$$

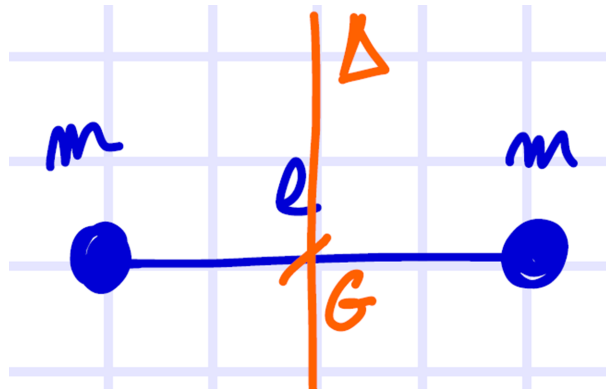
On remarque la structure de cette expression, qui rappelle celle de l'énergie cinétique en translation : I joue le rôle de la masse, alors que ω joue le rôle de la vitesse.

4 Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe

Au vu de l'expression du moment de l'inertie, cette grandeur dépend du solide et de l'axe.

4.1 Tige : Masses aux extrémités

La tige est sans masse, de longueur l , avec 2 masses m à chaque extrémité. En étudiant son moment d'inertie par rapport à l'axe perpendiculaire au centre de masse, au centre de la tige, on obtient :

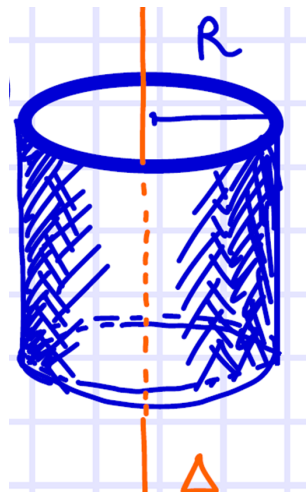


$$I_{\Delta} = m\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}ml^2 \quad (10.30)$$

4.2 Cylindre mince creux

Le cylindre creux a un rayon moyen R et une masse M . Son moment d'inertie par rapport à son axe de symétrie est :

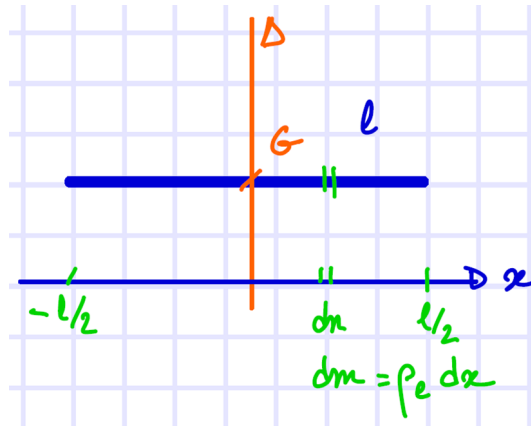
$$I_{\Delta} = MR^2 \quad (10.31)$$



4.3 Tige : Masse linéique

Etudions désormais une tige mince de masse M répartie sur sa longueur L . Sa masse linéique est définie comme $\rho_L = M/L$. Pour un moment d'inertie autour de l'axe Δ , on définit un axe x avec l'origine au centre de masse G , et on calcule alors :

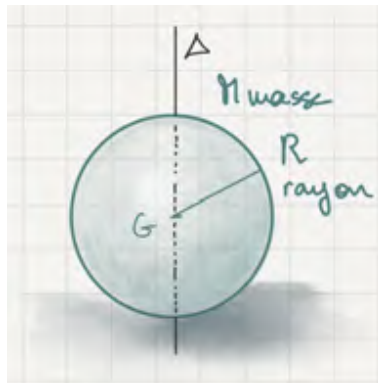
$$I_{\Delta} = \int_{-l/2}^{l/2} \rho_L * x^2 dx = \frac{1}{12}ML^2 \quad (10.32)$$



4.4 Solides usuels, pleins et homogènes

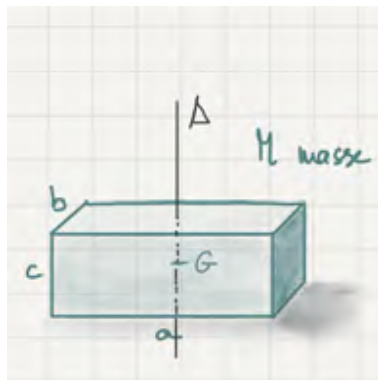
Sphère

$$I_{\Delta} = \frac{2}{5} M R_S^2 \quad (10.33)$$



Parallélépipède rectangle

$$I_{\Delta} = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2) \quad (10.34)$$



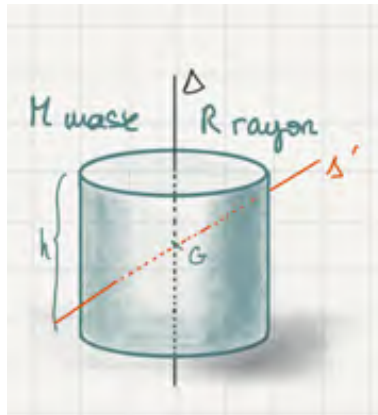
Remarque : Pour une plaque rectangulaire fine, l'expression ci dessus peut être ré-utilisée car pour cet axe, le moment ne dépend pas de c.

