Rappels mathématiques

28 septembre 2021

Table des matières

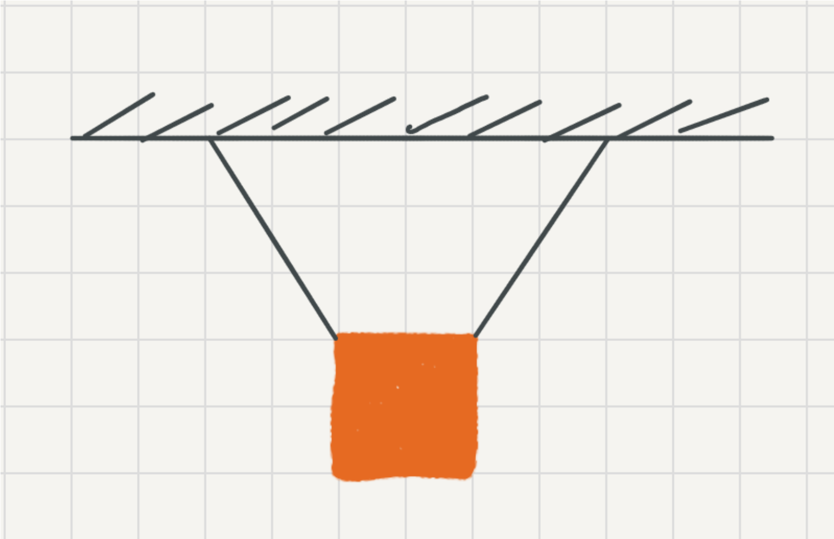
1 - Vecteurs
2 - Trigonométrie
3 - Dérivées, primitives, intégrales
4 - Développement limité

Un vecteur est caractérisé par sa norme, sa direction et son sens.

Un vecteur servira donc à représenter une grandeur pour laquelle, en plus de la "valeur", il est important de savoir le sens et la direction.

Typiquement, ce sont les déplacements, les vitesses, les accélérations et les forces.

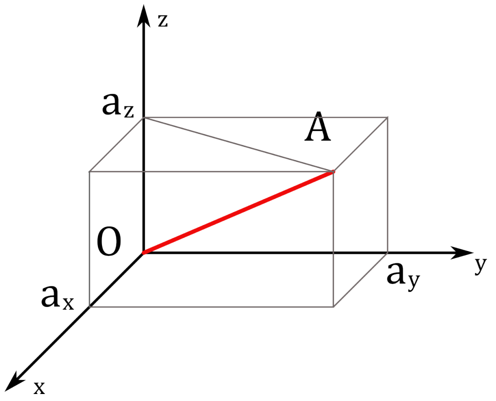
Exemple de bilan des forces



Vecteurs : en coordonnées cartésiennes

Afin de manipuler les vecteurs dans l'espace (à 3 dimensions), il est commode de les décomposer selon leurs composantes cartésiennes.

On fait partir le vecteur de l'origine du repère, les composantes du vecteur sont alors les coordonnées cartésiennes de son extrémité :



ici $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$

il a comme composantes a_x, a_y, a_z

Le vecteur $\vec{a}$ peut s'écrire grâce aux composantes et aux vecteurs de base du repère

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

On pourra noter verticalement les composantes du vecteur $\vec{a}$

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x \\ a_y \\ a_z \end{array} \right.$$

N.B. : dans certains livres, le vecteur $\vec{a}$ est noté **a**

La somme de deux vecteurs se calcule par la somme de ses composantes

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x \\ a_y \\ a_z \end{array} \right. + \vec{b} \left| \begin{array}{l} b_x \\ b_y \\ b_z \end{array} \right. = \vec{a} + \vec{b} \left| \begin{array}{l} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{array} \right.$$

Les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'obtiennent par la soustraction des coordonnées des points B et A.

$$A \left| \begin{array}{l} x_A \\ y_A \\ z_A \end{array} \right. ; \; B \left| \begin{array}{l} x_B \\ y_B \\ z_B \end{array} \right. \rightarrow \overrightarrow{AB} \left| \begin{array}{l} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{array} \right.$$

En physique, tout bouge... nos vecteurs sont des fonctions du temps t. Nous aurons besoin de calculer leurs dérivées par rapport au temps.

