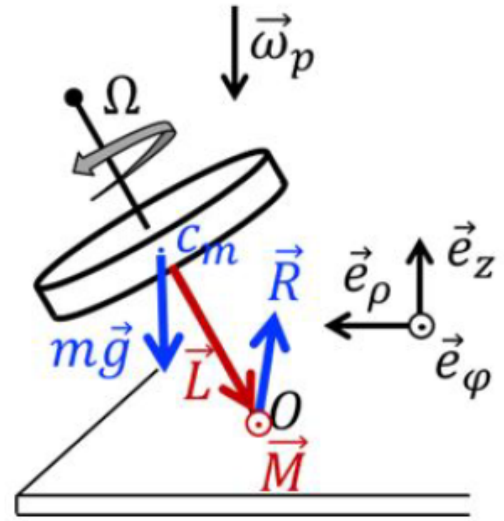
Solutions

Solution 1



1. La toupie est soumise à son poids $m\vec{g}$ appliqué au centre de masse et à la force de réaction du sol $\vec{R}$ appliquée en O. ($\vec{R}$ a une compossante horizontale, comme on le verra en d).
2. Le moment cinétique de la toupe est $\vec{L} = I\vec{\Omega}$. $\vec{L}$ a la même direction que $\vec{\Omega}$: il pointe vers le bas puisque la toupe tourne dans le sens horaire. *(Autre argument : règle du tire-bouchon)*
3. Le moment des forces en O est $\vec{M} = \vec{Oc_m} \times m\vec{g} + \underbrace{\vec{OO} \times \vec{R}}_{=0}$.

   C'est un vecteur perpendiculaire à la feuille dirigé vers nous, on le voit en faisant le produit vectoriel avec la main.

   Note : le calcul dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ donne $\vec{M} = l(\sin\theta\vec{e}_\rho + \cos\theta\vec{e}_z) \times -mg\vec{e}_z = lmg\sin\theta\vec{e}_\varphi$. Mais nous n'avons besoin que de la direction de $\vec{M}$ pour répondre à la question , ce calcul n'est pas nécessaire.
   Le théorème du moment cinétique en O est $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$, soit un vecteur $\vec{L}$ qui pointe de plus en plus vers nous en tournant, ie la toupie s'éloigne de nous. Ceci correspond à un mouvement de précessions dans le sens horaire, $\vec{\omega_p}$ pointe vers le bas.
4. Le centre de masse de la toupie suit le mouvement de précession, c'est à dire qu'il a un mouvement circulaire uniforme autour de l'axe vertical passant par O à vitesse angulaire ω_p. Son accélération est donc l'accélération centripète

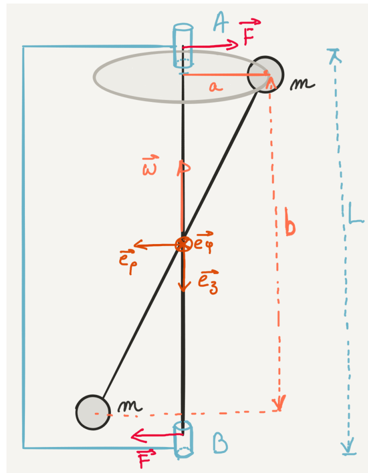
   $$\vec{a} = -l\sin\theta\omega_p^2\vec{e}_\rho$$

   et la deuxième loi de Newton s'écrit :

   $$-ml\sin\theta\omega_p^2\vec{e}_\rho = -mg\vec{e}_z + \vec{R} \Rightarrow \vec{R} = mg\vec{e}_z - ml\sin\theta\omega_p^2\vec{e}_\rho = mg\vec{e}_z - \frac{m^3g^2l^3}{I^2\Omega^2}\sin\theta\vec{e}_\rho$$

   On voit qu'outre la réaction normale apposée au poids, la force de réaction a une composante centripète. Notons tout de même que cette composante est faible : elle est proportionelle à $\frac{1}{\Omega^2}$ avec $\Omega >> 1$.

