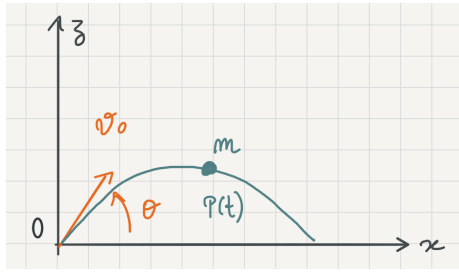


Exercice 1

Calculer $\vec{L}_O$ et $\vec{M}_O^{\vec{m}g}$ en fonction du temps, pour un objet de masse m lancé avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle θ avec $(0, \vec{x})$, depuis l'origine O .

Montrer que $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\vec{m}g}$

Exercice 2

Calculer l'altitude à laquelle placer un satellite pour qu'il soit géostationnaire.

Indication : $R_T = 6378\text{km}$, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$, $M_T = 5,974 \cdot 10^{24} \text{kg}$

Exercice 3

L'ISS orbite à 400 km au dessus de la surface de la Terre. Quelle est sa vitesse et combien de temps (en minutes) dure une orbite ?

Exercice 4

Calculer la vitesse qu'il faudrait communiquer à un objet pour le mettre en orbite à une altitude nulle. (Il tournerait autour de la Terre, considérée sphérique "au ras du sol"). Cette vitesse est la première vitesse cosmique.

Indication : $R_T = 6378\text{km}$, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$, $M_T = 5,974 \cdot 10^{24} \text{kg}$

Exercice 5

Un satellite GPS a une masse de 860 kg. Il est à une altitude de 20'000 km.

1. Calculer sa vitesse et sa période de révolution.
2. Calculer l'énergie à fournir au satellite pour le mettre en orbite ? Comparer à l'énergie nécessaire pour accélérer un train de 380 tonnes de 0 à 200 km/h.
3. Calculer le moment cinétique du satellite par rapport au centre de la Terre lorsqu'il est en orbite. Calculer son moment cinétique lorsqu'il est à la surface de la Terre, dans son hangar de rangement, à 40° de latitude Nord ?

Reponses

1. $\vec{a} = -g\vec{e}_z; \vec{v} = (v_0 \cos \theta; 0; -gt + v_0 \sin \theta); \vec{r} = (v_0 \cos \theta t; 0; -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta t)$
 $\vec{L}_O = \vec{r} \wedge m\vec{v} = (0; \frac{1}{2}mgv_0 \cos \theta t^2; 0)$

$$\vec{M}_O^{\vec{m}g} = \vec{r} \wedge (-mg\vec{e}_z) = -mgv_0 \cos \theta t \underbrace{\vec{e}_x \wedge \vec{e}_z}_{-\vec{e}_y}$$

$$\vec{M}_O^{\vec{m}g} = mgv_0 \cos \theta t \vec{e}_y \Rightarrow \text{On a bien } \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\vec{m}g}$$

2. $h \cong 35800 \text{ km}$

3. $v = 7667 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
 $T = 5555 \text{ s} = 92,6 \text{ min}$

4. $7,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

5. (a) L'orbite est circulaire. Les forces de gravitation correspondent donc à l'accélération normale :

$$F_G = \frac{GMm}{R_s^2} = m \frac{v^2}{R_s}$$

où M est la masse de la Terre, m la masse du satellite et R_s le rayon de l'orbite du satellite. Donc :

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R_s}}$$

A.N. : $v = 3.88 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$$v = R_s \omega = R_s \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi \frac{R_s}{v}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R_s^3}{GM}}$$

A.N. : $T = 42700 \text{ s} (\simeq 12 \text{ h})$, soit 2 tours par jour.

- (b) Attention : on ne peut pas considérer g comme constant ! L'énergie potentielle de gravitation est donnée par :

$$E_p = -\frac{GMm}{R}$$

Quand le satellite est sur Terre, son énergie potentielle est

$$E_{p1} = -\frac{GMm}{R_T} \quad E_{c1} = \frac{1}{2}mv_T^2$$

Quand il est en orbite,

$$E_{p2} = -\frac{GMm}{R_s} \quad E_{c2} = \frac{1}{2}mv^2$$

L'énergie à fournir est

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_2 - E_1 \\ &= -\frac{GMm}{R_s} + \frac{1}{2}mv^2 - \left(-\frac{GMm}{R_T} + \frac{1}{2}m \left(\frac{2\pi R_T}{T_T} \right)^2 \right) \\ &= -\frac{GMm}{R_s} + \frac{1}{2}m \frac{GM}{R_s} + \frac{GMm}{R_T} - \frac{1}{2}m \left(\frac{2\pi R_T}{T_T} \right)^2 \\ &= GMm \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2R_s} \right) - \frac{2m\pi^2 R_T^2}{T_T^2} \end{aligned}$$

en supposant que le lancement s'effectue près de l'équateur...