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

Vecteurs : norme

Définition

La norme d'un vecteur est par définition la longueur du segment sous-tendu, c'est-à-dire que pour un vecteur $\overrightarrow{AB}$ donné, sa norme est la longueur du segment $[AB]$.

La norme s'obtient en calculant la racine carrée de la somme des composantes au carré :

$$||\vec{a}|| := \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

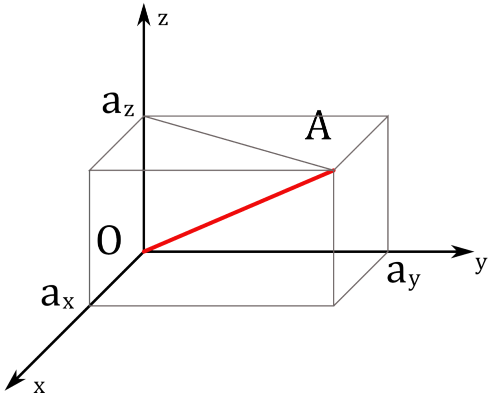
en règle générale, on notera :

$$||\vec{a}|| = a$$

Produit scalaire

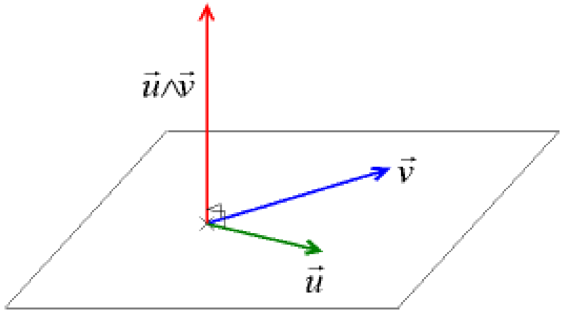
Physique générale : mécanique

Composantes et produit scalaire



La composante a_i de $\vec{a}$ s’obtient en effectuant $a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i$

Produit vectoriel



Définition

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires se définit comme l'unique vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que

- le vecteur $\vec{w}$ est *orthogonal* aux deux vecteurs donnés ;
- la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est de *sens direct* ;
- $||\vec{w}|| = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot |\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})|$

si on note $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ les vecteurs unitaires d'un trièdre orthonormé direct :

$$\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_x$$

$$\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x = \vec{e}_y$$

et de plus

$$\vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$$

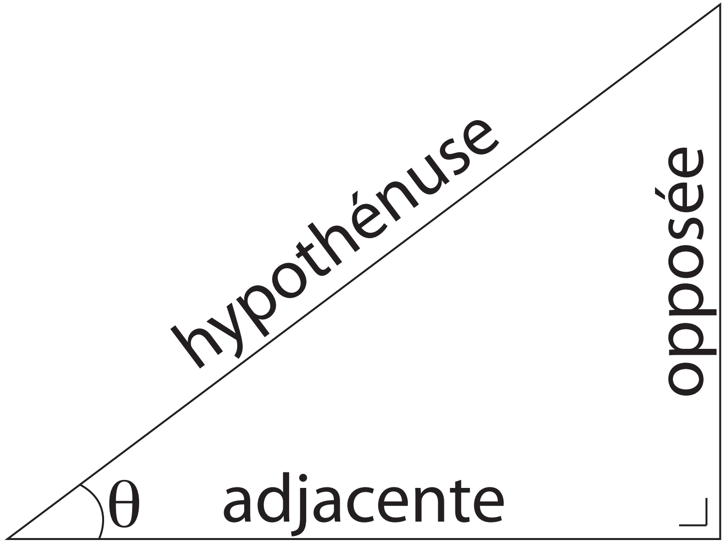
Le produit vectoriel de deux vecteurs se calcule par le produit croisé des composantes deux par deux selon la méthode suivante :

Trigonométrie

Nous utiliserons souvent les angles en *radians* .