Cylindre

En fonction de l'axe choisi :

$$I_{\Delta} = \frac{1}{2}MR^2 \quad (10.35)$$

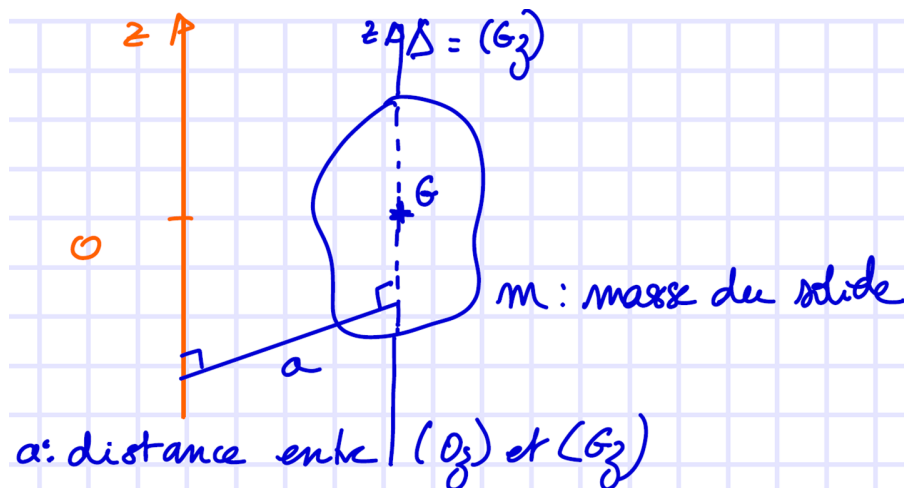
$$I_{\Delta'} = \frac{1}{4}M(R^2 + \frac{h^2}{3}) \quad (10.36)$$



4.5 Théorème de Steiner

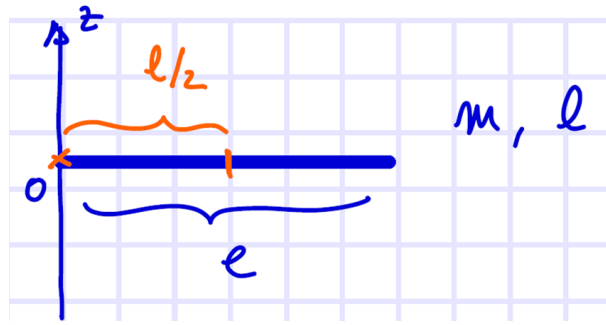
Soit deux axes parallèles (Oz) et (Gz) distants de a , avec G centre de masse. Si I_{Gz} est le moment d'inertie par rapport à (Gz) alors I_{Oz} le moment d'inertie par rapport à (Oz) est :

$$I_{Oz} = I_{Gz} + ma^2 \quad (10.37)$$



Exemple : Tige homogène tournant autour d'une extrémité

Le moment d'inertie d'une tige homogène (masse linéique répartie) autour d'un axe perpendiculaire à son centre de gravité est connu. En appliquant Steiner, nous pouvons déduire celui de la rotation autour d'une extrémité.



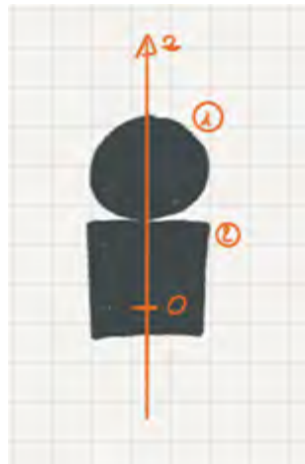
$$I_{Oz} = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 \quad (10.38)$$

$$I_{Oz} = ml^2\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}ml^2 \quad (10.39)$$

4.6 Solides composés et Solides à trous

Le moment d'inertie est calculé par intégration. L'intégrale étant additive, il est possible de calculer le moment d'inertie de solides composés en additionnant les moments d'inertie des solides qui les composent :

$$I_{Oz}^{\text{tot}} = I_{Oz}^{(1)} + I_{Oz}^{(2)} \quad (10.40)$$



Pareillement, un moment d'inertie de solide à trou s'obtient en soustrayant du solide non-troué le moment d'inertie du bouchon correspondant au trou :

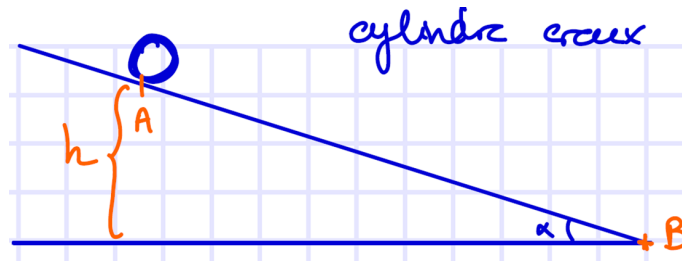
$$I_{Oz}^{\text{bouché}} = I_{Oz}^{\text{rel}} + I_{Oz}^{\text{bouchon}} \quad (10.41)$$

$$I_{Oz}^{\text{rel}} = I_{Oz}^{\text{bouché}} - I_{Oz}^{\text{bouchon}} \quad (10.42)$$



5 Application

Un cylindre creux de masse M et rayon R roule sans glisser sur un plan incliné. Il est lâché sans vitesse initiale au point A de hauteur h , et nous cherchons sa vitesse en B.



Il est soumis au poids, la réaction normale, et la force de frottements. Cependant seul le poids travaille car la vitesse au point d'application du frottement et de la réaction est nulle (roule sans glisser) : $W = W_P + W_R + W_f = W_P$. L'énergie mécanique du centre de masse G à un point donné s'écrit :

$$E_m(G) = E_p + E_{c,rot} + E_{c,t} = E_p + \frac{1}{2}I_G\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_G^2 \quad (10.43)$$

$$I_G = MR^2 \quad (10.44)$$

$$v_G = R\omega \Leftrightarrow \omega = \frac{v_G}{R} \quad (10.45)$$

Prenons comme référence pour l'énergie potentielle la base du plan incliné, de sorte à avoir $E_p(A) = Mgh$ et $E_p(B) = 0$. Par la conservation de l'énergie mécanique entre A et B (car le poids est une force conservative) :

$$E_m(A) = E_m(B) \Leftrightarrow Mgh = \frac{1}{2}I_G\omega_B^2 + \frac{1}{2}Mv_B^2 = \frac{1}{2}MR^2 * \frac{v_B^2}{R^2} + \frac{1}{2}Mv_B^2 \quad (10.46)$$

$$v_B = \sqrt{gh} \quad (10.47)$$

L'expression ressemble à celle obtenue pour un objet qui glisse sans rouler : $v_B = \sqrt{2gh}$. La vitesse ici est plus faible car pour une même énergie potentielle au départ, celle-ci est en partie utilisée pour faire tourner l'objet et lui communiquer une énergie de rotation.