A.N. :

$$\Delta E = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.98 \cdot 10^{24} \cdot 860 \cdot \left(\frac{1}{6.378 \cdot 10^6} - \frac{1}{2 \cdot 2.6378 \cdot 10^7} \right) - \frac{2 \cdot 860 (\pi \cdot 6.378 \cdot 10^6)^2}{(8.64 \cdot 10^4)^2} = 47.2 \cdot 10^9 \text{ J.}$$

Accélérer un train de 380 tonne de 0 à 200 km/h nécessite

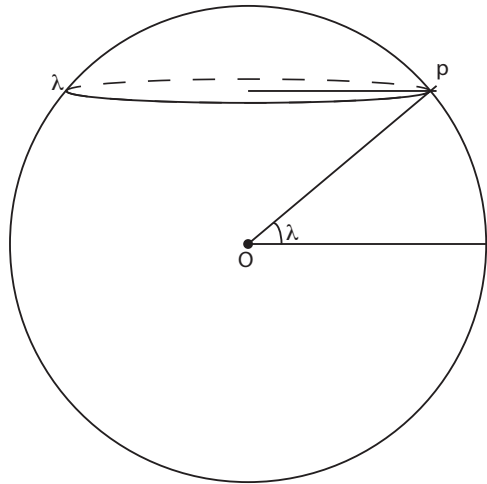
$$\Delta E = \frac{1}{2}m_t v_t^2 = 0.586 \cdot 10^9 \text{ J}$$

(c) $\vec{L}_0 = \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{v}$ et $L_0 = R_s m v_s$ car le mouvement est circulaire uniforme.

$$L_0 = m R_s \sqrt{\frac{GM}{R_s}} = m \sqrt{GM R_s}$$

$$\text{A.N. : } L_0 = 860 \sqrt{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.98 \cdot 10^{24} \cdot 26.378 \cdot 10^6} = 88.2 \cdot 10^{12} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

Lorsque le satellite est dans son hangar, il décrit une corde de rayon $R_T \cos \lambda$ sur le parallèle et avec la vitesse de rotation de la Terre (période de 24h)



$\vec{L}'_0 = \vec{OP} \wedge m\vec{v}'$, et comme $\vec{OP} \perp \vec{v}$, on a :

$$\begin{aligned} |\vec{L}'_0| &= L'_0 = OP \cdot mv' = R_T mv' \\ &= R_T m(R_T \omega \cos \lambda) \\ &= m R_T^2 \frac{2\pi}{T} \cos \lambda \end{aligned}$$

A.N. : $L'_0 = m R_T^2 \frac{2\pi}{T} \cos \lambda = 1.95 \cdot 10^{12} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

Solutions

Solution 1

Commençons par déduire la vitesse et la position en fonction du temps (équations horaires) grâce à l'accélération fournie :

$$\vec{a} = -g\vec{e}_z; \vec{v} = (v_0 \cos \theta; 0; -gt + v_0 \sin \theta); \vec{r} = (v_0 \cos \theta t; 0; -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta t)$$

Il suffit ensuite d'appliquer les formules suivantes :

$$\vec{L}_O = \vec{r} \wedge m\vec{v} = (0; \frac{1}{2}mgv_0 \cos \theta t^2; 0) \quad (1)$$

$$\vec{M}_O^{\vec{m}g} = \vec{r} \wedge (-mg\vec{e}_z) = -mgv_0 \cos \theta t \underbrace{\vec{e}_x \wedge \vec{e}_z}_{-\vec{e}_y} \quad (2)$$

$$\vec{M}_O^{\vec{m}g} = mgv_0 \cos \theta t \vec{e}_y \Rightarrow \text{On a bien } \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\vec{m}g}$$

Solution 2

Un satellite géostationnaire reste toujours au dessus du même point de la Terre, c'est à dire que son orbite est de période égale, donc $T_s = 24h$. Sachant que l'expression de cette dernière est $T_s = 2\pi\sqrt{\frac{d^3}{GM_T}}$, on peut isoler la distance d, avec la hauteur que l'on recherche étant $h = d - R_T$:

$$h = d - R_T = \left(\frac{GM_T T_s^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R_T \cong 35800km \quad (3)$$

Solution

On utilise la Seconde loi de Newton avec l'expression de l'accélération centripète, le tout projeté sur la direction radiale :

$$ma_R = m\frac{v^2}{d} = F_G = \frac{GM_T m}{d^2} \quad (4)$$

Avec $d = R_T + h$. De cette expression nous pouvons isoler la vitesse : $v = \sqrt{\frac{GM_T}{d}} = 7667m \cdot s^{-1}$.