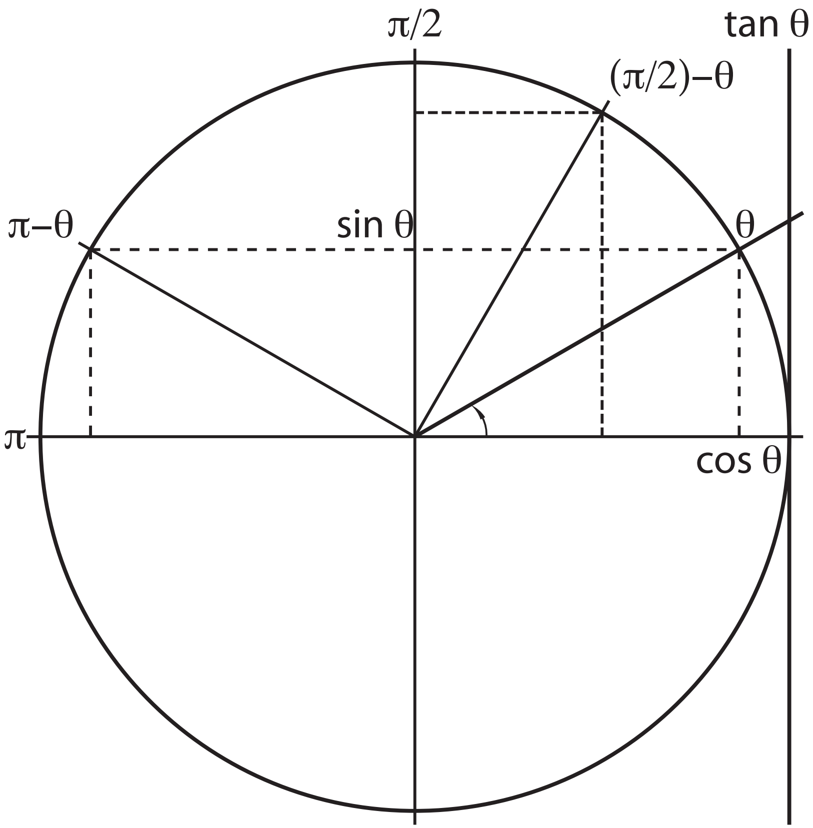
Le cercle complet fait 2π radians. Cette définition permet de relier directement la longueur de l'arc de cercle à l'angle et au rayon par $l = R\theta$ avec θ en radians.

Trigonométrie dans le triangle rectangle



$$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$

Cercle trigonométrique



Identités trigonométriques

$$\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1} \tag{1}$$

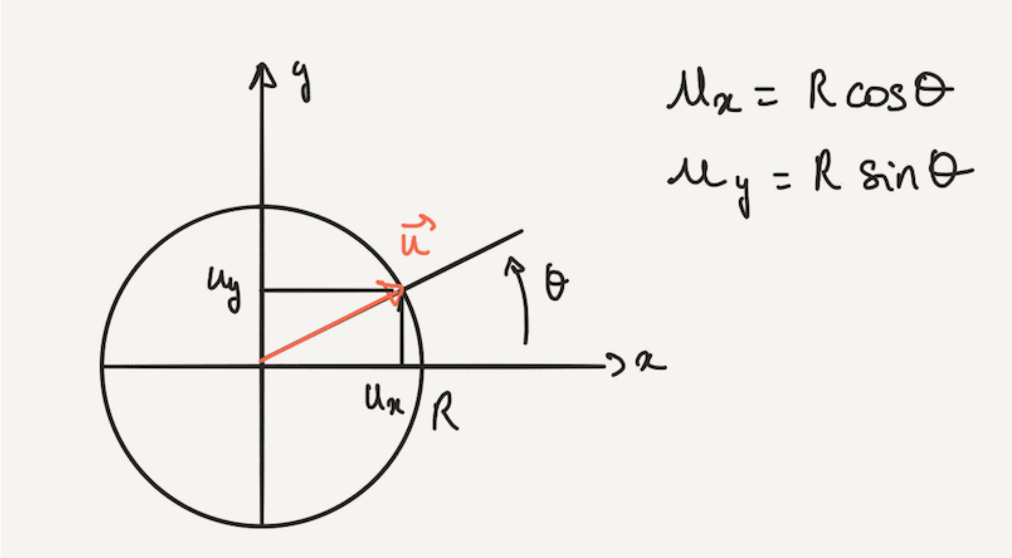
$$\boxed{\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} - 1} \tag{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a\sin b & (3)\\ \sin(a+b) &= \sin a\cos b + \sin b\cos a & (4)\end{aligned}}$$

…et bien d'autres dans votre formulaire et sur le web. Vous devez les savoir ou savoir les retrouver (ou les mettre dans votre formulaire personnel)