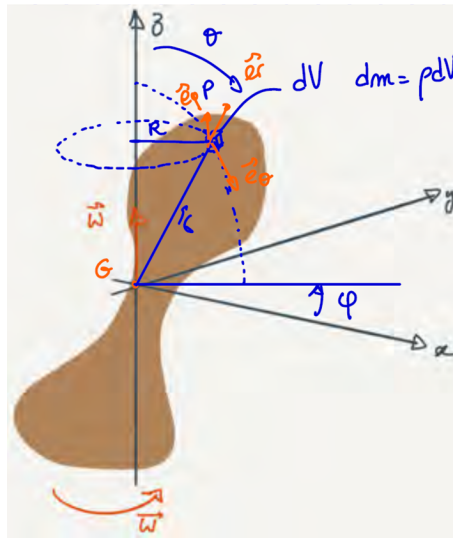
6 Moment Cinétique d'un Solide

Etudions désormais le moment cinétique d'un solide général et non plus du simple point matériel. La grandeur était définie par l'équation (9.1), et le théorème du moment cinétique par (9.3).

Cas Général : solide quelconque en rotation

Soit un solide en rotation autour d'un axe passant par G . On place l'axe (Gz) de manière que ce soit l'axe de rotation. Le but sera de calculer le moment cinétique de ce solide lié à la rotation.

Considérons un élément infinitésimal du solide centré sur le point P , de volume dV et de masse $dm = \rho dV$. Etudions le problème en coordonnées sphériques.



Le moment cinétique infinitésimal au voisinage du point P choisi s'écrit :

$$d\vec{L}_G = \vec{r} \wedge d\vec{p} = \vec{r} \wedge dm * \vec{v}(P) \quad (10.48)$$

$$\vec{v}(P) = R\omega\vec{e}_\varphi = r \sin \theta \vec{e}_\varphi \quad (10.49)$$

$$\rightarrow d\vec{L}_G = r\vec{e}_r \wedge dm * r \sin \theta \vec{e}_\varphi = r^2 dm \sin \theta (-\vec{e}_\theta) \quad (10.50)$$

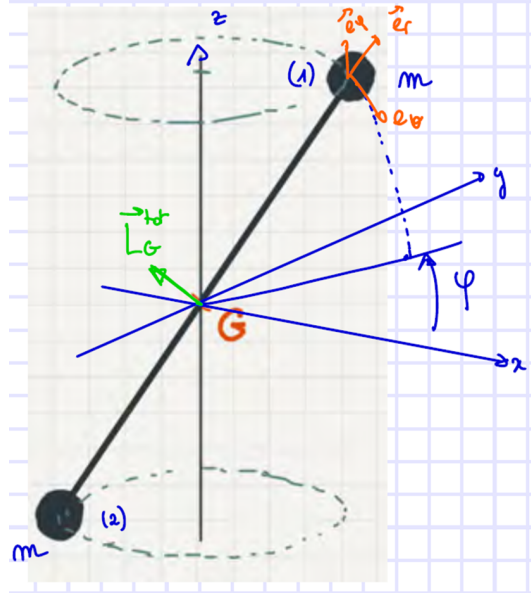
Pour le solide entier, on écrit alors :

$$\vec{L}_G = \int_{\text{vol}} r^2 dm \sin \theta (-\vec{e}_\theta) \quad (10.51)$$

Pour chaque point P du solide, le moment cinétique infinitésimal résultant aura une direction différente. Donc ce calcul est une intégration de plusieurs éléments de vecteurs avec des directions différentes, c'est un cas beaucoup trop complexe pour que l'on trouve intuitivement $\vec{L}_G$ dans le cas général

Cas Simple : haltère en rotation

Simplifions donc le problème par l'étude d'une haltère (tige mince avec sa masse concentrées aux 2 extrémités).



Le moment cinétique sera composé de la somme de celui de chaque masse. On peut écrire :

$$\vec{L}_G^{(1)} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = r\vec{e}_r \wedge m(r\omega \sin \theta \vec{e}_\varphi) = -mr^2\omega \sin \theta \vec{e}_\theta \quad (10.52)$$

$$\vec{L}_G^{(2)} = -\vec{r} \wedge m(-\vec{v}) = \vec{L}_G^{(1)} \quad (10.53)$$

$$\vec{L}_G^{\text{sol}} = \vec{L}_G^{(1)} + \vec{L}_G^{(2)} = -(2m)r^2\omega \sin \theta \vec{e}_\theta = -Mr^2\omega \sin \theta \vec{e}_\theta \quad (10.54)$$

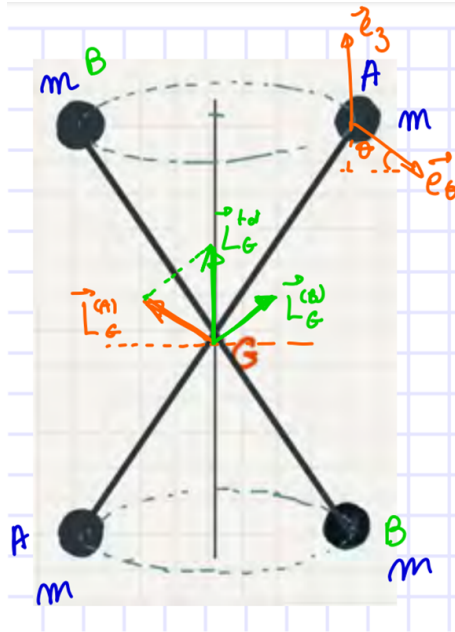
Le moment cinétique obtenu est perpendiculaire à l'axe de la tige, passant par le centre de masse G. En tournant, le solide décrit un cône, et **la direction du vecteur moment cinétique change, en décrivant elle aussi un cône** avec un angle différent par rapport à l'horizontale (angle θ).

Si le moment cinétique change, sa dérivée est non-nulle, et il est donc nécessaire d'exercer un moment de force pour maintenir la rotation (en accord avec le théorème du moment cinétique vu précédemment).

En général le moment cinétique n'est pas parallèle à l'axe de rotation du solide, sauf si une certaine symétrie existe dans la répartition de la masse. Le maintien d'un tel axe de rotation demande d'exercer un moment de force.