L'expression de la période est :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R_s^3}{GM}} = 5555s = 92,6min \quad (5)$$

Solution 4

Nous procédons exactement de la même manière que dans l'exercice précédent, mais en prenant $h=0m$. On obtient finalement : $v = 7,9 km.s^{-1}$

Solution 5

1. L'orbite est circulaire. Les forces de gravitation correspondent donc à l'accélération normale :

$$F_G = \frac{GMm}{R_s^2} = m \frac{v^2}{R_s}$$

où M est la masse de la Terre, m la masse du satellite et R_s le rayon de l'orbite du satellite. Donc :

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R_s}}$$

A.N. : $v = 3.88 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$$v = R_s \omega = R_s \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi \frac{R_s}{v}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R_s^3}{GM}}$$

A.N. : $T = 42700 \text{ s}$ ($\simeq 12 \text{ h}$), soit 2 tours par jour.

2. Attention : on ne peut pas considérer g comme constant ! L'énergie potentielle de gravitation est donnée par :

$$E_p = -\frac{GMm}{R}$$

Quand le satellite est sur Terre, son énergie potentielle est

$$E_{p1} = -\frac{GMm}{R_T} \quad E_{c1} = \frac{1}{2}mv_T^2$$

Quand il est en orbite,

$$E_{p2} = -\frac{GMm}{R_s} \quad E_{c2} = \frac{1}{2}mv^2$$

L'énergie à fournir est

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_2 - E_1 \\ &= -\frac{GMm}{R_s} + \frac{1}{2}mv^2 - \left(-\frac{GMm}{R_T} + \frac{1}{2}m \left(\frac{2\pi R_T}{T_T} \right)^2 \right) \\ &= -\frac{GMm}{R_s} + \frac{1}{2}m \frac{GM}{R_s} + \frac{GMm}{R_T} - \frac{1}{2}m \left(\frac{2\pi R_T}{T_T} \right)^2 \\ &= GMm \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2R_s} \right) - \frac{2m\pi^2 R_T^2}{T_T^2} \end{aligned}$$

en supposant que le lancement s'effectue près de l'équateur...

A.N. :

$$\Delta E = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.98 \cdot 10^{24} \cdot 860 \cdot \left(\frac{1}{6.378 \cdot 10^6} - \frac{1}{2 \cdot 2.6378 \cdot 10^7} \right) - \frac{2 \cdot 860 (\pi \cdot 6.378 \cdot 10^6)^2}{(8.64 \cdot 10^4)^2} = 47.2 \cdot 10^9 \text{ J.}$$

Accélérer un train de 380 tonne de 0 à 200 km/h nécessite

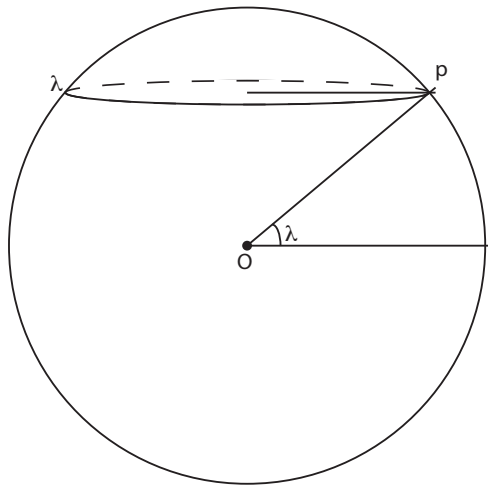
$$\Delta E = \frac{1}{2} m_t v_t^2 = 0.586 \cdot 10^9 \text{ J}$$

3. $\vec{L}_0 = \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{v}$ et $L_0 = R_s m v_s$ car le mouvement est circulaire uniforme.

$$L_0 = m R_s \sqrt{\frac{GM}{R_s}} = m \sqrt{G M R_s}$$

$$\text{A.N. : } L_0 = 860 \sqrt{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.98 \cdot 10^{24} \cdot 26.378 \cdot 10^6} = 88.2 \cdot 10^{12} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

Lorsque le satellite est dans son hangar, il décrit une corde de rayon $R_T \cos \lambda$ sur le parallèle et avec la vitesse de rotation de la Terre (période de 24h)



$\vec{L}'_0 = \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{v}'$, et comme $\overrightarrow{OP} \perp \vec{v}$, on a :

$$\begin{aligned} |\vec{L}'_0| = L'_0 &= OP \cdot m v' = R_T m v' \\ &= R_T m (R_T \omega \cos \lambda) \\ &= m R_T^2 \frac{2\pi}{T} \cos \lambda \end{aligned}$$

$$\text{A.N. : } L'_0 = m R_T^2 \frac{2\pi}{T} \cos \lambda = 1.95 \cdot 10^{12} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$