Solution 2



1. On calcule le moment cinétique du solide en rotation. La barre verticale tourne autour de son axe, son moment cinétique est nul (approximation de la tige mince, toute la masse est sur l'axe). La tige en biais est sans masse, donc seules les deux masses contribuent.

   Pour les deux petites masses, on a :
   $$\vec{L}_0^m = \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{v}$$
   En passant en coordonnées cylindriques, nous obtenons, en commençant par la masse de gauche,
   $$\vec{v} = a\omega\vec{e}_\varphi$$
   Alors,
   $$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{b}{2}\vec{e}_z + a\vec{e}_\rho \\ \vec{L}_0 &= \left(\frac{b}{2}\vec{e}_z + a\vec{e}_\rho\right) \wedge ma\omega\vec{e}_\varphi \\ &= \frac{mab\omega}{2}\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\varphi + ma^2\omega\vec{e}_\rho \wedge \vec{e}_\varphi = -\frac{mab}{2}\omega\vec{e}_\rho + ma^2\omega\vec{e}_z\end{aligned}$$
   Pour la deuxième masse, nous avons :
   $$\overrightarrow{OP'} = -\overrightarrow{OP} \text{ et } \vec{v}' = -\vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{OP'} \wedge m\vec{v}' = \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{v}$$
   Au final :
   $$\boxed{\vec{L}_0 = 2ma^2\omega\vec{e}_z - mab\omega\vec{e}_\rho}$$

2. Le moment extérieur est donné par
   $$\sum \vec{M}_0^{\text{ext}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_0}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[-mab\omega\vec{e}_\rho + 2ma^2\omega\vec{e}_z\right]$$
   Or, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z = \vec{0}$ car $\vec{e}_z$ ne change pas. Par contre, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\rho = \omega\vec{e}_\varphi$. De ce fait, le moment extérieur s'exprime comme :
   $$\sum \vec{M}_0^{\text{ext}} = -mab\omega^2\vec{e}_\varphi = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_A + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}_B$$

Chacune des deux forces exerce le même moment $\overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_A = \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}_B$ car $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA}$ et $\vec{F}_B = -\vec{F}_A$ affin d'assurer que la somme des forces est nulle (puisque le centre de masse reste immobile). Donc,

$$\begin{aligned}\sum \vec{M}_0^{ext} &= 2\overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_A = -mab\omega^2\vec{e}_\varphi \\ &= 2\left(-\frac{L}{2}\vec{e}_z\right) \wedge (-F)\vec{e}_\rho = -mab\omega^2\vec{e}_\varphi \\ &= LF\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho = -mab\omega^2\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

en se rappelant que $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho = \vec{e}_\varphi$, on a

$$F = -\frac{mab\omega^2}{L}$$

L'intensité de F est donc donnée par $F = \dfrac{mab\omega^2}{L}$.
F est la force exercée par les roulements à bille sur la barre. Donc la force exercée sur les roulements est $-F\vec{e}_\rho$ La force exercée sur le roulement due à la rotation est donc :

$$\boxed{F = \frac{mab}{L}\omega^2}$$

Remarque : On constate que le moment cinétique n'est pas forcément parallèle au vecteur rotation. Ce n'est le cas que si le solide est "équilibré" c.a.d. il tourne autour d'un axe principal d'inertie.