Exemples de Cas Symétriques

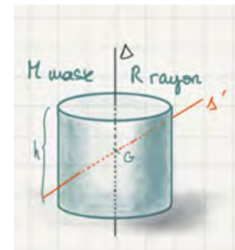
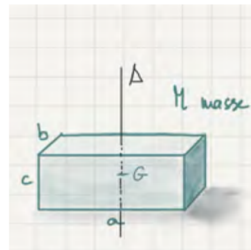
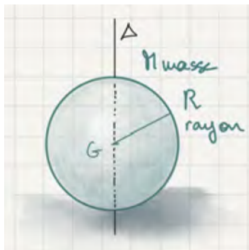
Doublons désormais l'haltère (A) par un deuxième solide identique (B), symétrique par rapport à l'axe de rotation.



Le moment cinétique du solide total sera $\vec{L}_G^{\text{tot}} = \vec{L}_G^A + \vec{L}_G^B$, colinéaire à $\vec{e}_z$ due à la symétrie du problème. En utilisant l'expression pour le solide (A) projetée sur l'axe z par produit scalaire et $M = 4m$ la masse totale, on a alors :

$$\vec{L}_G^{\text{tot}} = |\vec{L}_G^{\text{tot}}| \vec{e}_z = (2\vec{L}_G^A \cdot \vec{e}_z) \vec{e}_z = 4m(r^2 \sin^2 \theta) \omega \vec{e}_z = MR^2 \omega \vec{e}_z = I_G \vec{\omega} \quad (10.55)$$

Ici le moment cinétique est parallèle au vecteur omega car le problème est symétrique ! Il est possible de généraliser cette expression à des solides usuels :

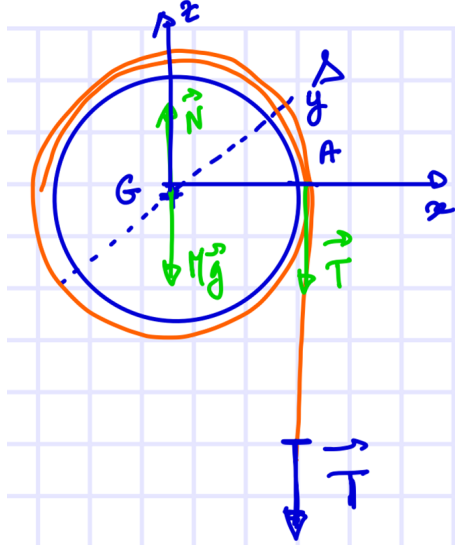


Dans les 3 cas, le solide est découpable selon deux plans qui nous permettent, en rassemblant les quatre quadrants en quatre masses infinitésimales, de retomber dans le cas de figure précédente (double haltère symétrique).

Pour ces solides, il existe alors des axes de symétrie tels que pour une rotation autour de cet axe, $\vec{L}_G = I_{Gz} \vec{\omega}$: On les appelle **Axes principaux d'inertie**. **Tout solide admet au moins 3 axes principaux d'inertie.**

Exemple d'application : Poulie et Corde

Considérons une poulie comme un disque plein homogène fixé à l'axe Δ passant par G, de masse M et rayon R. Une corde sans masse l'entoure. Durant un temps t_0 , on exerce une tension $\vec{T}$ sur la corde, l'ensemble est initialement immobile : on souhaite déterminer la longueur de la corde déroulée après le temps t_0 .



En prenant en compte toutes les forces (poids de la poulie, tension de la corde, réaction à l'axe) en présence et faisant attention à leurs points d'application respectifs (G ou A respectivement). On applique alors le théorème du moment cinétique au centre de masse G :

$$\sum \vec{M}_G^{\text{ext}} = RT\vec{e}_y = \frac{d\vec{L}_G}{dt} \quad (10.56)$$

L'axe Δ étant un axe principal d'inertie, le moment cinétique peut s'écrire comme $\vec{L}_G = I_{Gy}\omega\vec{e}_y = \frac{1}{2}MR^2\omega\vec{e}_y$. Dans cette expression, seul ω dépend du temps, le reste étant constant. En revenant alors au théorème du moment cinétique et en projetant sur l'axe y, on peut isoler et intégrer 2 fois :

$$\frac{1}{2}MR^2\dot{\omega} = RT \quad (10.57)$$

$$\dot{\omega} = \frac{2T}{MR} = \text{cste} \quad (10.58)$$

$$\omega = \frac{2T}{MR}t + \omega(t=0) = \frac{2T}{MR}t \quad (10.59)$$

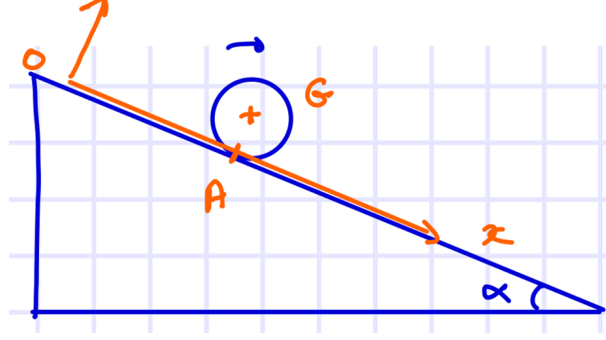
$$\theta = \frac{T}{MR}t^2 \quad (10.60)$$

La longueur de corde déroulée s'écrit alors :

$$L = \theta_f * R = \frac{T}{M}t_0^2 \quad (10.61)$$

7 Solide qui Roule

Etudions à présent un cylindre qui roule sans glisser le long d'un plan incliné d'un angle α .



Nous avons vu jusqu'à présent qu'il est possible d'appliquer le théorème du moment cinétique pour résoudre le problème, à un point fixe. Les 3 points d'intérêt ici sont O l'origine du repère, A le point de contact entre le solide et le plan, et G le centre de masse du cylindre. O est fixe, A et G ne le sont pas !