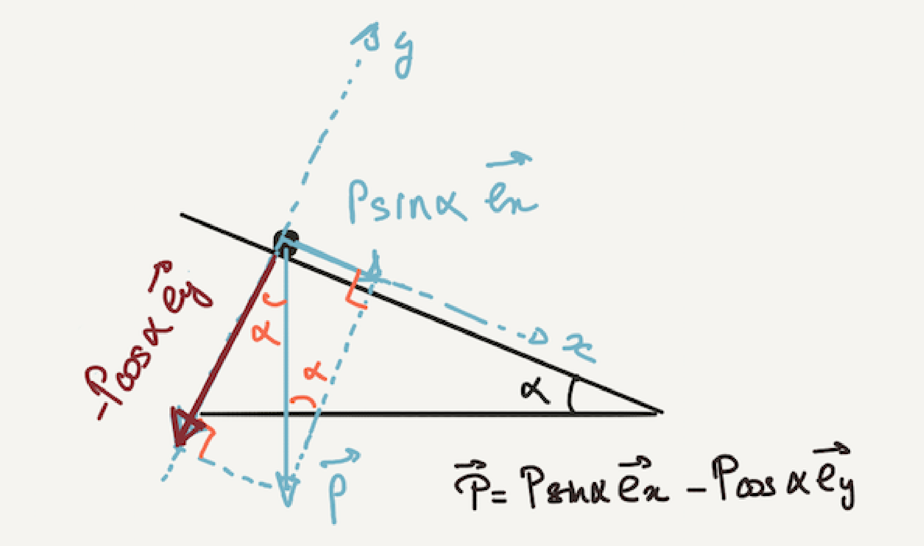
Vecteurs et trigonométrie

Vous aurez souvent à trouver les composantes d'un vecteur dont vous connaissez la norme, et l'angle qu'il fait par rapport à un axe de référence. En d'autre termes, la projection d'un vecteur donné sur des axes (pas forcément verticaux ou horizontaux).



Vecteurs et trigonométrie

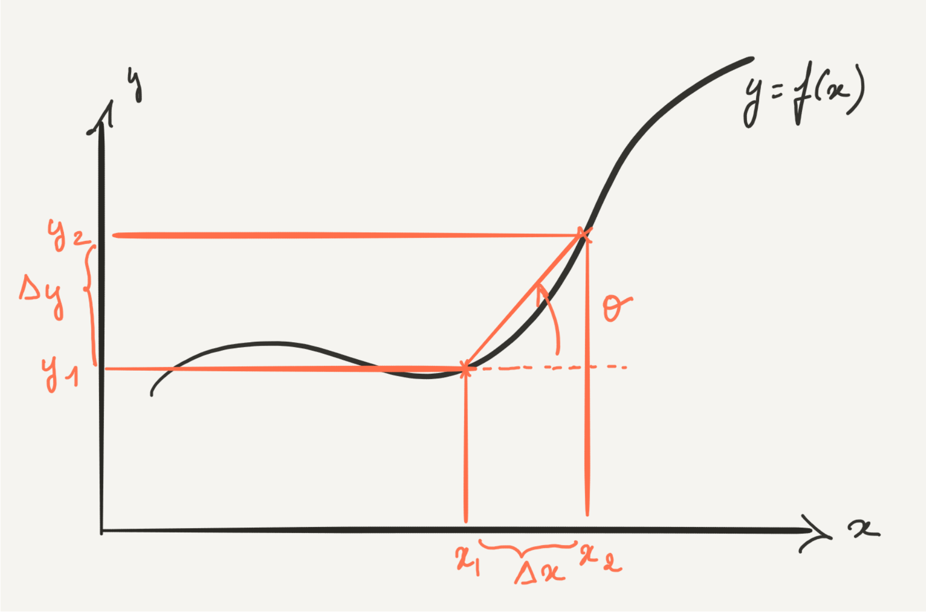
Par exemple, ici, on décompose une force (le poids) en deux composantes portées respectivement par l'axe x et l'axe y. Avant de faire la projection, il faut bien identifier l'angle par des considérations géométriques.



Pour cela, faites toujours un dessin avec des angles franchement différents de 45° !
Sinon vous risquez de faire des erreurs dans le report des angles.