Solution 3

1) $H = h_1 > h_2 > h_3$
Cas (1) : Le cylindre n'entre pas en rotation pendant son trajet sur le tremplin (il glisse sans rouler donc il n'y pas de force de frottements). Son énergie cinétique est donc uniquement celle de son centre de masse. Etant éjecté verticalement, il est totalement à l'arrêt lorsqu'il atteint la hauteur h_1 (sa vitesse n'a pas de composante horizontale). La conservation de l'énergie mécanique impose donc $h_1 = H$.
Cas (2) : Comme le cylindre roule, il arrive au bout du tremplin avec une énergie de translation et de rotation. Il continue à tourner sur lui-même lors de sa trajectoire verticale après éjection. Une partie de son énergie cinétique reste donc stockée dans son mouvement de rotation, ce qui impose $h_2 < h_1$.
Cas (3) : Puisque le point d'éjection est à la même hauteur qu'en (2) et que le cylindre roule de la même manière, la conservation de l'énergie mécanique impose que le cylindre arrive au bout du tremplin avec une vitesse de même norme que dans le cas (2). Mais cette vitesse a une composante horizontale, qui reste constante après éjection, il y a donc moins d'énergie convertible en potentiel de gravitation qu'en (2) : $h_3 < h_2$.
2) Calcul des hauteurs
Cas (1) : $h_1 = H$.
Pour 2 et 3, calculons $h_3(\theta)$, car h_2 sera donné par $h_2 = h3(\pi/2)$:
Cas (3) : Rappelons que le roulement sans glissement impose une relation entre la vitesse du centre de masse et la vitesse de rotation du cylindre, que l'on retrouve en exprimant le fait que la vitesse du point de contact est nulle : $\omega_3 = -v_3/r$
L'énergie cinétique au point d'éjection est la somme de l'énergie cinétique du centre de masse et de l'énergie cinétique de rotation :

$$E_{C,3} = \frac{1}{2}m|v_3|^2 + \frac{1}{2}I_\Delta\omega_3^2 = \frac{1}{2}m|v_3|^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}mr^2)\Big(\frac{|v_3|}{r}\Big)^2 = \frac{3}{4}m|v_3|^2$$

Conservation de l'énergie mécanique entre le point de départ et le point d'éjection :

$$\frac{1}{2}mgH = \frac{3}{4}m|v_3|^2$$

$$|v_3| = \sqrt{\frac{2}{3}gH}$$

Pour obtenir la hauteur atteinte, il faut prendre la composante verticale de la vitesse : $v_3 \sin\theta$. La hauteur au dessus du point d'éjection h_3' est obtenue par conservation de l'énergie mécanique :

$$\frac{1}{2}m(v_3 \sin\theta)^2 = mgh_3'$$

$$h_3' = \frac{v_3^2 \sin^2\theta}{2g} = \frac{2gH\sin^2\theta}{3 \cdot 2g} = \frac{1}{3}H\sin^2\theta$$

$$h_3 = \frac{1}{2}H + h_3' = H(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sin^2\theta)$$

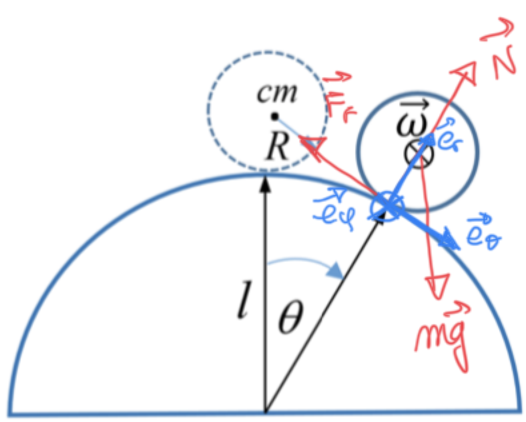
le cas (2) est obtenu avec $\theta = \pi/2$ donc

$$h_2 = H(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{5}{6}H$$

Solution 4

1. On pose : Comme c'est un cylindre creux, route la masse est à la même distance R de l'axe de symétrie. Le moment d'inertie est donc mR^2
2. **Au centre de masse :** poids $m\vec{g}$
   Au point de contact A : Réaction normale $\vec{N}$ et force de frottements $\vec{F_F}$.

   Le cylindre creux roule sans glisser jusqu'à un angle critique θ_c, puis il «décolle». Il n'est alors plus en contact avec le support.