Il faut par ailleurs pouvoir calculer le moment cinétique au point d'application choisi. Nous admettons qu'il est possible de le faire pour le centre de masse G ou pour un point du solide à vitesse nulle :

- pour G : $\vec{L}_G = I_{Gz}\vec{\omega}$ si Gz est axe principal d'inertie
- pour A : $\vec{L}_A = I_{Az}\vec{\omega}$ si A point du solide à vitesse nulle et Az axe principal d'inertie
- pour O : Ni un point du solide à vitesse nulle ni centre de masse. On ne peut pas écrire $\vec{L}_O = I_{Oz}\vec{\omega}$

C'est donc un problème pour appliquer le théorème du moment cinétique : **la contrainte de point fixe dans le référentiel est donc trop limitante.**

Etudions son application à un point non-fixe A quelconque du référentiel $\mathcal{R}$. En reprenant l'expression intégrale du moment cinétique, et utilisant les expressions connues ($\vec{p}^{\text{tot}} = M\vec{v}_{\mathcal{R}}(G)$; $\sum \vec{M}_O = \sum \vec{OP}_{\text{app}} \wedge \vec{F}^{\text{ext}}$; $\vec{L}_O = \int_{\text{vol}} \vec{OP} \wedge dm\vec{v}_{\mathcal{R}}(P)$) :

$$\vec{L}_A = \int_{\text{vol}} \vec{AP} \wedge dm\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \int_{\text{vol}} (\vec{AO} + \vec{OP}) \wedge dm\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) \quad (10.62)$$

$$\vec{L}_A = \vec{AO} \wedge \int_{\text{vol}} dm\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) + \int_{\text{vol}} \vec{OP} \wedge dm\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = -\vec{OA} \wedge \vec{p}^{\text{tot}} + \vec{L}_O \quad (10.63)$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = -\vec{v}_{\mathcal{R}}(A) \wedge \vec{p}^{\text{tot}} - \vec{OA} \wedge \sum \vec{F}^{\text{ext}} + \sum \vec{M}_O \quad (10.64)$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = -M\vec{v}_{\mathcal{R}}(A) \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}}(G) + \sum (\vec{AO} + \vec{OP}_{\text{app}}) \wedge \vec{F}^{\text{ext}} \quad (10.65)$$

On en déduit la **formule générale pour un point A quelconque** :

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum \vec{M}_A - M\vec{v}_{\mathcal{R}}(A) \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}}(G) \quad (10.66)$$

Le deuxième terme sera nul dans 3 cas :

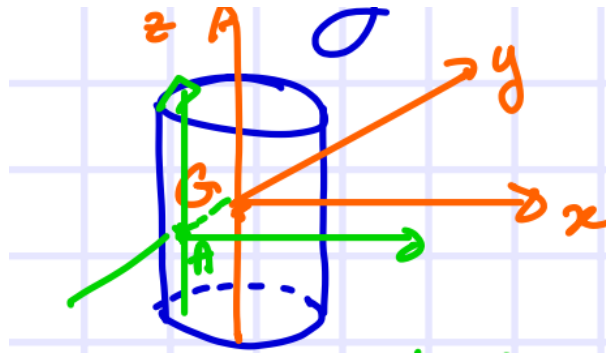
- si A fixe dans $\mathcal{R}$
- si A est le centre de masse
- si $\vec{v}_{\mathcal{R}}(A)$ est colinéaire à $\vec{v}_{\mathcal{R}}(G)$

En revenant désormais au cas du cylindre et le plan incliné : le point de référence A dans le référentiel $\mathcal{R}$ a une vitesse non nulle et colinéaire à celle de G (différent de la vitesse nulle du point matériel en contact avec le plan), car à chaque instant t le point A change de position. Donc nous pouvons éliminer le deuxième terme et appliquer $\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum \vec{M}_A$ directement. Cela est aussi possible comme discuté précédemment pour le centre de masse G mais pas pour le point O (à cause du problème du calcul de $\vec{L}_O$) !

Par ailleurs, la notion d'axe principal d'inertie est importante pour pouvoir calculer le moment cinétique au point d'étude. Sous quelle condition alors pour un point O les axes (O,x,y,z) sont-ils des axes principaux d'inertie ?

Nous admettons que c'est le cas si (G, x, y, z) sont axes principaux d'inertie, et si O appartient à un d'eux. Dans ce cas, pour une rotation autour de (Oz) : $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ et $\vec{L}_O = I_{Oz} \vec{\omega}$.

Dans notre exemple, le point A appartient à l'axe principal Oy et donc les axes (A,x,y,z) sont également des axes principaux.



8 Tenseur d'inertie (hors programme)

Dans le cas général, lorsque la rotation ne se fait pas autour d'un axe principal d'inertie, le moment cinétique s'écrit comme le produit entre un tenseur (matrice) et un vecteur :

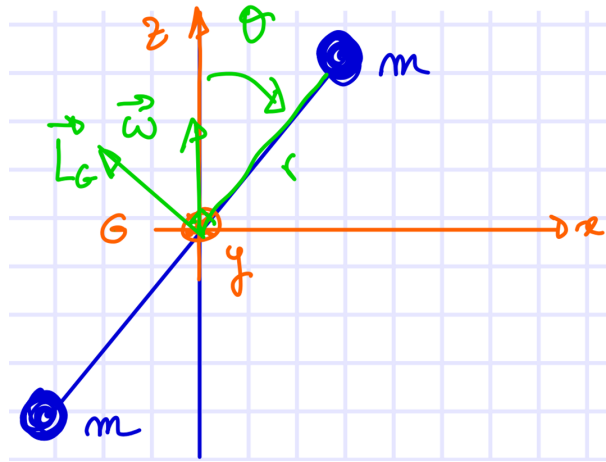
$$\vec{L}_G = \underline{I}_G \vec{\omega} \quad (10.67)$$

Avec $\underline{I}_G$ le tenseur d'inertie, qui dépend de l'origine et des axes choisis. Son expression est :

$$\underline{I}_G = \begin{bmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & - \int xy dm & - \int xz dm \\ - \int xy dm & \int (x^2 + z^2) dm & - \int yz dm \\ - \int xz dm & - \int yz dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix} \quad (10.68)$$