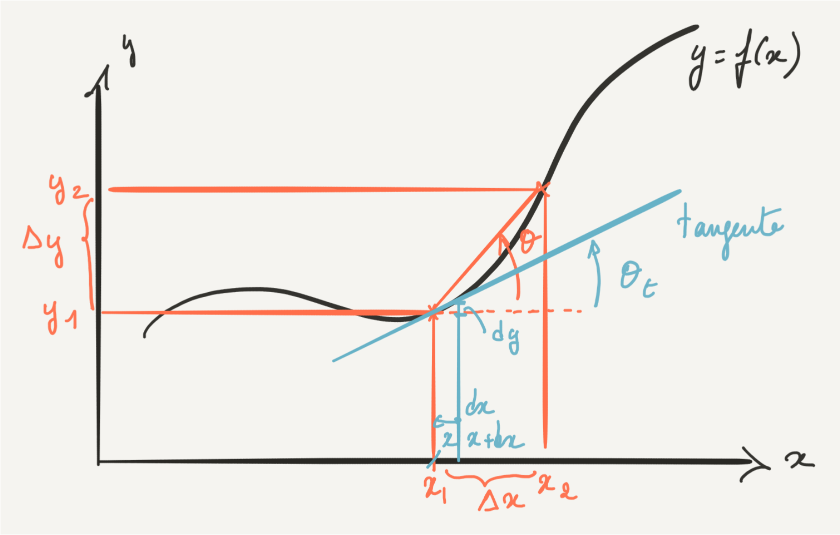
Dérivées

Soit une fonction $y = f(x)$ représentée par une courbe $y = f(x)$ dans le plan. La corde prise entre deux points a une pente caractérisée par l'angle θ.



La dérivée de la fonction f au point 1 est la limite de $\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ quand le point 2 tend vers le point 1. C'est donc la *pente de la tangente à la courbe*.

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x_1 + dx) - f(x_1)}{dx}$$



En physique on utilisera souvent la variation infinitésimale de la fonction f

$$df = f(x + dx) - f(x)$$

pour une variation dx de x.

Vous devez connaître les dérivées des fonctions usuelles.

Produit et composition de fonctions

Primitive

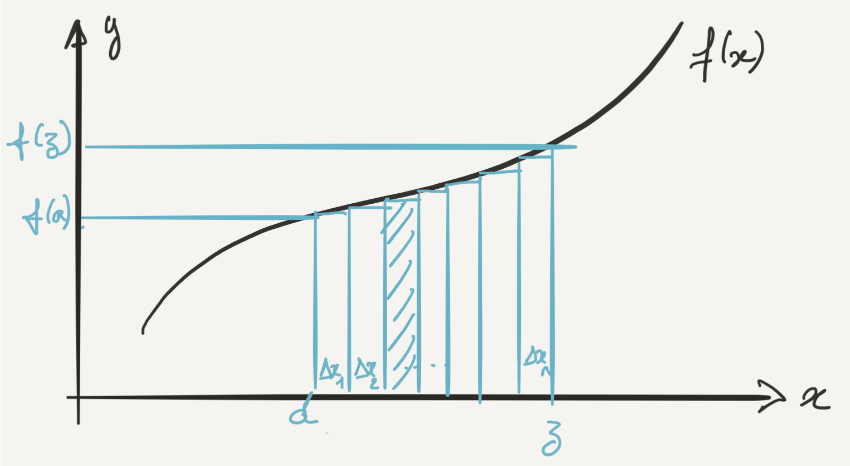
Calculer la primitive de f(x), c'est "la manoeuvre inverse" du calcul de la dérivée.

C'est chercher la fonction $F(x)$ telle que $F'(x) = f(x)$.

Comme la dérivée d'une constante est 0, on peut ajouter n'importe quelle constante à F ça ne change rien, donc "la primitive de F est définie à une constante près".

Intégrale

On cherche à calculer l'aire sous la courbe entre le point $x = a$ et $x = z$.



C'est à peu près la somme des petits rectangles de largeur Δx_i et de hauteur $f(x_i)$

$$\mathcal{A} \simeq \sum_i f(x_i)\Delta x_i$$

Plus Δx est petit plus l'aire est calculée juste. Finalement

$$\mathcal{A} = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(x_i)\Delta x_i = \int_a^z f(x)dx = F(z) - F(a)$$

Développement limité en série de Taylor

$$f(x_0 + \varepsilon) \simeq f(x_0) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x_0)\varepsilon + \cdots + \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x_0)$$

$f(x) = (1 + x)^n$ pour x petit :

Développement limité en série de Taylor utiles dans ce cours