3. Parabolique ou uniformément accéléré ($\vec{g}$).
4. $$\theta_c = \frac{\pi}{3}$$

ou

$$\theta_c = \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$$

Le schéma "appelle" les coordonnées sphériques (à cause de θ). Ici, $\varphi = cte = 0$ et $r = cte$.

$$\vec{F}_F = -F_F\vec{e}_\theta \qquad \vec{N} = N\vec{e}_r \qquad m\vec{g} = -mg\cos\theta\vec{e}_r + mg\sin\theta\vec{e}_\theta$$

Pour calculer l'angle critique de décollage θ_c :

— Condition pour le « décollage » : $N = 0$

— Newton selon $\vec{e_r}$ au point de décollage :

$$-m(l+R)\dot{\theta_c}^2 = -mg\cos\theta_c + N \Rightarrow \dot{\theta_c}^2 = \frac{g\cos\theta_c}{l+R}$$

— Conservation de l'énergie mécanique pour exprimer $\dot{\theta_c}^2 = f(\theta)$:
Équation de liaison entre ω et $\dot{\theta}$. En notant A le point de contact du cylindre creux, $v_A = 0$ à cause du roulement sans glissement :

$$v_A = v_{cm} + v_{A/cm} \Longrightarrow (l+R)\dot{\theta} - R\omega = 0 \Rightarrow \omega = \frac{l+R}{R}\dot{\theta}$$

Énergie potentielle :

$$E_p = mgh_{cm} = mg(l+R)(\cos\theta - 1)$$

(ici choisie telle que $E_p(\theta = 0) = 0$)
Énergie cinétique translation + rotation :

$$E_c = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = \frac{1}{2}m((l+R)\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}mR^2\left(\frac{l+R}{R}\dot{\theta}\right)^2 = m(l+R)^2\dot{\theta}^2$$

Énergie mécanique :

$$E_m = E_p + E_c = mg(l+R)(\cos\theta - 1) + m(l+R)^2\dot{\theta}^2$$

Conservation de l'énergie mécanique :

$$E_m = cte = E_m(\theta = 0) = 0 \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{g(1-\cos\theta)}{l+R}$$

Finalement :

$$\dot{\theta_c}^2 = \frac{g\cos\theta_c}{l+R}$$

avec

$$\dot{\theta_c}^2 = \frac{g(1-\cos\theta_c)}{l+R} \Rightarrow \frac{g(1-\cos\theta_c)}{l+R} = \frac{g\cos\theta_c}{l+R} \Rightarrow \cos\theta_c = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_c = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

5.
$$\ddot{\theta} = \frac{g}{2(l+R)} \sin\theta$$

— Newton : selon $\vec{e_\theta}$: $m(l+R)\ddot{\theta} = mg\sin\theta - F_F$

— Theoreme du moment cinetique au centre de masse :

$$\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \vec{M}_{cm,F_F} \Rightarrow= RF_F\vec{e_\varphi} \Rightarrow F_F = mR\dot{\omega}$$

$$\Rightarrow m(l+R)\ddot{\theta} = mg\sin\theta - mR\dot{\omega}$$

Avec l'équation de liaison :

$$\dot{\omega} = \frac{l+R}{R}\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{2(l+R)}\sin\theta$$

— Autre méthode : On peut appliquer le théorème du moment cinétique en A (car $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_{cm}$)
Theoreme du moment cinetique en A :

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_{A,mg} \Rightarrow I_A\dot{\omega}\vec{e_\varphi} = Rmg\sin\theta\vec{e_\varphi}$$

Avec Steiner :

$$I_A = mR^2 + I_{cm} = 2mR^2 \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{g}{2R}\sin\theta$$

Et avec l'équation de liaison :

$$\dot{\omega} = \frac{l+R}{R}\ddot{\theta} \Rightarrow \frac{l+R}{R}\ddot{\theta} = \frac{g}{2R}\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{2(l+R)}\sin\theta$$

6. θ_c serait plus petit car le cylindre irait plus vite (il y aurait moins d'inertie due à la rotation).