Exemple

Pour l'exemple de l'haltère simple non-symétrique, le calcul nous permet d'obtenir dans (G, x, y, z) :



$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \quad (10.69)$$

$$\underline{I}_G = \begin{bmatrix} 2m(r \cos \theta)^2 & 0 & -2mr^2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 2mr^2 & 0 \\ -2mr^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & 2m(r \sin \theta)^2 \end{bmatrix} \quad (10.70)$$

$$\vec{L}_G = \underline{I}_G \vec{\omega} = \begin{pmatrix} -2m\omega r^2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 \\ 2m\omega r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (10.71)$$

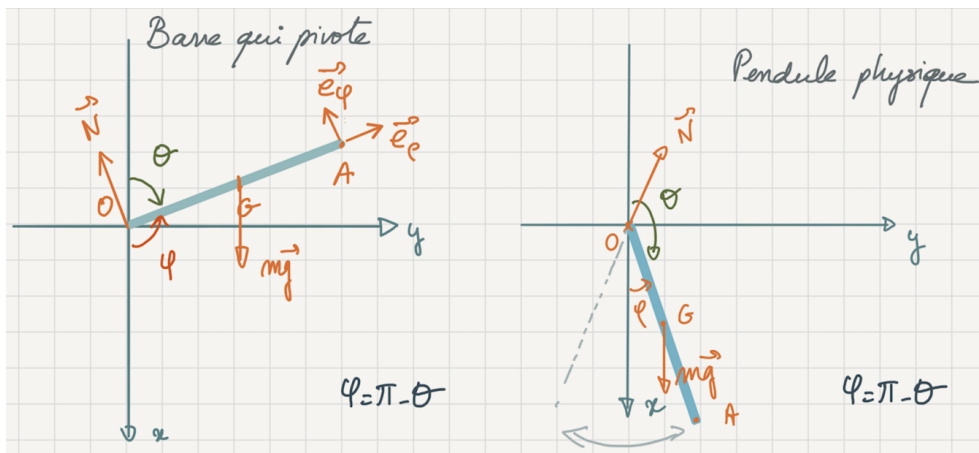
Chapitre 11

Application du solide indéformable

1 Chute d'une Barre et Pendule Physique

1.1 Problèmes et Généralités

Une barre qui chute depuis une position verticale est, physiquement, un exemple proche du pendule physique, qui, lui consiste à faire osciller autour d'une position d'équilibre non pas une masse suspendue par un fil mais un solide de masse m .



Selon le cas étudié, il sera plus judicieux de choisir l'angle θ (qui varie entre 0 et 2π) ou l'angle φ (variant entre $-\pi$ et π), entre la verticale et notre objet. Ce choix se fait selon les cadrans dans lesquels notre objet se déplace en fonction du problème :

- **Chute** : Le solide tombe de la verticale jusqu'à atteindre le sol (horizontal) et ne plus bouger. L'angle θ est plus judicieux ici car il va varier seulement entre 0 et 90 degrés.
- **Pendule** : Ici le solide oscille sur les deux cadrans inférieurs, et il est alors bien plus judicieux de choisir l'angle φ autour duquel le solide se déplace.

Notons que les deux angles sont reliés par la relation $\varphi = \pi - \theta$, et l'angle φ est celui associé aux coordonnées cylindriques (O, ρ, φ, z) , prises par rapport à l'axe Ox vertical vers le bas.

Que l'étude se fasse avec un angle ou l'autre, les forces en présence sont le poids $m\vec{g}$ et la réaction $\vec{N}$. Au point O, le moment de $\vec{N}$ est nul. De plus, le pivot étant le même au point O, avec l'axe (Oz) comme axe principal d'inertie, on peut écrire :

$$\vec{L}_O = I_O \vec{\omega} \quad (11.1)$$

$$I_O = I_G + m \frac{l^2}{2} = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{1}{3}ml^2 \quad (11.2)$$

$$\sum \vec{M}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OG} \wedge m\vec{g} \quad (11.3)$$

Étudions le mouvement grâce aux différents angles.

Selon θ :

$$\vec{\omega} = -\dot{\theta}\vec{e}_z \quad (11.4)$$

$$\vec{OG} \wedge m\vec{g} = \frac{lmg}{2} \sin(\pi - \theta)(-\vec{e}_z) = -\frac{lmg}{2} \sin \theta \vec{e}_z \quad (11.5)$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{1}{3}ml^2(-\ddot{\theta})\vec{e}_z = -\frac{lmg}{2} \sin \theta \vec{e}_z \quad (11.6)$$

$$\ddot{\theta} - \frac{3}{2} \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (11.7)$$

Selon φ :

$$\vec{\omega} = -\frac{d}{dt}(\pi - \varphi)\vec{e}_z = \dot{\varphi}\vec{e}_z \quad (11.8)$$

$$\vec{OG} \wedge m\vec{g} = \frac{lmg}{2} \sin(\varphi)(-\vec{e}_z) = -\frac{lmg}{2} \sin \varphi \vec{e}_z \quad (11.9)$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi}\vec{e}_z = -\frac{lmg}{2} \sin \varphi \vec{e}_z \quad (11.10)$$

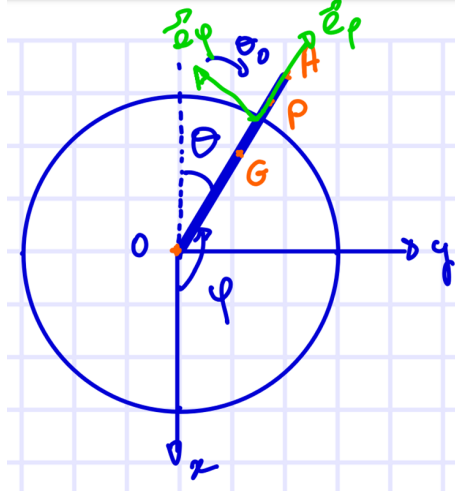
$$\ddot{\varphi} + \frac{3}{2} \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \quad (11.11)$$

Les équations obtenues nous renseignent sur le choix le plus judicieux pour chaque cas de figure.

- **Pendule** : Si l'on veut obtenir une équation d'oscillateur harmonique, il faut utiliser l'approximation des petits angles. Selon φ l'approximation se fait au voisinage de 0, et on peut directement approximer $\sin \varphi$ par φ . Cependant, pour θ , l'approximation doit se faire au voisinage de π , et nécessite donc le développement limité de la fonction sinus autour de ce point d'équilibre. *Ainsi, il est plus judicieux de choisir φ .*
- **Chute** : Ici quelle que soit la description choisie nous ne pouvons pas appliquer l'approximation des petits angles et réduire le mouvement à un oscillateur harmonique : la solution est trouvée par une résolution numérique (vue en Analyse IV). *Le choix de θ se fait alors car il permet d'étudier un angle qui est fonction croissante du temps.*

1.2 Chute d'une Barre

Considérons que nous lâchons la barre à la position angulaire initiale $\theta(0) = \theta_0$ et à vitesse nulle $\dot{\theta}(0) = 0$. Un point P sur la barre, à la distance d de O , décrit un mouvement circulaire non-uniforme, notre but étant de déterminer son accélération.



Reprenons l'équation du mouvement sur θ et les relations entre les angles :

$$\varphi = \pi - \theta \Rightarrow \dot{\varphi} = -\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{\varphi} = -\ddot{\theta} \quad (11.12)$$

$$\ddot{\theta} - \frac{3g}{2l} \sin \theta = 0 \quad (11.13)$$

En utilisant l'expression connue de l'accélération en coordonnées polaires, les relations angulaires, injectant $\rho = d$ au point P et en remplaçant $\ddot{\theta}$ grâce à l'équation différentielle précédente, on déduit :

$$\vec{a}_\rho = -\rho \dot{\varphi}^2 \vec{e}_\rho + \rho \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi \quad (11.14)$$

$$\vec{a}_\rho = -d \dot{\theta}^2 \vec{e}_\rho - d \ddot{\theta} \vec{e}_\varphi \quad (11.15)$$

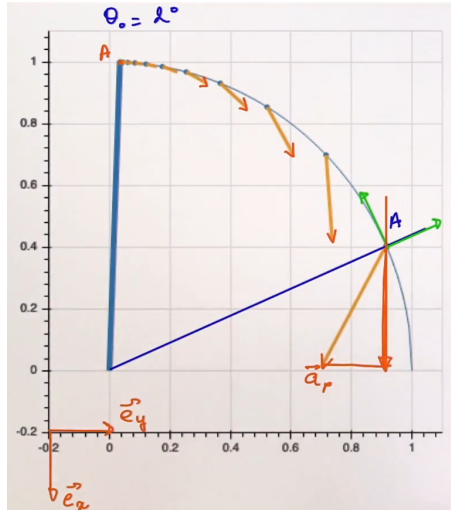
$$\vec{a}_\rho(t) = -d \dot{\theta}^2(t) \vec{e}_\rho - d \left(\frac{3g}{2l} \sin \theta(t) \right) \vec{e}_\varphi \quad (11.16)$$

Les deux grandeurs $\dot{\theta}$ et $\sin \theta$ ont été obtenues numériquement, en fonction du temps, grâce à l'algorithme de Runge-Kutta (Analyse IV). Ainsi, nous pouvons grâce à un tableau de valeurs données déterminer l'accélération du point P .

Expérimentalement :

- on choisit une position initiale θ_0
- on mesure à intervalles réguliers Δt la position θ et la vitesse $\dot{\theta}$ du point P
- pour chaque position, on calcule $\vec{a}_\rho$ grâce à l'équation du mouvement déterminée ci-dessus et les mesures de position et vitesse

Nous allons maintenant regarder la projection de l'accélération sur l'axe vertical (Ox), au point $P = A$ à l'extrémité de la barre : cela revient à calculer le produit scalaire $\vec{a}_\rho(t) \cdot \vec{e}_x$.



En utilisant les relations dérivées au chapitre sur les coordonnées polaires, des formules de trigonométrie et l'expression de l'accélération calculée plus haut, **pour un point sur la barre à une distance d arbitraire** on obtient :

$$\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_x = (\cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y) \cdot \vec{e}_x = \cos \varphi = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta \quad (11.17)$$

$$\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_x = (-\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y) \cdot \vec{e}_x = -\sin \varphi = -\sin(\pi - \theta) = -\sin \theta \quad (11.18)$$

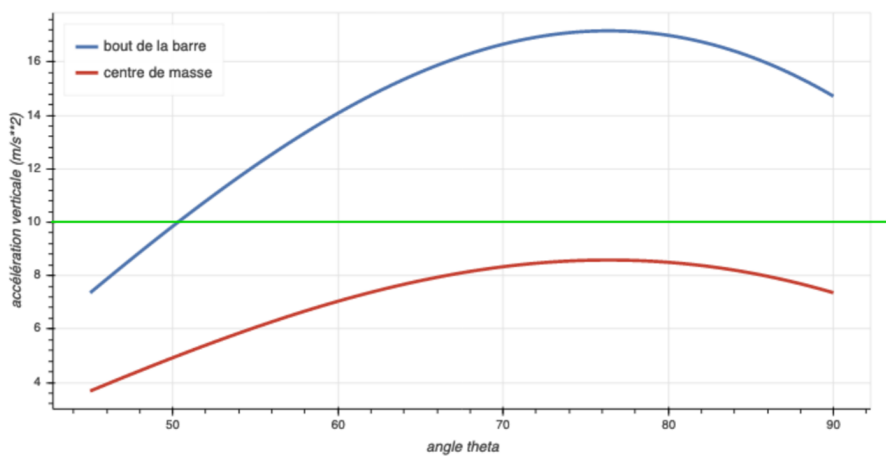
$$\vec{a}_\rho \cdot \vec{e}_x = d\dot{\theta}^2 \cos \theta + d\frac{3g}{2l} \sin^2 \theta \quad (11.19)$$

Regardons deux points particuliers :

A l'extrémité de la barre : $\vec{a}_\rho \cdot \vec{e}_x(d = l) = l\dot{\theta}^2 \cos \theta + \frac{3}{2}g \sin^2 \theta \quad (11.20)$

G le centre de masse de la barre : $\vec{a}_\rho \cdot \vec{e}_x(d = l/2) = \frac{l}{2}\dot{\theta}^2 \cos \theta + \frac{3}{4}g \sin^2 \theta \quad (11.21)$

Il est alors possible de tracer graphiquement l'accélération de la barre en fonction de l'angle θ pour les deux points particuliers :

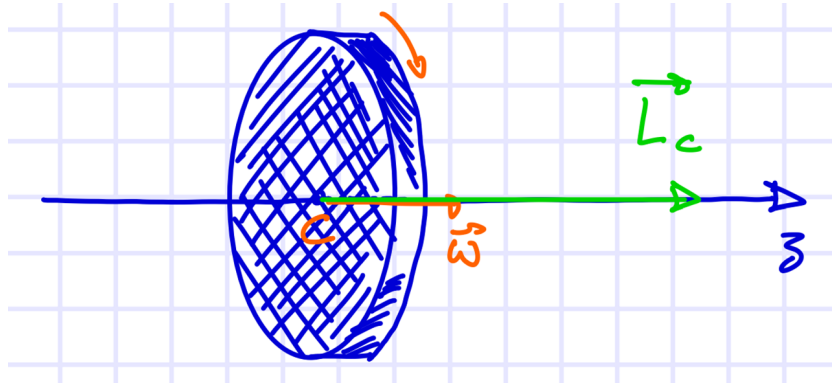


On remarque graphiquement que **l'accélération à l'extrémité est supérieure à la pesanteur g à partir d'environ 50 degrés**. Cela peut paraître surprenant, mais c'est

dû au fait que la barre est rigide et fixée à un pivot. Chaque partie de la barre participe à l'entraînement de la partie suivante, en exerçant des forces internes, qui permettent $a(A) > g$.

2 Mouvement Gyroscopique

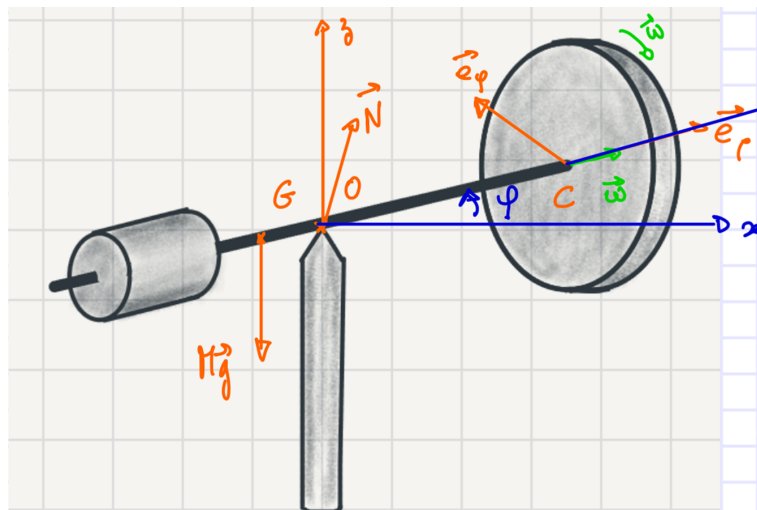
Soit un disque plein en rotation autour d'un axe (Cz) passant par son centre C .



Dans ce cas, $\vec{L}_C = I_{Cz}\vec{\omega}$ et $\sum \vec{M}_C = \frac{d\vec{L}_C}{dt}$. On peut faire varier le moment cinétique si on applique un moment de force.

Afin de faire tourner l'objet dans un plan vertical, le moment de la force doit être dans un plan vertical, et donc la force elle-même dans un plan horizontal ! Plus $\vec{L}_C$ est grand (donc plus le disque est lourd ou tourne rapidement) plus il faudra exercer de moment de force important pour un angle de déviation α donné.

Considérons désormais un gyroscope, composé d'un disque qui tourne relié à un contrepoids et tenu par un support :



Ce système est soumis à la force de réaction du support (s'appliquant au point O) et au poids (qui s'applique au centre de masse G). Le disque tourne à vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_\rho$. Utilisons le théorème du moment cinétique ici au point O car c'est un point fixe et de sorte à éliminer la force de réaction des équations :

$$\sum \vec{M}_O = \overrightarrow{O\dot{O}} \wedge \vec{N} + \overrightarrow{O\dot{G}} \wedge M\vec{g} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \quad (11.22)$$

Le moment cinétique total se compose de celui dû à la rotation du disque, ainsi que celui dû à la rotation du système entier sur le plan horizontal. Cependant, la contribution de ce dernier est négligeable devant celle du disque, alors on considère $\vec{L}_O = \vec{L}_O^{\text{disque}} = I_O^{\text{disque}} \vec{\omega}$. Ainsi, en supposant que le disque ne ralentit pas sa rotation ($\omega = \text{cste}$) et nomant $d_G = OG$ le développement de chaque coté de l'équation et l'isolement de la **vitesse angulaire de précession** (vitesse angulaire du gyroscope autour de son support) $\Omega = \dot{\varphi}$ est :

$$(-OG\vec{e}_\rho) \wedge (-Mg\vec{e}_z) = Mg d_G (-\vec{e}_\varphi) \quad (11.23)$$

$$\frac{d}{dt}(I_O \omega \vec{e}_\rho) = I_O \omega \frac{d}{dt}(\vec{e}_\rho) = I_O \omega \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \quad (11.24)$$

$$\Omega = \dot{\varphi} = \frac{Mg d_G}{I_O \omega} \quad (11.25)$$

On remarque que celle ci diminue lorsque ω augmente, car si le disque tourne plus vite, son moment cinétique augmente et ce sera plus difficile de le faire varier d'un même angle φ .

On remarque tout de même que nous négligeons ici le moment cinétique dû à la rotation du gyroscope, qui mènerait à un mouvement non pas circulaire sur un plan horizontal, mais ajouterait des oscillations verticales qu'on appelle la "nutation".